
510.5
EM
v.23

23e Année. 1er Octobre 1920. No 1.

L'Éducation Mathématique

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

PRIX DU NUMÉRO : France et Colonies, 0 fr. 60. Étranger, 0 fr. 70.
ABONNEMENT ANNUEL : France et Colonies, 10 fr. Étranger, 12 fr.

Tous les abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, l'on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction : Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Abonnements : Librairie **Vuibert**, Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats,

L'INVERSION

La Géométrie peut être considérée comme l'étude de figures invariables du plan ou de l'espace, mais un point de vue qui donne des aperçus étendus et nouveaux consiste à la regarder comme la science des transformations des éléments du plan ou de l'espace. C'est à l'introduction systématique des méthodes de transformation que la Géométrie doit les grands progrès accomplis au cours du siècle dernier.

Quelques-unes de ces transformations, bien connues de nos lecteurs, apparaissent dès le début et sont même implicitement contenues dans les définitions et dans les axiomes : ce sont les deux transformations qui constituent le déplacement et que l'on appelle *la translation* et *la rotation*, ainsi que *la symétrie* par rapport à une droite ou par rapport à un plan. Elles sont indispensables pour la définition des figures égales, qui est fondée sur le concept de la superposition, emprunté à l'expérience; la symétrie est employée pour la démonstration des premiers théorèmes relatifs à l'angle droit et au triangle isocèle.

Dans le troisième livre, on voit apparaître *l'homothétie*, qui, se combinant avec les déplacements, mène à la considération de figures semblables, directement ou inversement.

L'Éducation mathématique a consacré des notes à quelques-unes de ces transformations, qui sont des transformations ponctuelles, c'est-à-dire faisant correspondre à un point un autre point. Il existe d'autres transformations qui, par exemple, font correspondre une droite à un point et réciproquement.

Les transformations simples dont nous avons parlé, appliquées à des points d'une courbe, leur font correspondre des points d'une courbe de même définition, égale ou semblable à la première, directement ou inversement : par exemple, des points en ligne droite ont pour correspondants des points d'une autre ligne droite; un cercle correspond de même à un cercle.

On peut définir des transformations par lesquelles des points appartenant à une ligne droite ont pour correspondants des points d'une autre courbe; on conçoit l'intérêt particulier que présentent les transformations qui changent une droite en cercle, un plan en sphère, ou réciproquement.

A la demande de plusieurs correspondants, nous allons exposer les propriétés les plus élémentaires d'une transformation ponctuelle de ce genre : on la nomme *inversion* ou *transformation par rayons vecteurs réciproques*. Elle établit une relation entre des systèmes formés de droites et de cercles et d'autres systèmes de même composition, mais qui peuvent être plus compliqués. Sans doute, les propriétés du système le plus compliqué pourraient être établies directement, sans le secours de l'inversion; mais souvent la démonstration en serait longue, difficile, tandis que la transformation prouve qu'elles sont une conséquence, et pour ainsi dire un autre aspect, de propriétés de figures simples, aisément abordables.

L'inversion, appliquée dans l'espace à des systèmes de plans et de sphères, de droites et de cercles, les transforme en systèmes formés d'éléments de même nature. Pour commencer, nous nous bornerons à l'étude de l'inversion dans le plan.

Définition. — Soit O un point donné, qu'on appelle *pôle* ou *centre* de l'inversion et λ une constante, positive ou négative, qu'on appelle *la puissance*; à tout point M du plan on fait correspondre le point M′ situé sur la droite OM, tel que le produit $OM \times OM'$ soit égal à la puissance λ.

Conséquences : 1° Si $\lambda > 0$, les points M et M′ sont du même côté de O. Si $\lambda < 0$, les points M et M′ sont séparés par le point O.

2° La correspondance est réciproque : si M′ est l'inverse de M, M est celui de M′; de là vient le nom de transformation « par rayons vecteurs réciproques ». En d'autres termes, si l'on effectue deux transformations successives ayant les mêmes élément (pôle et puissance), une figure F s'étant transformée en F′, la figure F′, transformée encore une fois, reproduit, ou restitue, la figure initiale F. C'est ce qu'on énonce en disant que la succession de deux inversions de même définition est une transformation identique.

On a déjà remarqué que la symétrie par rapport à une droite ou par rapport à un plan a la même propriété, qui n'appartient évidemment pas à la translation, et qui n'appartient à une rotation que si l'angle a une valeur particulière, savoir deux droits.

En revanche, la translation et la rotation ont une propriété que ne possèdent ni la symétrie, ni l'inversion, c'est qu'on peut définir une *translation infiniment petite*, ou une *rotation infiniment petite*, et que, par suite, on peut concevoir une de ces transformations comme résultant d'un nombre très grand de transformations de même nature, très petites, effectuées successivement. Pour l'inversion, il n'existe rien de semblable : quelle que soit la valeur du paramètre λ, deux figures inverses l'une de l'autre ne sont jamais infiniment peu différentes.

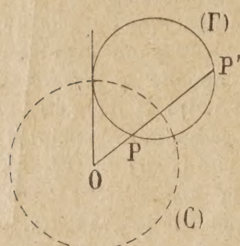
3° Tout point du plan a un inverse, sauf le point O lui-même, auquel ne correspond aucun point à distance finie : si un point M s'approche du point O, le point transformé M′ s'éloigne de plus en plus et disparaît à l'infini quand M vient en O. La direction dans laquelle M′ s'éloigne est celle que prend OM quand M vient se confondre avec O; si le point M décrit une courbe

passant en O et admettant une tangente au point O, c'est la direction de cette tangente. On conçoit qu'une telle direction n'existe pas nécessairement; en particulier, on imagine facilement un point M décrivant une spirale qui se rapproche indéfiniment de O en tournant indéfiniment autour de ce point; dans cette hypothèse, la droite OM n'a aucune position limite. Mais nous ne rencontrerons pas de cas semblable dans les exemples simples que nous traiterons.

4° Si $\lambda > 0$, il existe un cercle (C) de centre O, de rayon $\sqrt{\lambda}$, chacun des points de ce cercle coïncide avec son inverse : les points intérieurs à ce cercle ont pour inverses des points extérieurs, et réciproquement. Soit AC un diamètre de ce cercle, M un point du diamètre, M' son inverse; M et M' sont conjugués harmoniques par rapport à A et C, puisque $OM \times OM' = \overline{AC}^2$.

Si $\lambda < 0$, il n'existe aucun point qui coïncide avec son inverse; cependant le cercle (C') tracé autour de O comme centre avec le rayon $\sqrt{-\lambda}$ a encore des propriétés intéressantes : un point A de ce cercle a pour inverse le point A' diamétralement opposé; tout point intérieur à ce cercle a pour inverse un point extérieur, et réciproquement; mais deux points inverses, M et M', ne sont pas conjugués par rapport à A et A'.

5° Si par deux points inverses on fait passer un cercle quelconque (Γ), la puissance du pôle par rapport à ce cercle est égale à la puissance d'inversion λ; si λ est positif, le cercle mené par les deux points inverses P et P' est orthogonal au cercle (C), la longueur de la tangente qu'on peut lui mener de O est $\sqrt{\lambda}$.



Réciproquement, si la puissance de O par rapport à un cercle est égale à λ, toute droite qui menée par O le rencontre, le coupe en deux points inverses. Il en résulte qu'un tel cercle se transforme en lui-même par inversion, puisque ses points s'échangent deux à deux.

Étant donnés deux points A et B, non en ligne droite avec O, et dont les inverses sont A' et B', les quatre points A, B, A', B' sont sur un cercle; la puissance de O par rapport à ce cercle est λ.

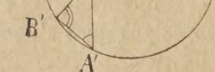
Cela résulte immédiatement de ce que

$$OA \times OA' = OB \times OB' = \lambda.$$

On peut exprimer autrement cette propriété des quatre points en disant que les triangles OAB et OB'A' sont semblables (inversement). L'égalité $OA \times OA' = OB \times OB'$ se met en effet sous la forme de proportion $\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$, les deux triangles OAB, OB'A' ont donc un angle commun compris entre côtés proportionnels. Les sens de rotation de AB et de A'B' par rapport à O étant les mêmes, ceux de AB et de B'A' sont opposés, les deux triangles sont donc inversement semblables.

Il en résulte aussi des égalités d'angles :

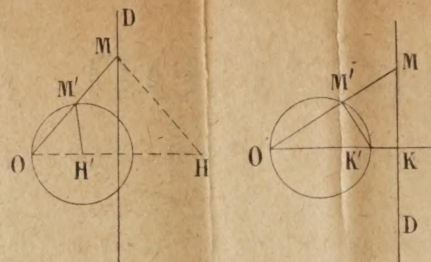
$$OAB = OB'A' \quad \text{et} \quad OBA = OA'B'.$$



Dans les applications, on se sert de la similitude de ces triangles, en utilisant soit l'égalité des angles, soit celle des rapports; nous en avons un exemple dans ce qui suit.

Figure transformée d'une ligne droite. — Si une droite passe par le pôle O, ses points se transforment en points de la même droite : la droite est donc sa propre figure inverse.

Soit maintenant une droite D ne passant pas par le point O; soit H le point symétrique de O par rapport à D, M un point quelconque de D et M' son inverse. Les deux triangles OMH et OH'M' sont semblables, or le premier est isocèle : MO = MH, donc le second l'est aussi et OH' = H'M'. Il en résulte que le point M', inverse de M, décrit le cercle qui a H' pour centre et H'O pour rayon. Quand le point M s'éloigne à l'infini sur la droite D, le point M' s'approche indéfiniment de O, la direction limite de OM' étant parallèle à D, comme il résulte d'une remarque précédente (3°).



Le même théorème se déduit aussi facilement de considérations d'angles. Soit K la projection de O sur la droite D et K' l'inverse de K, l'angle MKO est droit, l'angle K'M'O l'est donc également, ce qui prouve que M' décrit le cercle qui a OK' pour diamètre.

(*A suivre.*)

ARITHMÉTIQUE

4021. — *Une personne achète de la rente 5 °/₀ au cours de 88f,50 et de la rente 4 °/₀ au cours de 72f. Elle dépense pour cet achat une somme de 7 125f sans tenir compte des frais.*

Le revenu de la partie de cette somme constituée en rente 5 °/₀ surpasse de 100f celui de la partie constituée en 4 °/₀.

On demande quel est le revenu total que la personne s'est assuré par son achat.

(*B. S. Paris, aspirantes,* 2e *session* 1919.)

Solution arithmétique. — 100f de rente à 5 °/₀ correspondent à un capital de $20 \times 88{,}5 = 1\,770^f$. De 7 125 défalquons 1 770, il reste 5 355. Si les intérêts des deux placements étaient égaux, la somme placée serait 5 355f, et serait alors partagée en deux parties, inversement proportionnelles aux taux, c'est-à-dire à

$$\frac{5 \times 100}{88{,}5} \quad \text{et} \quad \frac{4 \times 100}{72},$$

ou à

$$\frac{5}{88{,}5} \quad \text{et} \quad \frac{4}{72}, \quad \text{ou à} \quad \frac{1}{177} \quad \text{et} \quad \frac{1}{180}.$$

Il faut donc diviser 5 355 en deux parties, proportionnelles à 177 et à 180; on trouve

$$5\,355 \times \frac{177}{357} = 15 \times 177 = 2\,655,$$

$$5\,355 \times \frac{180}{357} = 15 \times 180 = 2\,700.$$

Le capital placé au taux de 4f pour 72 est 2 700, il rapporte $\frac{4 \times 2\,700}{72} = 150^f$, le capital placé au taux de 5f pour 88,50 est $2\,655 + 1\,770 = 4\,425$, il rapporte $\frac{5 \times 4\,425}{88{,}5} = 250^f$. Le revenu total est 400f.

(G. BONNAME, école professionnelle de Besançon.)

Solution algébrique. — Soient x et y les deux parts du capital employé à l'achat de la rente. L'énoncé fournit les deux relations

$$x + y = 7\,125, \qquad (1)$$

$$\frac{5x}{88{,}5} - \frac{4y}{72} = 100.$$

Cette dernière équation peut être simplifiée et écrite,

$$\frac{x}{17,7}-\frac{y}{18}=100,$$

et enfin, en rendant entiers les coefficients,

$$60x-59y=3\times 100\times 59\times 6=106\,200. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) forment un système du premier degré, que l'on résout facilement, par exemple en tirant une inconnue de la première équation pour porter sa valeur dans la seconde : on trouve ainsi $x=4\,425$ et $y=2\,700$.

Le revenu total que la personne s'est assuré est donc

$$\frac{5\times 4\,425}{88,5}+\frac{4\times 2\,700}{72}=250+150=400.$$

La différence 250 — 150 est bien égale à 100.

(M. F., à Arance.)

[Bonnes solutions arithmétiques de M[lles] Bocquet; M. Marignac; de MM. G. Bruniquel; Chatelier; C. Crépeau; F. Dupire; Huon-Leroux; R. Laforest; H. Le Bihan; G. Lévy; Lhôtelier; R. Polle; L. Soulier; M. Stévenard.

Bonnes solutions algébriques de M[lles] Calmon; S. David; de MM. R. Beauvais; G. Bertrand; H. Chardon; R. Chasselut; G. Colle; A. Collet; G. Démaret; H. Desvilles; E. Épailly; A. F., à Saint-Pons; P. Faucheux; J. Forceville; M. Gros; Guicheney; G. Jugain; R. Laurin; H. Lorioz; P. Louon; Luce-Catinot; J. Mauhin; L. G. Papon; G. Pichon; E. Pinlong; G. Rian; A. Ricoux; Ch. Vouilloux.]

4056. — *La population d'une ville s'accroît en progression géométrique d'un nombre x de millièmes par an. Quel est ce nombre, sachant que la population, qui était de 23 540 habitants au 1er janvier 1880, était devenue de 36 674 le 1er janvier 1895?*

La population étant P au 1er janvier d'une année, et croissant, pendant l'année, de x millièmes de sa valeur, sera, au 1er janvier de l'année suivante, $P\left(1+\frac{x}{1\,000}\right)$, et au bout de n années, par application de la même loi, $P\left(1+\frac{x}{1\,000}\right)^n$.

On peut dire que la population croît comme les termes consécutifs d'une progression géométrique dont la raison est

$$\left(1+\frac{x}{1\,000}\right).$$

Entre les deux dates indiquées, il s'est écoulé 15 années : on a donc l'équation

$$36\,674=23\,540\times\left(1+\frac{x}{1\,000}\right)^{15};$$

en prenant les logarithmes des deux membres, on trouve

$$\log 36\,674-\log 23\,540=15\log\left(1+\frac{x}{1\,000}\right).$$

On a

$$\log 36\,674=4,56436$$
$$\log 23\,540=4,37181$$

dont la différence est 0,19255
et a pour quinzième 0,01284.

Or on trouve précisément dans la table, que $0,01284=\log 1,0300$; il en résulte que $x=30$. L'accroissement demandé est de 30 unités par mille habitants chaque année.

(A. WEHRUNG, à Paris.)

N. B. — L'augmentation de 30 ‰ par an est très forte, comme l'ont fait remarquer quelques abonnés. Cependant il y a eu quelques localités de Saxe où la natalité atteignant 50 pour 1 000 habitants, la mortalité n'était que de 20, mais c'est un cas exceptionnel. Une augmentation annuelle de 30 ‰ s'expliquerait par l'arrivée d'immigrants nombreux.

[Bonnes solutions de M[lle] A. Lefèvre; de MM. Boulvert; Bourchanin; G. Bruniquel; M. Chatelier; A. Cieutat; G. Démaret; Herbiet; R. Joyeau; Lhôtelier; G. Pichon; L. Soulier.]

ALGÈBRE

3994. — *On divise une demi-circonférence de diamètre AB = 2R en quatre arcs égaux et on joint le point A aux points de division C, D, E.*

1° *Calculer en fonction de R les droites AC, AD, AE.*

2° *On trace les droites CD, DE, EB; calculer en fonction de R les surfaces des triangles rectilignes ACD, ADE, AEB.*

(*B. S., Rennes, aspirants, 1re session* 1919.)

AD, côté du carré inscrit dans le cercle, est égal à $R\sqrt{2}$.

AC et AE sont les côtés de l'octogone convexe et de l'octogone étoilé. Désignons leurs longueurs par x et y. Il est visible que CB = AE. En appliquant au triangle rectangle ACB le théorème de Pythagore, on a

$$x^2+y^2=4R^2; \qquad (1)$$

d'autre part, l'aire du triangle rectangle ACB a pour mesure

$$\frac{1}{2}xy \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}CH\times AB$$

et sa hauteur CH est la moitié du côté du carré; on a donc la seconde équation

$$xy=R^2\sqrt{2}. \qquad (2)$$

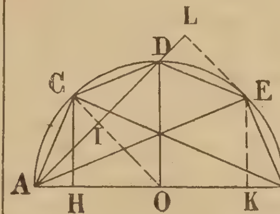
Le système des équations (1) et (2) peut être résolu par deux procédés différents.

On peut calculer $x+y$ et $x-y$: en effet,

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=4R^2+2R^2\sqrt{2},$$
$$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=4R^2-2R^2\sqrt{2},$$

ce qui donne, puisque l'on a $y>x$,

$$x+y=R\sqrt{4+2\sqrt{2}},$$
$$y-x=R\sqrt{4-2\sqrt{2}}.$$



On en tire

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{R}{2}\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}+\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right),\\ x&=\frac{R}{2}\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}-\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right).\end{aligned}\right\} \quad (I)$$

On obtient des formules plus simples en élevant au carré les deux membres de l'équation (2), ce qui donne

$$x^2y^2=2R^4, \qquad (3)$$

et en tirant y^2 de l'équation (1) pour porter sa valeur dans l'équation (3), qui devient ainsi

$$x^2(4R^2-x^2)=2R^4,$$

ou

$$x^4-4R^2x^2+2R^4=0. \qquad (E)$$

La somme des racines de cette équation étant $4R^2$, la plus petite est x^2 et la plus grande y^2 (*).

Donc

$$x^2=2R^2-\sqrt{2}R^2=R^2(2-\sqrt{2}),$$
$$y^2=2R^2+\sqrt{2}R^2=R^2(2+\sqrt{2}).$$

On a donc les valeurs

$$x=R\sqrt{2-\sqrt{2}}, \qquad y=R\sqrt{2+\sqrt{2}}, \qquad (II)$$

de forme plus simple que les valeurs (I).

2° Les triangles CAD, DAE, EAB ont même angle en A, égal au quart d'un angle droit.

(*) On aurait pu dire que x^2 et y^2, dont on connaît la somme $4R^2$ et le produit $2R^4$, sont racines d'une équation du second degré, qui est l'équation (E).

Leurs aires sont donc entre elles comme les produits des côtés qui comprennent cet angle, c'est-à-dire comme

$$xR\sqrt{2}, \qquad yR\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad y.2R,$$

ou comme

$$x, \qquad y \qquad \text{et} \qquad y\sqrt{2},$$

ou enfin, comme

$$\frac{x}{y\sqrt{2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad 1.$$

D'autre part,

$$\frac{x}{y\sqrt{2}} = \frac{x^2}{xy\sqrt{2}} = \frac{R^2(2-\sqrt{2})}{2R^2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

L'aire AEB est, comme on l'a vu, égale à

$$\frac{1}{2}R^2\sqrt{2} = \frac{R^2}{\sqrt{2}}.$$

On a donc

$$\text{aire ADE} = \frac{R^2}{2},$$

et

$$\text{aire ACD} = R^2\,\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Remarque I. — AE étant la bissectrice de l'angle DAB, les distances de E à AB et à AD, EK et EL sont égales, et les triangles BEK, DEL sont égaux (ils sont rectangles, les hypoténuses DE et EB sont égales, ainsi que deux côtés de l'angle droit). D'autre part, chacun de ces triangles est égal à la moitié du triangle DCA, qui est partagé par CO.

On a donc

$$\text{AED} = \text{AEL} - \text{DEL},$$
$$\text{AEB} = \text{AEK} + \text{KEB},$$

donc

$$\text{AEB} - \text{AED} = 2\text{KEB} = \text{ACD}.$$

La différence des deux grands triangles est égale au petit; cette propriété s'exprime aussi par l'égalité

$$y\sqrt{2} - y = x,$$

ou

$$y(\sqrt{2}-1) = x,$$

ou

$$y^2(\sqrt{2}-1) = xy,$$

qu'il est facile de vérifier, avec les valeurs trouvées

$$R^2(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) = R^2\sqrt{2},$$

ou

$$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1.$$

Remarque II. — On voit que le triangle ADE est équivalent au quart du carré inscrit, c'est-à-dire au triangle AOD. Cette propriété résulte simplement de ce que OE, bissectrice intérieure de l'angle DOB, est parallèle à AD.

Les triangles ADE et ADO ont donc même base et des hauteurs égales, OI = EL.

(Jean MAUVENU, cours complémentaire, Châtillon-sur-Indre.)

N. B. — Le calcul des surfaces indiqué par certains de nos correspondants est très long : il est déjà peu avantageux de se servir de la formule

$$S = \frac{abc}{4R},$$

mais quelques-uns ont employé

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

ce qui n'était pas indiqué dans le cas traité.

[Bonnes solutions de MM. Andrei; Aubert; G.-B. L.; Bardet; F. Baujard; Baylac; M. Beyneix; L. Bienfait; M. Boulvert; J. Briquet; A. Cabarat; J. Chabaud; Chauvalon; Cortat; Crépeau; G. Démaret; Destobère; E. Delmas; Dubreuil; Dubus; F. Dupire; A. F.; P. Faucheux; L. Fixé; N. Forcade; Giron-Guy; A. Gouy; P. Gouzenne; J. Grall; V. Herbiet; Jaffé; R. Laforest; Lamure; R. Lasellerie; Léost; N. Leroy; Lhôtelier; M. Loiseau; Lovichi; Luce-Catinot; M. Moindrot; A. Morin; L. Mourlon; G. Mouzon; R. N.; H. Naudet; C. Noirbent; Ouach-Van-Giao; J. Pascal; R. Pavy; G. Pichon; P. Renaud; R. Renaud; G. Rian; F. Richard; M. Robineau; Saint-Cirgue; Soulier; M. Stévenard; J. Tardieu; J. Tarnus; Tinland; J. Tournier; M. Vialle; J. Villa; G. Watiez.

Assez bonnes solutions de MM. G. Arbaud; Arbey; A. Arnaud; A. Bernadac; Boursier; Cadaert; A. Charavy; J. Condamin; A. Coton; A. Cieutat; R. Douyrou; E. Dubail; E. Epailly; E. Faurés; R. Fiori; Joyeau; J. Nantes; Pommerolle; Roquet; G. Vergnon.]

4044. — *Mettre le trinome*

$$x^2 - x(b+c) + b^2 - bc + c^2$$

sous la forme d'une somme de deux carrés.

Il s'agit ici de carrés qui soient ceux de polynomes rationnels en x. Les deux premiers termes appartiennent au carré de $x - \frac{1}{2}(b+c)$; pour compléter ce carré, il faut ajouter et retrancher le terme qui manque, savoir $\frac{1}{4}(b+c)^2$. L'expression considérée se transforme ainsi en

$$\left[x-\frac{1}{2}(b+c)\right]^2 + \frac{3}{4}(b^2-2bc+c^2)$$
$$= \left[x-\frac{1}{2}(b+c)\right]^2 + \frac{3}{4}(b-c)^2 = \left[x-\frac{1}{2}(b+c)\right]^2 + \left[\frac{(b-c)\sqrt{3}}{2}\right]^2.$$

Le second terme n'est pas rationnel d'une façon absolue; mais il est rationnel par rapport aux quantités b et c, qui ne figurent pas sous le radical. La seule grandeur irrationnelle qui s'y présente est $\sqrt{3}$.

(E. DELMAS, école primaire supérieure d'Aubenas.)

[Bonnes solutions de Mlle Levifve; de MM. H. Arnaud; A. Bal; F. Baujard; M. Boulvert; G. Bruniquel; H. Cazes; R. Chasselut; J. Condamin; F. Dupire; A. F., à St.-Pons; C. F., à Angers; M. Forcade; H. Fortin; J. Georges; J. Goudin; E. Guicheney; V. Herbiet; Huon-Leroux; A. Lamendin; A. Lamure; F. Lefèvre; Lhôtelier; P. Louon; H. Lotard; Luce-Catinot; M. M. B.; Magdinier; J. Millour; C. Noirbent; R. Petit; G. Pichon; R. Reynaud; L. Soulier; M. Stévenard; J. Tarnus; J. Tesquet.]

4037. — *Résoudre le système*

$$x + y = cxyz, \qquad y + z = axyz, \qquad z + x = bxyz. \qquad (1)$$

Le système admet évidemment la solution $x = y = z = 0$. D'ailleurs, si une des inconnues, x par exemple, reçoit la valeur 0, la première équation entraîne $y = 0$ et la dernière $z = 0$.

Cherchons s'il existe des solutions où aucune des inconnues n'est nulle. On peut alors diviser toutes les équations par le produit xyz, et les mettre ainsi sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} &= c, \\ \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} &= a, \qquad (2) \\ \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} &= b, \end{aligned}$$

qui conduit à poser

$$X = \frac{1}{yz}, \qquad Y = \frac{1}{zx}, \qquad Z = \frac{1}{xy}.$$

Le système à résoudre est alors un système classique du premier degré :

$$Y + Z = a, \qquad Z + X = b, \qquad X + Y = c. \qquad (3)$$

En ajoutant les trois équations membre à membre, on en tire

$$X + Y + Z = \frac{1}{2}(a+b+c),$$

et, en remplaçant successivement X + Y, Y + Z, Z + X par les valeurs tirées du système (3), on a

$$X = \frac{1}{2}(b+c-a), \qquad Y = \frac{1}{2}(c+a-b), \qquad Z = \frac{1}{2}(a+b-c).$$

Connaissant X, Y et Z on calcule facilement x, y et z; en effet,

$$\frac{X}{YZ} = x^2, \qquad \frac{Y}{ZX} = y^2, \qquad \frac{Z}{XY} = z^2.$$

Le calcul se fait alors par le procédé suivant : on posera

$$2p = a + b + c,$$

d'où

$$2(p-a)=b+c-a,$$
$$2(p-b)=c+a-b,$$
$$2(p-c)=a+b-c.$$

On aura

$$X=p-a, \qquad Y=p-b, \qquad Z=p-c.$$

Posons

$$P=(p-a)(p-b)(p-c)=XYZ\neq 0;$$

les formules ci-dessus donnent

$$x^2=\frac{X^2}{P}, \qquad y^2=\frac{Y^2}{P}, \qquad z^2=\frac{Z^2}{P}. \qquad (4)$$

Pour que l'on obtienne des valeurs pour x, y et z, il faut que P soit positif.

Il n'y a donc pas d'autre solution que $x=y=z=0$, si

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leqslant 0.$$

Si $P>0$, des trois facteurs X, Y, Z, un seul est positif, ou bien les trois le sont. Si les trois facteurs sont positifs, x, y et z ont tous trois le même signe : il faudra donc prendre pour x, y et z les valeurs tirées des équations (4), en associant les trois valeurs positives, d'une part, les trois valeurs négatives de l'autre.

Si au contraire $p-a$ étant positif, les deux autres différences $p-b$ et $p-c$ sont négatives, on aura $X>0$, $Y<0$ et $Z<0$, y et z doivent donc avoir le même signe, contraire à celui de x. Le système (4) donne encore deux solutions, obtenues en associant ainsi

$x>0$ avec $y<0$ et $z<0$,
$x<0$ avec $y>0$ et $z>0$.

(Jean GOUDIN, école pratique, Agen.)

Autre solution. — Le système proposé est équivalent à celui qu'on obtient en ajoutant membre à membre deux des équations et en retranchant la troisième, ce qui donne, en posant

$$b+c-a=A, \qquad c+a-b=B, \qquad a+b-c=C,$$
$$x(Ayz-2)=0, \qquad y(Bzx-2)=0, \qquad z(Cxy-2)=0.$$

Ce système admet la solution évidente $x=y=z=0$, et l'on voit bien qu'il ne peut admettre de solution où l'une des inconnues est nulle sans que les autres le soient en même temps. Supposant qu'aucune des inconnues ne soit nulle, il reste à résoudre le système

$$Ayz=2, \qquad Bzx=2, \qquad Cxy=2, \qquad (2)$$

qui est impossible si l'une des trois quantités A, B ou C est nulle; supposons donc qu'elles soient toutes les trois différentes de zéro; on a alors

$$xyz=\frac{2x}{A}=\frac{2y}{B}=\frac{2z}{C};$$

soit m la valeur commune de ces rapports, on en tire

$$x=\frac{Am}{2}, \qquad y=\frac{Bm}{2}, \qquad z=\frac{Cm}{2},$$

et en substituant dans les équations du système (2) elles deviennent $ABCm^2=8$. Cette équation n'est pas possible si $ABC\leqslant 0$.

Si $ABC>0$, on a

$$x=\frac{A}{2}\sqrt{\frac{8}{ABC}}=A\sqrt{\frac{2}{ABC}},$$
$$y=B\sqrt{\frac{2}{ABC}},$$
$$z=C\sqrt{\frac{2}{ABC}},$$

le radical, qui représente $\frac{1}{2}m$, ayant le même signe dans les trois formules.

(M., à Guéret.)

N. B. — Cette méthode donne bien deux solutions, avec les signes indiqués par la discussion précédente.

Nos correspondants ont bien résolu le système, par des procédés qui ressemblent plus ou moins aux deux qui sont indiqués ci-dessus. Mais aucun n'a fait correctement la discussion et n'a indiqué comment les signes doivent être associés. C'est toujours la partie faible, que nous signalons aux efforts de nos correspondants.

[Bonnes solutions de Mlle A. Levifve; de MM. A. Arnaud; A. Bal; F. Baujard; M. Boulvert; G. Bruniquel; H. Cazes; J. Chabaud; A. Cieutat; R. Combaz; E. Delmas; F. A. G., à St-Pons; J. Grall; Herbiet; R. Joyeau; Lhôtelier; P. Louon; F. Maître; J. Millour; R. Panchaud; G. Pichon; R. Reynaud; L. Soulier.]

GÉOMÉTRIE

3996. — *Deux cercles O, O′, de rayons R et R′, sont tangents extérieurement. La tangente commune intérieure AD rencontre l'une des tangentes communes extérieures BC en un point D.*

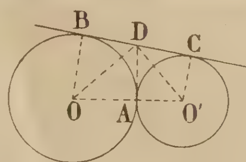
1° *Déterminer les distances de D aux deux centres O et O′.*

2° *Évaluer l'aire du trapèze OBCO′ et celle du triangle ODO′.*

Application numérique, $R=2R'=5^{cm}$.

(*B. S.*, *Clermont*, *aspirants*, 1re *session* 1919.)

Le triangle ODO′ est rectangle en D, car les droites DO et DO′ sont bissectrices de deux angles supplémentaires BOO′ et CO′O; la somme des angles en O et O′ est donc un droit.



1° La hauteur AD est moyenne géométrique entre les segments de l'hypoténuse, donc

$$\overline{AD}^2=RR',$$
$$\overline{OD}^2=R^2+RR'=R(R+R'),$$
$$\overline{O'D}^2=R'^2+RR'=R'(R+R').$$

2° Le trapèze OBCO′ est le double du triangle ODO′, car les triangles ODA et ODB sont symétriques l'un de l'autre par rapport à OD, comme O′DA et O′DC le sont par rapport à O′D. L'aire du triangle ODO′ est

$$\frac{1}{2}OD\times O'D \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2}DA\times OO'=\frac{1}{2}(R+R')\sqrt{RR'}.$$

Application :

$$R=5=2R',$$
$$R+R'=3R', \qquad RR'=2R'^2,$$
$$OD=R'\sqrt{6}=2,449\times 2,5=6^{m},1225,$$
$$O'D=R'\sqrt{3}=1,732\times 2,5=4^{m},330.$$

Surface du trapèze :

$$3R'^2\sqrt{2}=3\times\overline{2,5}^2\times 1,414=26^{m^2},5125.$$

Surface du triangle : $13^{m^2},2567$.

(Robert JOYEAUX, école primaire supérieure d'Ernée, Mayenne.)

[Bonnes solutions de MM. Aubert; Ch. Andrei; A. Arnaud; Aubas; Boitaud-Lacombe; Beauclair; A. Bernadac; M. Boulvert; P. Boureille; L. Bourgade; Briquet; G. Bruniquel; A. Cabarat; J. Calaviq; J. Chabaud; P. Chanussot; P. Charrière; Combaz; Cortat; A. Coton; C. Crépeau; H. Debray; G. Démaret; H. Desvilles, R. Douyrou; P. Dubus; J. Dugas; H. Dony; F. Dupire; J. Dutheil; E. Epailly; P. Faucheux; R. Fiori; M. Forcade; R. Gauthier; G. Girou; Gouzenne-Patrick; J. Grall; M. Jeudy; R. Laforest; R. Lassellerie; A. Lamure; Léost; N. Leroy; Lhôtelier; Lovichi; R. Luce-Catinot; J. Magnaui; F. Maître; J. Mauvenu; P. Michel; M. Moindrot; L. Mourlon; G. Mouzon; Naudet; C. Noirbent; J. Pascal; L. Philizot; G. Pichon; M. Pommerolle; R. Renaud; Richard; M. Robineau; J. Schwob; L. Soulier; M. Stévenard; A. Taillandier; J. Tarnus; Teurtroy; Tournier; G. Vergnon; M. Vialle.

Assez bonnes solutions de MM. G. Arbault; G. Bardel; Beyneix; Boursier; R. Cartier; L. Chapelon; A. Charavy; Chauvalon; A. Cieutat; G. Colles; A. Collet; Condamin; Delmas; A. Diximier; A. F.; Jaffé; A. Moreau; R. N.; J. Naudet; Ouach-van-Giao; R. Perrel; Roquet; J. Tardieu; P. Vierendeel; G. Watiez.]

4037. — *Une cuvette a la forme d'un tronc de cône; le fond a un diamètre de* 16^{cm}, *le diamètre du bord supérieur est de* 30^{cm}; *la profondeur, de* 12^{cm}. *Elle a été exposée à la pluie pendant la durée d'un orage et la hauteur de l'eau qu'elle a reçue est de* 35^{mm}. *En considérant l'évaporation comme négligeable, on demande la hauteur*

de la pluie tombée au cours de l'orage, c'est-à-dire la hauteur de la couche d'eau qui couvrirait le sol si celui-ci était imperméable.

(*B. S. Montpellier, aspirants*, 2e *session* 1919.)

Le niveau auquel s'élève l'eau dans la cuvette détermine un plan horizontal, qui coupe le tronc de cône suivant un cercle dont le rayon est x; pour calculer x, considérons les deux triangles semblables AM'H' et AMH : ils donnent lieu à la proportion

$$\frac{M'H'}{MH} = \frac{AH'}{AH},$$

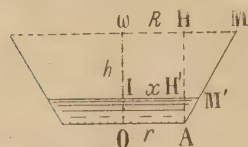
d'où l'on tire

$$M'H' = MH.\frac{AH'}{AH} = MH.\frac{3,5}{12},$$

donc

$$x = 8 + 7\frac{3,5}{12} = 10^{cm},0416.$$

Le volume occupé par l'eau, au fond de la cuvette, est celui d'un tronc de cône, dont les bases ont pour rayons respectifs x et r et dont la hauteur est $h = 3^{cm},5$. Ce volume a pour mesure



$$V = \frac{1}{3}\pi h(x^2 + xr + r^2);$$

d'autre part, la quantité d'eau de pluie reçue par la cuvette est égale au volume d'un cylindre dont la base est le cercle, ouverture supérieure du tronc de cône, et dont la hauteur est l'épaisseur de la couche d'eau représentant la chute de pluie. Soit y cette épaisseur; on a donc l'équation

$$\pi R^2 y = \frac{1}{3}\pi h(x^2 + xr + r^2),$$

d'où

$$y = \frac{1}{3}h\frac{(x^2 + xr + r^2)}{R^2}.$$

Application. $h = 3,5$, $R = 15$, $r = 8$, $x = 10,0416$; on trouve $y = 1^{cm},27$.

(L'HOTELIER, P. T. T., Évreux.)

[Bonnes solutions de Mlle Calmon : de MM. A. Arnaud; J. Briquet; A. Cabarat; A. Collet; A. Coton; L. Cousinot; G. Démaret; R. Destobere; De Wooght; F. Dupire; A. F., à Saint-Pons; C. F., à Angers; P. Faucheux; M. Forcade; L. Goyard; J. Grall; M. Gros; E. Guicheney; L. Kerleroux; L. Leroy; A. Mabillot; A. Magdinier; H. Naudet; G. Pichon; L. Soulier; E. Vellinger.]

4040. — *Soit un triangle* ABC; *sur les prolongements du côté* BC, *on prend* BB' = BA *et* CC' = CA, *et par les trois points* A, B', C' *on fait passer une circonférence de centre* O. *Démontrer que la droite* AO *est bissectrice de l'angle* BAC.

(*Bourses des lycées et collèges de garçons*, 6e *série*, 1920.)

Le centre O du cercle circonscrit au triangle B'AC' est le point de rencontre des perpendiculaires élevées aux droites AB' et AC' en leurs milieux : les triangles B'BA et C'CA étant isocèles, ces perpendiculaires sont en même temps médianes, hauteurs, et bissectrices des angles B'BA et C'CA. Elles sont donc respectivement les bissectrices *extérieures* des angles en B et en C du triangle ABC : leur point de rencontre appartient à la bissectrice *intérieure* du troisième angle BAC de ce triangle.

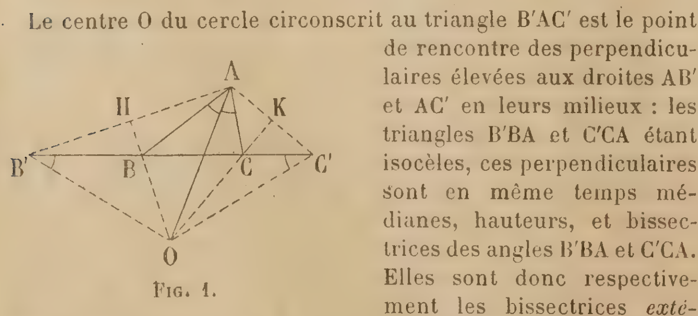


Fig. 1.

(Mlle A. LEVIFVE.)

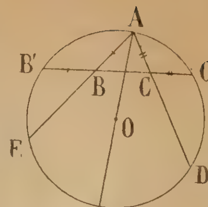


Fig. 2.

Deuxième solution. — Les lignes AB et AC, prolongées, coupent le cercle O en E et D (fig. 2). Puisque BA.BE = BB'.BC', l'égalité BA = BB' entraîne BE = BC'; de même, CA = CC' entraîne CD = CB'. Donc les trois cordes EA, B'C' et AD sont égales. Le point O, centre du cercle, est donc équidistant des trois cordes : il est par conséquent sur la bissectrice *intérieure* de l'angle EAD, car deux cordes égales, menées par A, sont symétriques par rapport au diamètre AO.

(Henri CAZES, à Saint-Girons.)

Troisième solution. — Les triangles OBB' et OBA (fig. 1) sont égaux, comme ayant leurs côtés deux à deux égaux; ils sont par suite symétriques par rapport à OB et les angles OB'B et OAB sont égaux. De même les angles OC'C et OAC sont égaux. Or le triangle B'OC' est isocèle, les angles OB'C' et OC'B' sont égaux; il en est donc de même de BAO et de CAO.

(G. DÉMARET, à Montreuil-sur-Mer.)

[Bonnes solutions de Mlles S. David; A. Longuet: de MM. Ch. Andrei; Ayasse; A. Bal; F. Baujard; A. Bernadac; G. Bertrand; M. Boulvert; J. Briquet; M. Brunet; G. Bruniquel; R. Chasselut; M. Chatelier; J. Condamin; E. Delmas; F. Dupire; M. Descotte; H. Fortin; A. F., à Saint-Pons; M. Forcade; J. Goudin; L. Goyard; J. Grall; M. Guédès; E. Guicheney; Herbiet; Huon-Leroux; A. Lamure; M. Lascoux; L. Lebourre; Lhôtelier; P. Louon; H. Lotard; Luce-Catinot; M. M. B.; Magdinier; J. Mauhin; J. Millour; H. Mutel; C. Noirbent; L. G. Papon; J. Périn; R. Petit; G. Pichon; G. Reynard; L. Soulier; J. Tarnus; G. Vergnon; M. Vialle.]

SOLUTIONS D'EXERCICES

4050. — *Discuter les signes des racines de l'équation*

$$x^2 + 2(2m - 1)x + 3m^2 + 5 = 0.$$

Le dernier terme est toujours positif, ainsi que le coefficient du carré de l'inconnue.

Donc quand cette équation a des racines, elles ont le même signe, qui est celui de leur demi-somme, $1 - 2m$.

Il y a des racines si

$$(2m - 1)^2 - 3m^2 - 5 > 0,$$

ou

$$m^2 - 4m - 4 > 0,$$

ou

$$(m - 2)^2 - 8 \geqslant 0.$$

Donc si $m > 2 + 2\sqrt{2}$, il y a deux racines négatives;

si $m < 2 - 2\sqrt{2}$, il y a deux racines positives;

si $2(1 - \sqrt{2}) < m < 2(1 + \sqrt{2})$, il n'y a pas de racines;

si $m = 2(1 + \sqrt{2})$, il y a une racine double, $x = -3 - 4\sqrt{2}$;

si $m = 2(1 - \sqrt{2})$, il y a une racine double, $x = -3 + 4\sqrt{2}$.

4053. — *Résoudre les deux systèmes :*

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = b^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = a, \\ x^2 + 4y^2 = b^2. \end{cases}$$

Pour résoudre le premier système, nous calculerons la différence $x - y$ en nous servant de l'identité

$$(x - y)^2 = 2(x^2 + y^2) - (x + y)^2,$$

qui donne, en remplaçant $x + y$ et $x^2 + y^2$ par les valeurs connues,

$$(x - y)^2 = 2b^2 - a^2;$$

si la différence $2b^2 - a^2$ est positive, le système (1) a donc les solutions du système du premier degré

$$x + y = a, \qquad x - y = \pm\sqrt{2b^2 - a^2},$$

ce qui donne

$$x = \frac{1}{2}(a + \sqrt{2b^2 - a^2}) \qquad \text{avec} \qquad y = \frac{1}{2}(a - \sqrt{2b^2 - a^2});$$

on obtient une seconde solution en permutant les valeurs de x et de y de la première.

Il est clair que le second système proposé se déduit du premier en remplaçant y par $2y$; il a donc les solutions suivantes :

$$(1)\begin{cases} x = \frac{1}{2}(a + \sqrt{2b^2 - a^2}), \\ y = \frac{1}{4}(a - \sqrt{2b^2 - a^2}); \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x = \frac{1}{2}(a - \sqrt{2b^2 - a^2}), \\ y = \frac{1}{4}(a + \sqrt{2b^2 - a^2}). \end{cases}$$

EXAMENS ET CONCOURS DE 1920 (*Suite*).

ÉCOLES NATIONALES D'ARTS ET MÉTIERS
EXAMENS ORAUX (*).

Arithmétique et Algèbre.

1. — Théorie de la racine carrée d'un nombre fractionnaire à une unité près par défaut.

2. — [**4094** (**)]. Décomposer en un produit de facteurs l'expression

$$(b^2 - c^2)a^3 + (c^2 - a^2)b^3 + (a^2 - b^2)c^3.$$

3. — Rendre rationnel le dénominateur de l'expression

$$\frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

---

4. — Prouver que $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6. A quelles conditions ce produit serait-il divisible par 42?

5. Déterminer m pour que

$$x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$$

soit divisible par $x + y + z$.

6. — Calculer à la règle un nombre x de la forme $\frac{a^2b}{c}$.

Application : $x = \frac{0,517^2 \times 28}{1,415}$.

---

7. — Le nombre a étant donné, trouver les valeurs de b telles que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 \leqslant \frac{a}{b} < \left(\frac{a+1}{b}\right)^2.$$

8. — [**4095**]. a, b, c étant en progression arithmétique, vérifier qu'il en est de même pour $a^2 + ab + b^2$, $b^2 + bc + c^2$, $c^2 + ca + a^2$. Trouver le rapport des deux raisons.

9. — [**4096**]. Résoudre l'équation

$$(x^4 + x^2 + 1)^2 - 38(x^4 + x^2 + 1) + 105 = 0.$$

---

10. — Trouver un nombre tel qu'en le divisant successivement par 6, 8, 9, on obtienne pour restes 5, 7, 8.

11. — Calculer les deux côtés d'un triangle connaissant leur somme, le troisième côté et le rayon du cercle circonscrit.

12. — Expliquer le calcul à la règle d'un nombre x de la forme $\sqrt{\frac{a^3}{bc}}$. *Application* :

$$x = \sqrt{\frac{5,18^3}{71,2 \times 0,00019}}.$$

---

13. — Quels sont les nombres premiers inférieurs à 1 000 et premiers avec 1 000?

14. — Calculer les côtés d'un triangle rectangle connaissant le périmètre et la hauteur. Discussion.

15. — *Calcul à la règle.* — Sachant que $2^m,48$ d'étoffe valent $15^f,60$, combien valent $6^m,35$ de la même étoffe?

---

16. — Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur plus grand commun diviseur. Conditions pour que le problème soit possible.

Application : S = 192, D = 12.

17. — Former l'équation du second degré à coefficients commensurables dont l'une des racines est $2 - \sqrt{3}$. Même question, la racine donnée étant $\frac{5}{3 - \sqrt{2}}$.

18. — *Calcul à la règle* : $x = 7,35 \times 0,48 \times 6,65$.

---

19. — Tout multiple commun à deux nombres est multiple de leur p. p. c. m. — Réciproque.

20. — Variations de la fonction $2x^2 - 8x + 1$ et représentation graphique.

21. — Calculer à la règle, et en utilisant les logarithmes, $\sqrt[3]{517,5}$.

---

22. — Quotient de $\frac{41624,189}{52,6}$ à $\frac{3}{7}$ près par défaut.

23. — [**4097**]. Résoudre l'équation

$$(x+2)^2 + 2(x+2)\sqrt{x} - 3\sqrt{x} = 46 + 2x,$$

en utilisant une inconnue auxiliaire.

24. — Étant donnée l'équation du second degré en z :

$$z^2 - 2xz + y = 0,$$

dans laquelle x et y sont les coordonnées d'un point, trouver la ligne lieu géométrique du point tel que les racines de l'équation en z soient égales.

---

25. — Trouver les multiples de 252, 120, 420, compris entre 100 000 et 200 000.

26. — Résoudre le système

$$x + y + z = 1,$$
$$ax + by + cz = d,$$
$$a^2x + b^2y + c^2z = d^2.$$

27. — Recherche du logarithme d'un nombre au moyen de la règle à calculs. *Application* : log 0,000367.

(*A suivre.*)

(*) Les questions posées à un même candidat sont comprises entre deux traits.

(**) Ce second numérotage ne porte que sur les questions dont nous avons l'intention de donner ici une solution. Ces questions seront résolues comme exercices; les abonnés ne devront pas en envoyer de solution.

ÉCOLES NATIONALES D'ARTS ET MÉTIERS
EXAMENS ÉCRITS

Arithmétique et algèbre.

I. — **4098.** n étant un nombre entier, prouver que le nombre entier

$$N = n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)$$

est toujours divisible par 30.

II. — **4099.** Calculer les quatre côtés d'un trapèze isocèle convexe, connaissant le rayon R du cercle circonscrit, le périmètre $2p$, et sachant en outre que les côtés non parallèles sont perpendiculaires aux diagonales. Discussion. En particulier, construire géométriquement le côté autre que les bases dans le cas où $p = R(\sqrt{2} + 1)$.

Trouver le minimum et le maximum du périmètre.

III. — Calcul logarithmique. **4100.** Les trois côtés d'un triangle sont

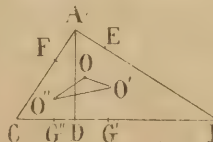
$$a = 678^m,23; \quad b = 542^m,51; \quad c = 448^m,46.$$

Calculer les rayons R et r des cercles circonscrit et inscrit.

Géométrie.

I. — **4101.** 1° Démontrer que le rapport des rayons des cercles inscrits dans deux triangles semblables est égal au rapport de similitude.

2° On considère les trois cercles O, O′, O″ inscrits dans un triangle rectangle ABC et dans ceux déterminés par la hauteur AD relative à l'hypoténuse. Soient E, F les points de contact du premier avec les deux côtés de l'angle droit AB, AC; G′, G″ les points de contact des deux autres avec l'hypoténuse BC. Démontrer que les quatre points A, C, E, G′ sont sur une même circonférence, ainsi que les quatre points A, B, F, G″.

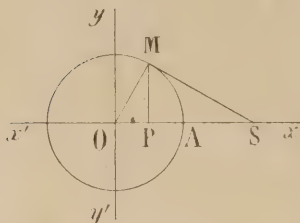


3° Prouver que les rayons O'G', O''G'' des cercles O' et O'', passent par les points E, F, si on les prolonge au delà des centres.

4° Trouver le centre du cercle circonscrit au triangle OO'O''.

II. — **4102.** Soient $x'Ox$, $y'Oy$ deux droites rectangulaires se coupant au centre O d'un cercle de rayon R. — M étant un point de la circonférence, on mène la tangente en M, laquelle coupe $x'x$ au point S, ainsi que le rayon OM, et la perpendiculaire MP sur $x'x$. Soit enfin A celui des points de la circonférence situés sur $x'x$ qui se trouve entre O et S.

1° En supposant que le point M soit tel que le secteur circulaire OAM et le triangle mixtiligne AMS soient équivalents, trouver la relation qui existe alors entre les longueurs de l'arc AM et du segment de droite MS.



2° Déterminer la position du point M pour laquelle les volumes engendrés par le secteur OAM et le triangle mixtiligne AMS, en tournant autour de $x'x$, sont équivalents.

3° Déterminer la position du point M pour laquelle les volumes engendrés par le même secteur et le même triangle mixtiligne, en tournant autour de $y'y$ sont équivalents.

Physique et Chimie.

PHYSIQUE.

4103. — 1. Une machine pneumatique à piston A est en relation avec un ballon B, sur lequel est branché un manomètre à air libre, à mercure, C.

Le piston D, de surface s, est au point le plus bas de sa course. Entre lui et le fond du cylindre existe un espace nuisible, de volume u, rempli d'air à la pression atmosphérique.

Le ballon B contient de l'air, qui, à la température de l'opération, occupe un volume V sous une pression H'.

Le piston est levé d'une hauteur z, puis ramené à sa position initiale; on recommence l'opération, en arrêtant toutefois le piston au même point haut de la course précédente.

Expression de la pression finale de l'air du ballon après ces deux levées du piston.

Les volumes a et b compris entre le ballon et la pompe, et entre le ballon et le mercure sont négligés.

Application : $V = 2^{dm^3}$; $u = 5^{cm^3}$; $s = 30^{cm^2}$; $z = 20^{cm}$; $H' = 900^{mm}$ de Hg.; pression atmosphérique, $H = 760^{mm}$ de Hg.; densité du mercure, 13,596; $g = 9{,}81$ m.

a) Expression de la pression finale : 1° en mm. de Hg.; 2° en unités du système M. T. S.

b) Expression, en unités M. T. S., de la force nécessaire pour maintenir le piston au haut de sa course, après la seconde levée, le poids de ce piston et le frottement étant négligés.

c) Figures, avec différences de niveaux cotées, du manomètre, au début et à la fin de la manœuvre.

2. Les robinets r_1 et r_2 du ballon précédent sont ensuite fermés.

A quelle température faut-il porter le ballon ainsi isolé pour que le gaz reprenne la pression initiale H'?

Température pour laquelle $V = 2^{dm^3}$, $t = 20°$.

Coefficient de dilatation de l'enveloppe, $\frac{1}{38\,700}$.

Coefficients de dilatation et de variation de pression de l'air, $\frac{1}{273}$.

CHIMIE.

I. — Propriétés chimiques de l'acide sulfurique.

II. — **4104.** On chauffe dans un ballon 10^g d'un alliage d'argent et de cuivre, avec un excès d'acide sulfurique concentré. Le gaz qui se dégage est recueilli dans une dissolution de soude en excès. Lorsque l'expérience est terminée, on constate que le vase qui contient la soude a subi une augmentation de masse de $4^g{,}3$.

Calculer la composition de l'alliage.

On donne S = 32; O = 16; Ag = 108, et, pour simplifier les calculs, Cu = 64.

QUESTIONS PROPOSÉES

4105. — Trouver un nombre entier qui n'admet que les facteurs premiers 2, 3 et 5, sachant que la somme de tous ses diviseurs y compris 1 et le nombre lui-même est 168. Calculer la somme des inverses de ces diviseurs. (L'Hôtelier, à Évreux.)

4106. — Une personne dispose, le 16 mars 1920, d'une certaine somme. Cette somme est la plus petite qui lui permette d'acquérir, sans reste, soit un nombre entier de « Bons de la Défense nationale » de $1\,000^f$ à un an, soit un nombre exact de dizaines de francs de rentes 5 % amortissables.

1° Quelle est cette somme?

2° De quel revenu pourra chaque année disposer cette personne sans toucher à son capital :

a) Si elle achète des Bons de la Défense et renouvelle son achat tous les ans;

b) Si elle achète de la rente?

3° Quel sera le taux réel du placement si, la personne ayant acheté de la rente, son capital lui est remboursé à raison de 150^f pour 100^f le 16 mars 1950?

N. B. On rappelle :

1° Qu'un bon de la Défense de $1\,000^f$ à un an coûte 950^f;

2° Que l'emprunt 5 % 1920 a été émis au pair;

3° Qu'il est logique d'ajouter au taux de 5 % le taux d'intérêts composés qui permet à un capital de s'augmenter de 50 % pendant le temps où ce capital reste placé.

(*B. S., Poitiers, aspirants, mars* 1920.)

4107. — Résoudre l'équation

$$\sqrt[3]{x+49} - \sqrt[3]{x-49} = 2.$$

4108. — Un abat-jour en papier a la forme d'un tronc de cône : la petite ouverture a 5^{cm} de diamètre et la grande 30^{cm}; la génératrice du tronc est 18^{cm}.

On demande de calculer :

1° La surface latérale de cet abat-jour;

2° Sa hauteur;

3° Les rayons des arcs qu'il a fallu décrire sur le papier pour le découper;

4° L'angle du secteur de développement du cône total.

(*B. S., Caen, aspirants, mars* 1920.)

4109. — On donne une sphère de centre O et de rayon R, et un grand cercle de diamètre AB de cette sphère; ce cercle est la base d'un cône droit dont la hauteur SO est égale au côté du carré inscrit dans un grand cercle de la sphère.

1° Déterminer la hauteur et l'apothème de ce cône en fonction du rayon R.

2° Calculer sa surface totale et son volume.

3° A quelle distance de son sommet faut-il mener une parallèle à sa base pour réduire la surface latérale de 1/5?

4° La surface latérale du cône SAB coupe la surface de la sphère suivant un cercle de diamètre CD. Calculer le volume du tronc de cône déterminé dans le cône SAB par le cercle de diamètre CD.

(*B. S., Aix, aspirants, mars* 1920.)

4110. — Sur une circonférence O de rayon R, on marque deux points A et B. Deux circonférences ω et ω', de rayons r et r', sont tangentes à O en A et B respectivement. Calculer la longueur de la tangente commune extérieure aux circonférences ω et ω', en fonction de R, r, r' et $AB = d$. (V. Thébault, à Ernée.)

4111. — Aux sommets A, B, C, D d'un quadrilatère inscrit dans une circonférence O, on trace quatre circonférences tangentes à O : O_1, O_2, O_3, O_4. Soient α, β, γ, δ, λ, ε les longueurs des tangentes communes extérieures à O_1 et O_2, O_2 et O_3, O_3 et O_4, O_4 et O_1, O_1 et O_3, O_2 et O_4, respectivement. Démontrer que

$$\alpha\gamma + \beta\delta = \lambda\varepsilon.$$

(V. Thébault, à Ernée.)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie Paul BRODARD.

23e Année. 15 Octobre 1920. N° 2.

L'Éducation Mathématique

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

PRIX DU NUMÉRO : France et Colonies, 0 fr. 60. Étranger, 0 fr. 70.
ABONNEMENT ANNUEL : France et Colonies, 10 fr. Étranger, 12 fr.

Tous les abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, l'on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction : Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Abonnements : Librairie **Vuibert**, Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

L'INVERSION (*Suite.*)

Figure inverse d'un cercle. — 1er cas : *le cercle passe par le pôle* O. On a démontré que la figure inverse d'une droite Δ qui ne passe pas par O est un cercle, dont le diamètre est OK' (K' étant l'inverse de la projection de O sur Δ). Puisque la transformation est réciproque, l'inverse de ce cercle (les éléments de transformation étant les mêmes) est la droite Δ.

La figure inverse d'un cercle (C), *de centre* ω, *qui passe par le pôle* O, *est donc une droite* Δ, *perpendiculaire à* $O\omega$. *Le point* ω *a pour inverse le symétrique* ω' *de* O *par rapport à* Δ.

2e cas. — *Le cercle ne passe pas par* O.

Théorème. — *La figure inverse d'un cercle* (C) *qui ne passe pas en* O *est un autre cercle* (C'); *le point* O *est un centre de similitude des cercles* (C) *et* (C').

On peut donner de ce théorème des démonstrations assez différentes comme principe, dont la comparaison est instructive.

a) Première démonstration. — Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

Les figures inverses d'une figure F, *faites avec un même pôle, mais avec des puissances différentes* λ *et* μ, *sont des figures homothétiques; le rapport d'homothétie est* $\frac{\lambda}{\mu}$.

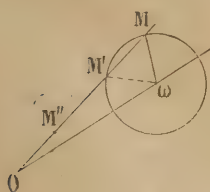
En effet, si M a pour inverses M' et M'', les points M, M', M'' sont sur la droite OM, et l'on a

$$OM.OM' = \lambda,$$
$$OM.OM'' = \mu,$$

donc

$$\frac{OM'}{OM''} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Considérons maintenant le cercle (C), qu'une droite menée par O coupe en deux points M et M'; on sait que le produit $OM \times OM'$ est constant (c'est-à-dire indépendant de la direction de la sécante); on l'appelle puissance de O par rapport au cercle; soit λ sa valeur.



On a donc $OM \times OM' = \lambda$, et si l'on transforme M avec une autre puissance μ,

$$OM \times OM'' = \mu,$$

donc

$$\frac{OM'}{OM''} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Le point M'' décrit donc la figure homothétique de celle que décrit M', la raison étant $\frac{\mu}{\lambda}$, le pôle O.

Remarque I. — Si de O on peut mener des tangentes au cercle (C), les mêmes droites sont tangentes au cercle (C').

Remarque II. — Il résulte de ce qui précède que le choix du pôle d'inversion a un grand intérêt; car la figure transformée d'une figure donnée F peut avoir des propriétés différentes, suivant la position du pôle par rapport à F (c'est ainsi que la figure inverse d'un cercle peut être une droite ou un cercle). Au contraire, le choix de la puissance importe peu; le changement de la puissance remplace une figure par une figure homothétique.

Deuxième démonstration. — Le cercle (C) de centre ω est le lieu d'un point M, tel que $M\omega$ soit une longueur constante.

(C) M M' O ω' ω

Si M' et ω' sont les inverses de M et de ω, on a vu que les triangles $O\omega M$ et $OM'\omega'$ sont semblables, donc

$$\frac{\omega O}{\omega M} = \frac{M'O}{M'\omega'}.$$

Le lieu de M' est donc celui d'un point dont le rapport des distances à deux points fixes, O et ω', est égal à un nombre constant $\frac{\omega O}{\omega M} = \frac{d}{R}$, en posant $O\omega = d$.

On sait que ce lieu est un cercle, dont le centre ω'_1 est tel que

$$\frac{\omega'_1 O}{\omega'_1 M} = \frac{d^2}{R^2}$$

et dont le rayon est $R' = \sqrt{\omega'_1 O \times \omega'_1 M}$. (*)

Remarque. — Si l'on ne suppose pas ce résultat connu, la démonstration précédente montre que le lieu d'un point M' dont les distances à deux points fixes, O et ω', ont un rapport constant $\frac{d}{R}$, est un cercle.

Car prenant sur $O\omega'$ un point ω tel que $O\omega = d$ et transformant par inversion avec la puissance $\lambda = O\omega . O\omega'$, M' a pour inverse M, et

$$\frac{\omega' M'}{M'O} = \frac{\omega M}{\omega O};$$

par hypothèse $\frac{\omega' M'}{OM'} = \frac{R}{d}$, donc

$$\frac{\omega M}{d} = \frac{R}{d}.$$

Le point M décrit un cercle dont le centre est ω et le rayon R; M' décrit la figure inverse, qui est un cercle.

Théorème. — *Des cercles appartenant à un faisceau de cercles qui ont même axe radical se changent en des cercles appartenant aussi à un même faisceau.*

(*) Voir la note du n° du 15 juin 1919.

Toutefois, il existe un cercle de chaque faisceau qui se change en une droite (c'est celui qui passe par le pôle).

Le théorème est évident, lorsque le faisceau se compose de cercles passant par deux points A et B, car les cercles inverses passent par A' et B', inverses de A et de B.

La droite AB a pour inverse le cercle OA'B', et le cercle OAB a pour inverse la droite A'B'.

Mais cette évidence n'existe plus quand les cercles donnés forment un faisceau qui ne rencontre pas l'axe radical.

On sait qu'il existe alors deux cercles du faisceau qui se réduisent à des points E et F, symétriques par rapport à l'axe radical, et qu'on appelle les points limites ou cercles de rayon nul du faisceau. Un cercle quelconque du faisceau est le lieu d'un point M tel que $\frac{ME}{MF} = k$. En donnant à k toutes les valeurs, de 0 à l'infini, on obtient tous les cercles du faisceau : pour $k = 0$, on a celui qui se réduit au point E, pour $k = \infty$, celui qui se réduit à F, exceptionnellement, pour $k = 1$, une droite, qui est l'axe radical. Pour $k < 1$, on obtient des cercles entourant E; pour $k > 1$, des cercles entourant F.

En transformant par inversion, E, F et M ont pour inverses E', F', M', et l'on a

$$\frac{ME}{MO} = \frac{E'M'}{E'O} \quad \text{et} \quad \frac{MF}{MO} = \frac{F'M'}{F'O};$$

en divisant membre à membre,

$$\frac{ME}{MF} = k = \frac{M'E'}{M'F'} \cdot \frac{OE'}{OF'},$$

donc

$$\frac{M'E'}{M'F'} = k \cdot \frac{OE'}{OF'}.$$

Le lieu du point M' est aussi un cercle, faisant partie du faisceau dont les points limites sont E' et F'; si l'on donne à k la valeur $\frac{OF'}{OE'}$, le lieu de M' est une droite, qui est l'axe radical du faisceau transformé.

Remarque. — Ce qui précède est une nouvelle démonstration, plus générale que la précédente, de la transformation d'un cercle en un autre cercle, car cette démonstration prouve que le lieu d'un point tel que $\frac{ME}{MF} = C^{te}$ est une courbe de même nature, définie de la même façon au moyen des points E' et F' inverses de E et de F, la valeur de la constante seule ayant changé.

On dit que deux points E et F sont conjugués par rapport à un cercle, si le rapport des distances d'un point quelconque du cercle à ces deux points est une constante, $\frac{ME}{MF} = k$.

Deux points conjugués sont sur un diamètre; si ω est le centre du cercle, R son rayon, on a $\omega E . \omega F = R^2$, et la valeur de la constante k est $\sqrt{\frac{\omega E}{\omega F}}$.

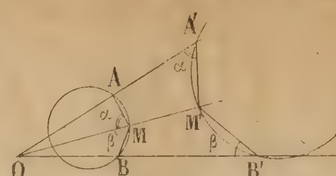
Ce qui précède montre que lorsqu'on transforme un cercle (C) par inversion en un cercle (C'), deux points E et F, conjugués par rapport à (C), ont pour transformés E' et F' conjugués par rapport à C'. Par conséquent, les points limites d'un faisceau de cercles ont pour inverses les points limites du faisceau des cercles transformés.

Le conjugué du centre ω est à l'infini : l'inverse de ce conjugué est donc le pôle lui-même, et par suite :

L'inverse ω' du centre ω de (C) est le conjugué de O par rapport à C'.

Examinons le cas où les cercles du faisceau passent par deux points fixes A et B, dont les inverses sont A' et B'.

Les angles OMA et OA'M' sont égaux, soit α leur valeur; les angles OMB et OB'M' sont aussi égaux, soit β leur valeur.



L'angle AMB $= \alpha + \beta$, et, en considérant le quadrilatère A'OB'M', on voit que

$$A'OB' + \alpha + \beta + 2\pi - A'M'B' = 2\pi;$$

en ajoutant membre à membre ces deux égalités, on trouve

$$A'OB' + AMB = A'M'B';$$

cette égalité montre que si l'angle AMB est constant, l'angle A'M'B' l'est aussi.

Il reste enfin un système de cercles particulier à examiner : c'est celui qui est formé de cercles touchant une droite en un point. Ces cercles ayant un point commun et un seul se changent en cercles ayant aussi un point commun et un seul, donc en cercles tangents à une droite en ce point. Il résulte de ce qui précède qu'étant donnés deux cercles (C) et (T), on peut :

a) S'ils ont deux points communs A et B, les transformer en deux droites qui se coupent : il suffit de prendre le pôle en A, les cercles se changent en deux droites qui se coupent en B', inverse de B.

b) S'ils n'ont aucun point commun, les transformer en deux cercles *concentriques*; car dans ce cas il existe un couple de points E et F, conjugués par rapport aux deux cercles. En prenant l'un de ces points E pour pôle, les cercles se changent en cercles dont le centre est l'inverse F' de F.

c) S'ils se touchent, on peut les transformer en deux droites parallèles à la tangente commune, en prenant pour pôle le point de contact. *(A suivre.)*

ARITHMÉTIQUE

4014. — *Un banquier escompte le même jour deux billets, dont l'un est payable au bout de 60 jours et l'autre au bout de 90 jours. Il prélève une commission de 5 pour 1 000 en plus de l'escompte (en dehors) calculé à 6 %. La somme des valeurs nominales des billets est* 10 775f *et le banquier remet* 10 581f,35. *Dire quelle est la valeur nominale de chaque billet.*

(*B. S., Montpellier, aspirantes et aspirants,* 2e *session* 1919.)

La somme retenue par le banquier est la différence

$$10\,775 - 10\,581{,}35 = 193^{f},65.$$

De cette somme nous pouvons déduire d'abord la commission du banquier, qui est les 0,005 de la somme des valeurs nominales, soit $10\,775 \times 0{,}005 = 53{,}875$. La différence

$$193{,}65 - 53{,}875 = 139{,}775$$

représente la somme des escomptes en dehors. Or l'escompte en dehors, à 6 %, est de 0f,5 par mois, de 1f pour 60 jours. L'escompte sur les deux sommes pendant 60 jours est donc de 107,75. La différence, $139{,}775 - 107{,}75 = 32^{f},025$, représente alors l'escompte de la seconde somme pendant 30 jours, c'est-à-dire $\frac{1}{200}$ de cette somme.

La seconde somme est donc $200 \times 32{,}025 = 6\,405^{f}$; l'autre est $10\,775 - 6\,405 = 4\,370$.

(Renaud RAYMOND, école primaire supérieure de Decize, Nièvre.)

[Bonnes solutions de Mlles Bocquet; Calmon; de MM. A. Authier; Béquain; M. Boulvert; G. Bonname; Bouzid; J. Briquet; G. Bruniquel; Charrière; Chasselut; G. Colle; C. Crépeau; G. Démaret; Demilles; A. Diximier; F. Dupire; R. Fiori; L. Fline; M. Gros; Huon-Leroux; P. Jeanson; R. Laforest; H. Le Lan; Lhôtelier; P. Louon; N. Leroy; C. Noirbent; L.-G. Papon; E. Pinlong; M. Pommerolle; L. Soulier; M. Stevenard; A. Tribillon; A. Wehrung.]

4062. — *Trouver trois nombres de trois chiffres, $\overline{abc}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, sachant que leur somme s'écrit avec les quatre chiffres $\overline{accb}$.*

Les nombres sont supposés écrits dans le système de base 10; l'égalité indiquée par l'énoncé est donc

$$(100a + 10b + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) = 1\,000a + 110c + b$$

ou

$$111(a + b + c) = 1\,000a + 110c + b;$$

après simplification, cette égalité devient

$$889a = 110b + c;$$

le second membre est au plus égal à 999, qui correspond à $b = c = 9$. Donc a ne peut être supérieur à 1; d'ailleurs a n'est pas nul, puisqu'on demande des nombres de trois chiffres. Donc $a = 1$, et

$$110b + c = 889,$$

ou

$$c = 889 - 110b;$$

c est compris entre 0 et 10, il en résulte $b < 9$ et $b > 7$. Donc $b = 8$, ce qui donne $c = 9$.

Les trois nombres sont 189, 891, 918; l'addition donne bien

$$189 + 891 + 918 = 1\,998.$$

(Roger REYNARD, aspirant, 32e R. I.)

Autre solution. — Écrivons l'addition telle qu'elle doit avoir lieu

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ & b & c & a \\ & c & a & b \\ \hline a & c & c & b \end{array}$$

En considérant la colonne des unités, on voit qu'il faut que

$$c + a = \text{mult. } 10.$$

Mais $c + a \leq 18$, donc $c + a = 10$; la colonne des dizaines donne alors, en tenant compte de la retenue, qui est l'unité,

$$b + c + a + 1 = c + p.\,10$$

ou, en remplaçant $c + a$ par 10,

$$b + 1 = c + (p - 1)10;$$

or $b + 1$ est supérieur à 1 et au plus égal à 10, et c n'est pas nul, il faut donc que $p = 1$, d'où

$$c - b = 1.$$

La colonne des dizaines fournit une retenue d'une unité, celle des centaines donne alors

$$a + b + c + 1 = 10a + c$$

ou, puisque $a + c = 10$,

$$b + 11 = 9a + 10$$

ou

$$9a - b = 1.$$

Le système des équations

$$a + c = 10,$$
$$9a - b = 1,$$
$$c - b = 1$$

a pour solution les nombres entiers

$$a = 1, \qquad b = 8, \qquad c = 9;$$

les nombres demandés sont 189, 891, 918. (M. GROS.)

[Bonnes solutions de Mlles M. Calmon, à Saint-Céré, Lot; A. Lovifve; de MM. F. A. G., à Saint-Pons, Hérault; A. Bal; M. Beynieux, école primaire supérieure d'Excideuil; A. Blaise, école pratique d'Évreux; M. Châtelain, à la Montagne, Loire-Inférieure; A. Cieutat, au Havre; R. Combaz, à Moutiers, Savoie; J. Dougard, à Castres; F. Dupire, à Escaudain; P. Faucheur, 2e C, Prytanée de la Flèche; G. Fouché, lycée de Tours; J. Grall; Guende, à Apt; E. Guicheney, à Bône; Guillery, à Amiens; Lhôtelier, à Évreux; P. Louon; athénée d'Ixelles; M., à Guéret; F. Maitre, à Moutiers; R. Marrot, à Évreux; E. Masdupuy, école normale de Tulle; J. Mazeau, lycée de Montluçon; J. Millour, à la Forêt, Finistère; C. Papon, école primaire supérieure de Decize, R. Pauchaud; E. Renu, école pratique d'Évreux; R. Revaud, école primaire supérieure de Decize; R. Reynaud, aspirant au 32me R. I.; Tarnus, école primaire supérieure de Nancy; V. Vasilescu, lycée de Ploesti, Roumanie.]

4073. — *Calculer l'expression*

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{12} + \frac{1}{6}},$$

avec une erreur inférieure à $\frac{1}{1\,000}$.

Première solution. — On peut écrire

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{0,3333\ldots},$$

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{18}} = \sqrt{0,05555\ldots},$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{12} + \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{7}{108}} = \sqrt{0,06481481\ldots};$$

chacun des nombres décimaux qui est sous un radical est périodique.

On peut calculer la racine carrée de chacun d'eux avec autant de chiffres décimaux qu'on le voudra.

Si l'on calcule chaque racine avec quatre chiffres décimaux exacts, l'erreur commise en négligeant les suivants sera inférieure à 0,0001, et la somme de ces erreurs sera inférieure à 0,0003; en négligeant alors le quatrième chiffre et en forçant le troisième d'une unité si le quatrième chiffre est égal ou supérieur à 5, on commettra une nouvelle erreur inférieure à 0,0005. Dans le cas le plus défavorable, l'erreur commise sur le résultat sera donc inférieure à 0,0008, par suite à 0,001.

Voici le calcul

$\sqrt{0,33333333} = 0,5773$ à 0,0001 près, par défaut,
$\sqrt{0,05555555} = 0,2357$ — — ,
$\sqrt{0,06481481} = 0,2546$ à 0,0001 près, par excès.

L'expression $0,5773 + 0,2357 - 0,2546$ donne donc une valeur approchée, *par défaut*, qui diffère de la valeur exacte de moins de 0,0003.

Cette valeur est 0,5584;

si l'on ne conserve que trois chiffres, on a

0,558,

valeur approchée, qui est une valeur par défaut : car, d'après ce qui précède, la valeur de la somme considérée est comprise entre 0,5584 et 0,5587; le nombre 0,558 est donc approché par défaut : l'erreur qu'il comporte est inférieure à un millième, (et même à 0,0007).

Autre solution. — L'expression considérée peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{18}\sqrt{21};$$

l'erreur commise sur la somme sera certainement inférieure à un millième si l'erreur absolue commise sur chacun des termes de cette somme est en valeur absolue inférieure au tiers d'un millième.

Or on a

$$1,7321 > \sqrt{3} > 1,7320\ldots,$$

donc

$$0,5774 > \frac{\sqrt{3}}{3} > 0,5773,$$

puis

$$1,4143 > \sqrt{2} > 1,4142,$$

$$0,2358 > \frac{\sqrt{2}}{6} > 0,2357,$$

$$4,5826 > \sqrt{21} > 4,5825,$$

$$0,2546 > \frac{\sqrt{21}}{18} > 0,2545.$$

Le nombre demandé est donc :

supérieur à $0,5773 + 0,2357 - 0,2546 = 0,5584$,
inférieur à $0,5774 + 0,2358 - 0,2545 = 0,5587$.

La valeur 0,558 est donc approchée, par défaut, à moins d'un millième près.

Remarque. — Lorsqu'on demande la valeur d'un nombre à un millième près, il faut donner pour réponse une valeur de x avec *trois chiffres décimaux*; les valeurs de $\sqrt{3}$ à un millième près sont 1,732 ou 1,733. Il ne faut pas donner 1,73205, car, de deux choses l'une : ou les chiffres 05 sont exacts, dans ce cas la valeur donnée est plus approchée qu'on ne le demande, ou ils ne sont pas exacts, et dans ce cas il n'y a aucun intérêt à donner cinq chiffres décimaux si les derniers sont faux.

[Solutions exactes de MM. F. A. G., à Saint-Pons; A. Bal; J. Grall, à Landivisiau; A. Lhôtelier, à Évreux; P. Louon, athénée d'Ixelles; A. Wehrung à Paris.]

ALGÈBRE

4022. — *Un terrain rectangulaire, dont la largeur est les $\frac{7}{9}$ de la longueur, a une superficie supérieure de 84^a à celle d'un deuxième terrain dont la longueur surpasse la sienne de 60^m et dont la largeur est inférieure à la sienne également de 60^m.*

Le prix de l'are étant le même pour les deux terrains, calculer la différence de leurs valeurs sachant que le premier terrain est loué les $\frac{3}{88}$ de sa valeur et que ce prix de location est inférieur de $327^f,60$ au revenu d'un capital de même valeur que le terrain et placé à 4 %.

(*B. S., Bordeaux, aspirantes*, 2e *session* 1919.)

Les dimensions du premier terrain étant x et $\frac{7}{9}x$, celles du second sont $x+60$ et $\frac{7}{9}x-60$. La différence des surfaces est

$$\frac{7}{9}x^2-(x+60)\left(\frac{7}{9}x-60\right)=3\,600+\frac{120}{9}x;$$

l'énoncé donne cette différence : on a donc l'équation

$$3\,600+\frac{40}{3}x=8\,400,$$

ou

$$90+\frac{1}{3}x=210.$$

On en tire

$$x=360^m.$$

La superficie du premier terrain est

$$360\times 280=100\,800^{m^2},$$

soit $1\,008^a$; celle du second est

$$420\times 220=92\,400^{m^2},$$

soit 924^a (on vérifie que $924+84=1\,008$).

La fraction $\frac{3}{88}$ est inférieure à $\frac{4}{100}$; on a en effet

$$\frac{4}{100}-\frac{3}{88}=\frac{13}{2\,200}.$$

On en déduit que $2\,200^f$, placés à $\frac{4}{100}$, rapportent 13^f de plus que s'ils sont placés à 3 pour 88. Or 327,6, divisé par 13, donne pour quotient 25,2. La valeur du premier terrain est donc

$$2\,200\times 25,2=55\,440^f,$$

ce qui met l'are à

$$\frac{55\,440}{1\,008}=55^f$$

et 84^a à

$$\frac{55\,440}{1\,008}\times 84=4\,620^f.$$

(L'HOTELIER, à Évreux.)

[Bonnes solutions de Mlles Bocquet; Calmon; S. David; de MM. G. Barraud; P. Bauer; P. Bernard; G. Bertrand; Bouzid; G. Bruniquel; H. Chardon; Chatelier; G. Colle; A. Collet; A. Coton; C. Crépeau; G. Démaret; F. Dupire A. F., à Saint-Pons; P. Faucheux; M. Forcade; G. Fouché; Girardot; J. Grall; M. Gros; Herbiet; Huon-Leroux; G. Jugain; R. Laforest; G. Lévy; P. Louon; Luce-Catinot; F. Maitre; J. Mauchin; C. Noirbent; L.-G. Papon; G. Pichon; E. Pinlong; A. Ricoux; L. Soulier; M. Stévenard.]

4043. — *Vérifier que le système d'équations*

$$x^2-yz=a,\qquad y^2-zx=b,\qquad z^2-xy=c \tag{1}$$

admet une solution telle que

$$\frac{x}{a^2-bc}=\frac{y}{b^2-ac}=\frac{z}{c^2-ab}=k \tag{2}$$

et trouver la valeur de k.

Les égalités (2) fournissent pour x, y et z les valeurs

$$x=k(a^2-bc),\qquad y=k(b^2-ac),\qquad z=k(c^2-ab);$$

formons la quantité x^2-yz en remplaçant x, y et z par ces valeurs, nous trouvons

$$\begin{aligned} x^2-yz &= k^2[(a^2-bc)^2-(b^2-ac)(c^2-ab)] \\ &= k^2[a^4+ac^3+ab^3-3a^2bc] \\ &= k^2a(a^3+b^3+c^3-3abc). \end{aligned}$$

La symétrie du calcul, où a, b et c se permutent circulairement en même temps que x, y et z, montre que l'on trouverait

$$y^2-zx=k^2b(a^3+b^3+c^3-3abc)$$

et

$$z^2-xy=k^2c(a^3+b^3+c^3-3abc).$$

Pour que ces équations soient identiques aux équations (1), il faut et il suffit que le coefficient $k^2(a^3+b^3+c^3-3abc)$ soit égal à $+1$. Or on sait que l'on a identiquement

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].$$

La quantité entre crochets est positive en général, et nulle seulement dans le cas où $a=b=c$.

1° Supposons que a, b et c ne sont pas tous les trois égaux; si la somme $a+b+c$ est positive, il existe deux valeurs de k opposées, qui satisfont à la condition et, par conséquent, il existe deux solutions du système, en dehors de la solution $x=y=z=0$. Si $a+b+c<0$, la valeur de k n'existe pas.

2° Si $a+b+c=0$ ou si $a=b=c\neq 0$, on trouve pour k une valeur infinie; c'est l'indice d'une impossibilité.

3° Mais si $a=b=c=0$, le système d'équations est indéterminé : il admet toute solution où $x=y=z$, quelle que soit la valeur commune.

(F. BAUJARD, à Cléry, Côte-d'Or.)

N. B. — La solution précédente est une vérification; c'est d'ailleurs ce qui était demandé. On peut se proposer de résoudre le système des équations (1) et de trouver directement la forme des solutions.

Considérons le système

$x^2-yz=a,$	y	z	(1)
$y^2-zx=b,$	z	x	(2)
$z^2-xy=c,$	x	y	(3)

et ajoutons ces équations membre à membre, après avoir multiplié les deux termes de chaque équation par le multiplicateur inscrit dans la première colonne à droite. Nous trouvons que la somme des termes du troisième degré est identiquement nulle; il reste

$$0=ay+bz+cx. \tag{4}$$

Si nous multiplions les deux termes de chaque équation par le multiplicateur inscrit dans la deuxième colonne à droite, et si nous ajoutons membre à membre, nous trouvons de même

$$0=az+bx+cy. \tag{5}$$

Les équations (4) et (5) forment un système de deux équations du premier degré en x, y, z et *homogènes* : elles déterminent les rapports de deux des inconnues à la troisième, ou, en d'autres termes, des

quantités proportionnelles aux trois inconnues. Supposons $c^2 - ab \neq 0$, et résolvons par rapport à x et y le système :

$$\begin{array}{l} ay + cx = -bz \\ cy + bx = -az \end{array} \quad \begin{vmatrix} c \\ -a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -b \\ c \end{vmatrix}$$

on en tire

$$(c^2 - ab)x = (a^2 - bc)z,$$
$$(c^2 - ab)y = (b^2 - ac)z,$$

donc

$$\frac{z}{c^2 - ab} = \frac{y}{b^2 - ac} = \frac{x}{a^2 - bc} = k.$$

REMARQUE. — Il faut supposer qu'une au moins des trois quantités $c^2 - ab$, $b^2 - ac$, $a^2 - bc$ n'est pas nulle; nous allons voir que ces expressions ne peuvent être nulles toutes les trois que si $a = b = c$.

Car, de

$$a^2 - bc = 0, \qquad b^2 - ac = 0,$$

on tire, en faisant la différence,

$$(a - b)(a + b + c) = 0.$$

Si $a = b$, les deux expressions peuvent s'écrire

$$a(a - c) = 0,$$

et l'on a ou $\quad a = 0, \quad$ ou $\quad a = c.$

Mais si l'on choisit $a = b = 0$, avec $c \neq 0$, il en résulte que $c^2 - ab \neq 0$.

Si l'on choisit $a = c \neq 0$, on voit que l'égalité $a = b = c$ entraîne que $c^2 - ab$ est nul.

Il reste à examiner l'hypothèse $a + b + c = 0$; si l'on remplace c par $-(a + b)$ dans les deux expressions $a^2 - bc$ et $b^2 - ac$, elles deviennent l'une et l'autre $a^2 + ab + b^2$; cette quantité n'est pas nulle si a et b ne sont pas nuls l'un et l'autre.

Cette discussion montre que le système des équations (4) et (5) est vérifié, si a, b et c ne sont pas trois nombres égaux, par des valeurs de x, y et z respectivement proportionnelles à $a^2 - bc$, $b^2 - ac$, $c^2 - ab$. Il reste à trouver un coefficient de proportionnalité tel que

$$x^2 - yz = a;$$

on aura aussi

$$y^2 - zx = b,$$

donc

$$x^2 - y^2 - (y - x)z = a - b,$$

ou

$$(x - y)(x + y + z) = a - b;$$

en remplaçant x, y et z par $k(a^2 - bc)$, $k(b^2 - ac)$ et $k(c^2 - ab)$, cela donne

$$k^2(a^2 - bc - b^2 + ac)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a - b,$$

et, en divisant tout par $a - b$, qui est supposé différent de zéro,

$$k^2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 1.$$

C'est la valeur de k^2 trouvée précédemment.

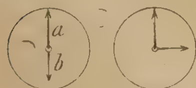
(J. BRIQUET, école Hanley, à Thiais.)

[Bonnes solutions de M[lle] Longuet; de MM. R. Bal; M. Boulvert, au Mans; V. Herbiet; Julou, à Guingamp; F. Lefèvre, à Guérigny; R. Luce-Catinot, à Valence; M., à Guéret; M. J. B. Millour, à la Forêt; G. Pichon, au Mans; R. Reynard, aspirant au 32[me] R. I.

Assez bonnes solutions de M[lle] A. Levifve; de MM. H. Arnaud, à la Chapelle-Neuve; G. Bruniquel, école normale de Toulouse; R. Chasselut, école primaire supérieure de Corbigny; E. Delmas, école primaire supérieure d'Aubenas; A. F., à Saint-Pons; H. Fortin, école normale de Chartres; J. Goudin, école pratique d'Agen.]

4055. — *Les pointes des aiguilles de l'horloge d'une gare sont distantes de* 90[cm] *à* 3[h] *et de* 126[cm] *à* 6[h]. *Quelles longueurs ont les deux aiguilles?*

Soient a et b les longueurs de la grande aiguille et de la petite. A 6[h], les deux aiguilles sont dans le prolongement l'une de l'autre, on a donc



$$a + b = 126;$$

à 3[h], elles forment un angle droit, donc

$$a^2 + b^2 = 90^2 = 8\,100.$$

Le problème est donc de trouver deux nombres, connaissant leur somme et celle de leurs carrés : il est résolu par l'identité

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2),$$

qui fait connaître la différence des deux nombres. On a dans le cas présent

$$(a - b)^2 = 2 \times 8\,100 - 15\,876 = 324 = \overline{18}^2;$$

des équations $a - b = 18$ et $a + b = 126$, on tire $a = 72$ et $b = 54$.

(M. ROBINEAU, école normale d'Angers.)

N. B. — Presque tous nos correspondants ont résolu d'une façon différente, et un peu moins simple : ils ont calculé le produit ab, par l'identité

$$2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2),$$

qui donne

$$ab = \frac{1}{2}[(126)^2 - 8\,100] = 3\,888;$$

a et b sont alors les deux racines de l'équation

$$X^2 - 126X + 3\,888 = 0.$$

[Bonnes solutions de MM. Arnaud; A. Bal; R. Baudet; F. Baujard; M. Beyneix; M. Boulvert; Bourchanin; G. Bruniquel; J. Chabaud; M. Chatelier; A. Cieutat; A. Collet; R. Combaz; E. Delmas; G. Démaret; Derupt; A. Doutau; R. Duclaux; F. Dupire; P. Fauchoux; M. Forcade; G. Fouché; J. Georges; Gilly; J. Goudin; J. Grall; M. Gros; E. Guicheney; Herbiet Lascoux; F. Lefèvre; Lhôtelier; P. Louon; H. Lotard; Lovick; M. M. B.; F. Maitre; Mazeau; J. Millour; H. Naudet; R. Panchaud; L.-G. Papon; G. Pichon; P. Renaud; R. Renaud; R. Reynard; J. Robert; Robini; Sinulterre; L. Soulier; Soulouniac; Tarnus; Théry; L. Velletaz; E. Vellinger; A. Wehrung.]

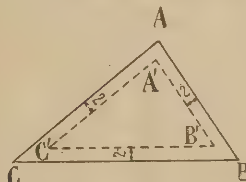
GÉOMÉTRIE

3991. — *Un terrain triangulaire a pour côtés* 175[m], 238[m], 273[m]. *On creuse, le long de chaque côté, et à l'intérieur, un fossé de* 2[m] *de largeur, dont la section droite est un rectangle de* 80[cm] *de profondeur. On répand la terre extraite du fossé sur toute la surface du triangle, en couche uniforme. On demande de calculer quelle sera l'épaisseur de la couche.*

On suppose que les terres extraites du fossé sont réparties sur la surface du triangle intérieur au fossé. Soit A'B'C' ce triangle, soient S et S' les surfaces, r et r' les rayons des cercles inscrits des triangles ABC et A'B'C'. On a par hypothèse $r - r' = 2^m$. Les deux triangles ABC et A'B'C', dont les côtés sont deux à deux parallèles, sont semblables; leur rapport de similitude est égal au carré de celui des rayons des cercles inscrits.

$$\frac{S}{S'} = \frac{r^2}{r'^2},$$

donc $S' = S\frac{r'^2}{r^2}$; la surface du fossé est $S - S' = S\left(1 - \frac{r'^2}{r^2}\right)$, le volume des terres enlevées est $(S - S') \times 0{,}80$. Réparties sur un triangle dont la surface est S', ces terres formeront une couche dont l'épaisseur x, sera telle que



$$xS' = (S - S')(0{,}8),$$

$$x = \frac{S - S'}{S'}(0{,}8) = \frac{r^2 - r'^2}{r'^2}(0{,}8).$$

Or on sait que si l'on pose $2p = a + b + c$, on a

$$r^2 = \frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p}.$$

Dans le cas traité, on a

$$a = 273, \qquad b = 238, \qquad c = 175,$$
$$2p = a + b + c = 686, \qquad p = 343,$$
$$p - a = 70, \qquad p - b = 105, \qquad p - c = 168,$$

$$r^2 = \frac{70 \times 105 \times 168}{343} = \frac{7.2.5.7.3.5.7.3.8}{7.7.7} = 2^4.3^2.5^2,$$

donc $\qquad r = 4.3.5 = 60$; $\qquad$ donc $\qquad r' = 58$,

$$x = (0{,}8) \times \frac{(r - r')(r + r')}{r^2} = (0{,}8) \times \frac{2 \times 118}{(58)^2} = 0^{\text{m}},056 \text{ à } 1^{\text{mm}} \text{ près.}$$

(G. MOUZON.)

N. B. — Dans la pratique, les terres sorties d'une fouille « foisonnent », c'est-à-dire qu'elles occupent un volume supérieur à celui de la fouille. Elles se tassent avec le temps.

Beaucoup de correspondants ont cru devoir calculer les surfaces S et S', ce dont on pouvait facilement se dispenser; certains d'entre eux ont été conduits à effectuer des calculs très considérables; bien peu en ont déduit un résultat exact.

[Bonnes solutions de MM. F. Baujard, à Cléry; L. Bienfait, école supérieure de Bohain; J. Boisgard, école Hanley; M. Boulvert; G. Bruniquel, école normale de Toulouse; M. Campagnet et L. Theurier, école normale de Bourges; J. Chabaud, à Saint-Denis; A. Collet, au Mans; C. Crépeau, à Sainte-Cécile; G. Démaret, à Montreuil-sur-mer; F. Dupire, à Escaudain; A. F., à Saint-Pons; Gilbert et Girardot, école normale de Dax; M. Gros; Guyadet, à Montreuil-sur-Mer; V. Herbiet; G. Heyriés; R. Pavy, collège Chaptal; Philizot; G. Pichon, au Mans; P. Pijaut, école primaire supérieure d'Aiguillon; R. Renaud, école primaire supérieure de Decize; L. Soulier, à Sioniac; M. Stévenard, à Auchel; J. Terracher, école supérieure de Chasseneuil.]

4029. — *Une fenêtre ogivale est formée d'une partie rectangulaire* ABCD *et d'une partie curviligne* DEC *obtenue en décrivant des arcs de cercle* DE, CE *des points* C *et* D *comme centres avec le même rayon* CD.

Sachant que le rapport de la hauteur EH *de la partie curviligne à la hauteur* HL *de la partie rectangulaire est égal à* $\frac{\sqrt{3}}{3}$, *on demande de calculer l'aire de cette fenêtre en désignant par* a *la longueur* AB. *Application :* $a = 0^{\text{m}},80$.

(*B. S., Bordeaux, aspirants,* 2e *session* 1919.)

Soit a la longueur DC; l'aire du triangle curviligne DEC peut être calculée en faisant la somme des secteurs circulaires égaux EDC, ECD, dont l'angle au centre est de 60°, puis en retranchant de cette somme l'aire du triangle DEC (qui sans cela serait comptée deux fois); ce qui donne

$$\frac{2}{6}\pi a^2 - a^2\frac{\sqrt{3}}{4} = a^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

L'aire du rectangle ABCD est mesurée par le produit ab; si $\text{EH} = \frac{\sqrt{3}}{3}\text{HL}$, il en résulte que

$$\frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}b, \quad \text{ou} \quad 2b = 3a, \quad \text{et} \quad ab = \frac{3}{2}a^2.$$

L'aire de la fenêtre est donc

$$a^2\left(\frac{3}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = a^2\ 2{,}1142.$$

En substituant dans cette formule la valeur 0,80 pour a, il vient

$$\text{S} = 1^{\text{m}^2},3531.$$

(M. STÉVENARD, à Auchel, Pas-de-Calais.)

[Bonnes solutions de MM. Bodin, collège Chaptal; G. Cellier, à Granville; M. Chatelier, la Montagne; F. Dupire, à Escaudain; A. F., à Saint-Pons; F. Forcade, château d'Arance; M. Gros; E. Guicheney, à Constantine; Lhôtelier, à Évreux; Magdinier, à Saint-Quentin; C. Noirbent, école supérieure de Calais; L.-G. Papon, à Decize.]

4038. — *Soit un trapèze isocèle dans lequel l'angle* A *est de* 60°; *on connaît les deux bases* $\text{AD} = a$, $\text{BC} = b$ $(a > b)$. *On propose de calculer :*

1° *Les côtés égaux* AB, DC;

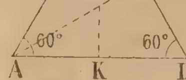
2° *La hauteur et la surface du trapèze;*

3° *Les diagonales égales* AC, DB;

4° *Ce que deviennent les résultats en supposant* $a = 2b$; *montrer qu'alors le triangle* ACD *est rectangle.*

(*B. S., Paris, aspirants,* 2e *session* 1919.)

Prolongeons les côtés non parallèles AB et CD jusqu'à leur point de rencontre S; les triangles ASD et BSC sont équilatéraux, puisqu'ils sont isocèles et ont à la base des angles de 60°. On a donc $\text{SB} = b$ et $\text{SA} = a$, d'où $\text{BA} = a - b$. La hauteur du trapèze est $\frac{1}{2}(a - b)\sqrt{3}$, sa surface



$$\frac{1}{2}(a + b) \times \frac{1}{2}(a - b)\sqrt{3} = (a^2 - b^2)\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Le point C se projette sur SB au milieu H de SB; on calcule le carré de AC, troisième côté du triangle ASC, par la formule

$$\overline{\text{AC}}^2 = \overline{\text{AS}}^2 + \overline{\text{SC}}^2 - 2\text{SH} \times \text{SA} = a^2 + b^2 - ab.$$

Si $a = 2b$, le point C est le milieu de SD, la ligne AC est donc une médiane du triangle équilatéral SAD; c'est en même temps une hauteur, le triangle ACD est rectangle en C : la formule qui donne le carré de AC devient alors

$$\overline{\text{AC}}^2 = a^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{3}{4}a^2,$$

d'où

$$\text{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \text{SK}.$$

La figure ABCD est alors la moitié d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle dont le diamètre est AD.

(Solution analogue : ANDRÉ BERRY, école normale de Bouzaréa, Alger.)

N. B. — Les solutions signalées comme bonnes sont correctes, mais beaucoup sont véritablement d'une longueur qui n'est pas en rapport avec la simplicité de la question. Les calculs dépassent les limites raisonnables; il suffisait de quelques mots pour montrer que si $a = 2b$ le triangle ACD est rectangle. Dans certaines copies, la preuve en est donnée au moyen d'un calcul de vérification qui tient plusieurs lignes.

[Bonnes solutions de Mlles Bocquet; Calmon; S. David; de MM. Alamasset; A. Arnaud; Beaufils; A. Bernadac; M. Beyneix; M. Boulvert; J. Briquet; M. Brunet; G. Bruniquel; A. Cabarat; S. Castelbou; H. Cazes; M. Chatelier; G. Colle; A. Collet; J. Condamin; A. Coton; L. Cousinot; E. Delmas; G. Démaret; M. Descotte; R. Destobere; De Wooght; A. Doutau; M. Duclay; J. Dugas; F. Dupire; M. Erb; A. F., à Saint-Pons; C. F., à Angers; P. Faucheux; M. Forcade; L. Gimbert; P. Giraud; L. Goyard; J. Grall; M. Guédès; E. Guicheney; V. Herbiet; Huon-Leroux; Kerleroux; Lamendin; Lasellerie; H. Le Lan; L. Leroy; Lhôtelier; G. Loock; P. Louon; Luce-Catinot; A. Mabillot; Magdinier; Magnani; J. Mauhin; H. Micard; P. Michel; A. Moreau; H. Naudet; C. Noirbent; P. Papadopoulos; L.-G. Papon; G. Pichon; H. Piquet; J. Riedel; M. Robineau; L. Soulier; M. Stévenard; J. Tarnus; J. Terracher; R. Terracher; J. Vassail; G. Vergnon; Vialle; E. Vellinger.]

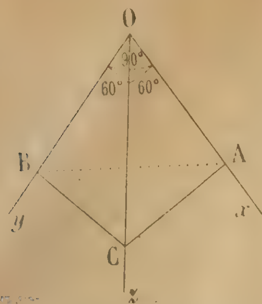
SOLUTIONS D'EXERCICES

4049. — *On donne un trièdre* O(xyz), *dans lequel on a l'angle*

$$\widehat{\text{BOA}} = 90°, \qquad \widehat{\text{COA}} = 60°, \qquad \widehat{\text{BOC}} = 60°.$$

On porte sur Oz *la longueur* $\text{OC} = c$, *sur* Ox *et* Oy *deux longueurs* OA *et* OB *égales au plus grand segment additif de* OC *partagé en moyenne et extrême raison. Démontrer que le triangle* BAC *est équilatéral.*

OC étant donné, proposons-nous de calculer la longueur x qu'il faut donner à OA et à OB pour que le triangle BAC soit équilatéral. On aura



$$\overline{BA}^2 = 2x^2,$$

car le triangle BOA est rectangle isocèle, et

$$\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 = x^2 + c^2 - cx,$$

parce que la projection de OC sur OB est la moitié de OC, l'angle BOC étant égal à 60°.

Il faut donc que x vérifie l'équation

$$x^2 + c^2 - cx = 2x^2,$$

ou

$$x^2 + cx - c^2 = 0,$$

qui a deux racines, l'une positive,

$$x_1 = \frac{c}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right),$$

l'autre négative,

$$x_2 = -\frac{c}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right).$$

On reconnaît que x_1 est le côté du décagone régulier convexe inscrit dans un cercle de rayon c et $-x_2$ est le côté du décagone régulier étoilé.

On sait que ces côtés sont égaux aux segments du rayon, divisé en moyenne et extrême raison.

1051. — *On donne un point M extérieur au cercle (O). De M, on mène des sécantes MAB, MCD, également distantes du centre. Démontrer que le point de concours des diagonales du quadrilatère ABCD est fixe.*

Les points A et B sont respectivement symétriques de C et de D par rapport au diamètre MO; les deux lignes AC et BD sont parallèles et perpendiculaires à ce diamètre; le quadrilatère ABDC est donc un trapèze isocèle, dont les diagonales se coupent en un point P de l'axe de symétrie MO.

Du parallélisme de AC et BD, on déduit les proportions

$$\frac{PI}{PJ} = \frac{IA}{JD}$$

et

$$\frac{MI}{MJ} = \frac{IA}{JB} = -\frac{IA}{JD} = -\frac{PI}{PJ},$$

donc P est conjugué harmonique de M par rapport à I et J; nous allons montrer que P est aussi conjugué harmonique de M par rapport aux extrémités E et F du diamètre MO, ce qui montrera que P est fixe, quand la direction de MAB varie.

Puisque P est conjugué de M par rapport à I et à J,

$$\frac{2}{MP} = \frac{1}{MI} + \frac{1}{MJ};$$

or les triangles rectangles MIA, MJB et MHO sont semblables (H étant le milieu de AB). Donc

$$\frac{1}{MI} = \frac{1}{MA} \times \frac{MO}{MH} \quad \text{et} \quad \frac{1}{MJ} = \frac{1}{MB} \times \frac{MO}{MH},$$

$$\frac{1}{MI} + \frac{1}{MJ} = \frac{MO}{MH} \times \frac{MA + MB}{MA.MB};$$

or

$$MA + MB = 2MH,$$
$$ME + MF = 2MO,$$
$$MA \times MB = ME \times MF;$$

on a donc

$$\frac{2}{MP} = \frac{ME + MF}{ME \times MF} = \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF},$$

ce qui prouve que P est fixe, étant conjugué harmonique de M par rapport à E et à F.

1052. — *On trace le cercle inscrit au triangle ABC, qui est tangent à CB en E. On mène les circonférences de centres B et C, de rayons BE et CE. Démontrer que l'on a, si PQ est la tangente commune à (B) et (C),*

$$\overline{PQ}^2 = 4(p-b)(p-c) = 4rr_a,$$

r étant le rayon du cercle inscrit, r_a celui du cercle exinscrit dans l'angle A.

On sait que si deux cercles se touchent extérieurement en un point M, leur tangente commune extérieure est moyenne géométrique entre les deux diamètres.

On a donc, dans le cas présent,

$$\overline{PQ}^2 = 4BE \times CE.$$

Or on sait que $BE = p - b$ et que $CE = p - c$. Il en résulte bien

$$\overline{PQ}^2 = 4(p-b)(p-c).$$

Si l'on appelle I et I' les centres des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle A, F le point de contact de ce dernier cercle avec BC, on sait que les deux triangles CEI et I'FC sont semblables, de plus $CF = BE = p - b$. On en déduit que

$$\frac{CE}{EI} = \frac{I'F}{CF} \quad \text{ou} \quad CE.CF = IE.I'F,$$

donc que

$$(p-c)(p-b) = rr_a.$$

EXAMENS ET CONCOURS DE 1920 (*Suite*).

EXAMENS ORAUX
des
ÉCOLES NATIONALES D'ARTS ET MÉTIERS (*)

Arithmétique et Algèbre (*Suite*).

28. — Définition du quotient à une unité près d'un nombre fractionnaire par un nombre entier. Démontrer que le quotient en question est le même que celui de la partie entière par le nombre entier. Qu'a-t-on à dire au cas où le nombre fractionnaire est un nombre décimal?

29. — Simplifier

$$\frac{3}{\sqrt{a} + \sqrt{2a} + \sqrt{3a}}.$$

30. — [**4412** (**)]. Résoudre l'inégalité

$$2x - 1 > \sqrt{x^2 - 3x + 3}.$$

---

31. — Démontrer qu'un nombre carré parfait a un nombre de diviseurs impair. La réciproque est-elle vraie? Si le nombre des diviseurs d'un nombre A est multiple de 3, que peut-on en conclure pour A?

32. — Étant donné le polynome

$$6x^3 - 2x^2 + mx - 2,$$

déterminer m : 1° par la condition qu'il soit divisible par $x + 1$; 2° par la condition qu'il soit divisible par $2x - 3$.

33. — *Calcul logarithmique*. — Surface d'un triangle connaissant les trois côtés :

$$a = 42{,}28, \qquad b = 37{,}12, \qquad c = 20{,}76.$$

---

34. — Trouver le numérateur d'une fraction, dont le dénominateur est 67, et dont la racine cubique à 0,01 près par défaut est 0,31.

35. — [**4413**]. Trouver un polynome entier en x tel que si on le divise par $x - 1$, par $x + 2$, par $x - 4$, on a comme reste 10, et qu'il s'annule pour $x = -1$.

36. — *Calcul logarithmique :*

$$x = \sqrt[3]{\frac{0{,}01746^2 \times \pi}{\log 0{,}00627}}.$$

(*) Les questions posées à un même candidat sont comprises entre deux traits.

(**) Ce second numérotage ne porte que sur les questions dont nous avons l'intention de donner ici une solution. Ces questions seront résolues comme exercices; les abonnés ne devront pas en envoyer de solutions.

37. — Caractères de divisibilité par 9 et par 11.

38. — [**1114**]. Résoudre le système

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = 32, \\ x^4y^2 + x^2y^4 = 128. \end{cases}$$

Définition des fonctions symétriques. Emploi d'inconnues auxiliaires.

39. — *Calcul à la règle.* — Établir la formule donnant la hauteur de la pyramide hexagonale régulière connaissant son volume et le côté de l'hexagone de base.

Application : $V = 45^{dm3}$, $a = 2^{dm},45$.

---

40. — Décomposition d'un nombre en un produit de facteurs premiers.

41. — [**1115**]. Résoudre l'inégalité

$$(1 + m + m^2)^2 < 3(1 + m^2 + m^4).$$

42. — Calculer à la règle la valeur acquise au bout de n années par un capital A placé à intérêts composés au taux de 5 %.

Application : $n = 15$, $A = 28\,500$.

---

43. — Si n est un nombre entier,

$$(n^2 + 3n + 1)^2 - 1 \text{ est divisible par } 24.$$

44. — [**1116**]. Déterminer m pour que l'équation

$$mx^2 - 2(m-1)x + m = 0$$

ait des racines x', x'' satisfaisant à la condition

$$\frac{x'}{x''} + \frac{x''}{x'} = 4.$$

45. — *Calcul logarithmique.* — Volume du secteur sphérique appartenant à une sphère de $0^m,6478$ de rayon. La hauteur de la zone qui lui sert de base est 0,5876.

---

46. — Définition et propriétés des fractions irréductibles.

47. — [**1117**]. Que devient l'expression

$$y = 2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x - 3} \qquad \text{pour} \qquad x = +\infty\,?$$

y tend-il vers zéro par valeurs positives ou négatives? Limite de la valeur de y pour $x = -\infty$.

48. — Comment peut-on calculer au moyen de la règle le volume de la sphère dont on donne le rayon? *Application :* $R = 1^{dm},7$.

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4118. — Trouver un nombre de deux chiffres, $\overline{ab}$, qui, divisé par le nombre $\overline{ba}$ (écrit avec les deux mêmes chiffres, dans l'ordre inverse), donne pour quotient 3 et pour reste 5.

4119. — Avec trois chiffres différents, a, b, c, on peut écrire six nombres. Quelle est leur somme?

Généraliser : avec p chiffres différents ($p < 10$) on peut écrire plusieurs nombres, en changeant l'ordre de toutes les façons; quelle est leur somme?

4120. — Une route, dont la direction générale est rectiligne, fait entre deux points A et B, pour éviter de creuser une tranchée coûteuse, un détour, qui a la forme d'un arc de circonférence dont l'angle au centre est 60°.

Une colonne d'infanterie, de longueur l, marchant à la vitesse de $4^{km},5$ à l'heure, suit la route : un fantassin isolé prend le raccourci, suivant la droite AB. Parti de A au moment où la dernière file de la colonne y passe, il arrive en B en même temps que la première file sa vitesse étant égale à celle de la colonne.

Mais si la colonne avait fait entre A et B la halte horaire de dix minutes, le fantassin isolé serait arrivé en B au moment où la tête de colonne y passe, en faisant seulement 3^{km} à l'heure.

Calculer la longueur l de la colonne et le rayon R de l'arc de cercle.

4121. — Le propriétaire A d'un champ vend à une personne B, un lot rectangulaire, dont la longueur est double de la largeur, au prix de $1^f,25$ le m². Un an après, B propose à A de modifier les dimensions du terrain acheté, en augmentant la largeur primitive de 3^m, tout en diminuant sa longueur de 3^m. Comme, dans l'intervalle, la valeur du terrain a augmenté de 20 %, A accepte à condition que B lui verse une somme de 81^f. Calculer les dimensions primitives du terrain acheté.

(*B. S., Rennes, aspirants, mars* 1920.)

4122. — Deux cyclistes partent à midi d'un même point A d'une piste circulaire et vont en sens inverse. Ils roulent pendant une heure. La vitesse du premier est 16^{km} à l'heure, celle du deuxième $15^{km},4$. On demande les époques et le nombre des rencontres. On prendra $\pi = 3,14$, le rayon de la piste est de 1^{km}.

(*B. S., Cantal, aspirants, mars* 1920.)

4123. — Résoudre le système

$$\begin{aligned} x^2 + xy + yz + zx &= a^2, \\ y^2 + xy + yz + zx &= b^2, \\ z^2 + xy + yz + zx &= c^2. \end{aligned}$$

(J. Auberger, lycée Henri-Poincaré, Nancy.)

4124. — Des deux égalités

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0,$$

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0,$$

la seconde entraine la première; mais la réciproque n'est pas vraie.

4125. — Résoudre le système

$$\begin{aligned} (x-y)(x^2-y^2) &= 160, \\ (x+y)(x^2+y^2) &= 580. \end{aligned}$$

(G. Lhémanne, lycée de Lons-le-Saunier.)

4126. — Si AB est le plus petit côté d'un quadrilatère convexe ABCD, et si l'on mène par A et B deux droites parallèles AK, BL, coupant CD, entre C et D, en K et L, et rencontrant les diagonales BOD et AOC en N et M, le pentagone OMKLN est équivalent à la somme des triangles AMD, AOB et BNC dans deux cas, et dans ces deux cas seulement :

1° Quand AB est parallèle à DC;

2° Quand le milieu de KL coïncide avec le milieu de DC.

(J. Macherey, à Besançon.)

4127. — Soient b et c les côtés, a l'hypoténuse d'un triangle rectangle, h sa hauteur.

Établir la relation

$$\sqrt{\frac{a+2h}{a-2h}} = \frac{b+c}{b-c}.$$

(V. Herbiet, à Wavre.)

4128. — La grande base AB d'un trapèze rectangle ABCD a une longueur égale à 8^{dm}. Sachant que la diagonale AC divise ce trapèze en deux triangles dont l'un ACD est rectangle en D et l'autre ABC est équilatéral, on demande de trouver :

1° le périmètre du trapèze ABCD;

2° sa surface;

3° la surface du triangle SAB obtenu en prolongeant les côtés non parallèles du trapèze jusqu'à leur rencontre en S.

Enfin, si l'on fait tourner la figure SAB autour de SA comme axe, quel est le rapport des volumes des deux cônes engendrés par les triangles rectangles SDC, SAB.

(*B. S., Marne, aspirants, mars* 1920.)

4129. — Trouver la capacité et les dimensions d'une boîte en fer-blanc sans couvercle, sachant :

1° que le fond de cette boîte est un rectangle dont un côté est double de l'autre, et que sa profondeur est égale au plus grand côté du rectangle de base;

2° que le fer-blanc dont la boîte est faite pèse 20^g par dm² et que la boîte vide pèse $100^g,8$.

(*B. S., Seine-Inférieure, aspirantes, mars* 1920.)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie Paul BRODARD.

23e Année. 1er Novembre 1920. N° 3.

L'Éducation Mathématique

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

PRIX DU NUMÉRO : France et Colonies, 0 fr. 60. Étranger, 0 fr. 70.
ABONNEMENT ANNUEL : France et Colonies, 10 fr. Étranger, 12 fr.

Tous les abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, l'on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction : Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Abonnements : Librairie **Vuibert**, Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats,

L'INVERSION (*Suite.*)

Inverseurs.

On appelle inverseurs des appareils formés de tiges articulées, tels que si un point d'une tige est guidé sur une ligne Γ, un autre point de l'appareil décrive une ligne inverse de Γ, par rapport à un point fixe, la puissance étant une constante qui dépend de l'appareil.

Le premier appareil de ce genre a été imaginé par Peaucellier. Il se compose de six tiges, AO, AM, AP, et BO, BM, BP, qui forment un losange MAPB, et un triangle isocèle BOA; l'appareil est donc construit de façon que

$$AO = BO = a,$$
$$AM = BM = AP = BP = b.$$

Les tiges sont articulées aux six sommets.

Quelle que soit la façon dont l'appareil est déformé, puisque l'on a

$$OA = OB, \qquad MA = MB, \qquad PA = PB,$$

les points O, M et P sont alignés sur la droite perpendiculaire à AB en son milieu.

De plus, les points M et P sont sur le cercle dont le centre est A et le rayon $AM = AP = b$. La puissance de O par rapport à ce cercle est évidemment constante et égale à $\overline{OA}^2 - \overline{AM}^2 = a^2 - b^2$.

Donc $OM \times OP = a^2 - b^2$.

Si le point O est fixé, de façon que les tiges OA et OB puissent tourner autour de ce point, les points M et P décrivent des lignes inverses l'une de l'autre par rapport au point O.

Cet appareil a montré qu'on peut décrire une ligne droite au moyen d'un système articulé, chose qui avait été considérée jusque-là comme impossible. Si le point M décrit un cercle passant par O, P décrit une ligne droite. Pour que M décrive un cercle passant par O, il suffit de le joindre à un point fixe ω' par une septième tige, de longueur égale à ω'O, articulée en M et pouvant tourner autour de ω'.

Toutefois, l'extension de l'appareil est limitée, et P ne peut décrire qu'un segment ou deux de cette ligne droite, car la distance OP reste comprise entre $a + b$ et $a - b$.

L'autre inverseur est le *contre-parallélogramme* de Hart.

Cet appareil est formé par les deux côtés non parallèles et par les deux diagonales d'un trapèze isocèle, on le nomme contre-parallélogramme parce qu'il a, comme le parallélogramme, des côtés opposés deux à deux égaux; mais deux des côtés opposés sont *croisés*. (Il faut supposer que les côtés sont articulés en A, B, C, D, mais non en I : en ce point, les deux côtés qui se croisent glissent l'un sur l'autre.)

Cet appareil articulé est déformable, et, quand il se déforme, les deux triangles BAD, BCD, ont toujours un côté commun, BD, et les autres égaux deux à deux par construction; ces triangles restent donc égaux, les hauteurs issues de A et de C sont égales, et par conséquent :

a) AC *reste constamment parallèle à* BD; le quadrilatère BACD est toujours un trapèze *isocèle*, partant *inscriptible*.

En lui appliquant le théorème de Ptolémée, on a

$$AC \times BD + AB \times CD = AD \times BC,$$

ou, en posant $AB = b$ et $AD = a$,

$$b) \qquad AC \times BD = a^2 - b^2.$$

Donc le produit des côtés parallèles est constant et égal à $a^2 - b^2$.

Menons une ligne parallèle à BD et rencontrant les tiges AB, AD, BC, en O, P, M respectivement.

Supposons ces trois points marqués sur les tiges et montrons que :

c) *les trois points* O, P, M *restent toujours, quand l'appareil articulé se déforme, alignés sur une parallèle à* AC *et* BD;

d) *le produit* OM × OP, *dans ces conditions, garde une valeur constante.*

Si OM est parallèle à AC, on a

$$\frac{BO}{BA} = \frac{BM}{C}; \qquad (1)$$

cette égalité subsiste quand l'appareil se déforme, donc OM reste toujours parallèle à AC. De même si OP est parallèle à BD,

$$\frac{AO}{AB} = \frac{AP}{AD}, \qquad (2)$$

cette égalité subsiste quand l'appareil se déforme, et entraîne que OP est parallèle à BD. Les droites AC et BD étant parallèles, les directions OP et OM sont confondues, O, P et M restent en ligne droite.

De la similitude des triangles BOM et BAC, on déduit

$$\frac{OM}{AC} = \frac{BO}{BA},$$

de celle des triangles AOP et ABD, on tire

$$\frac{OP}{BD} = \frac{AO}{AB};$$

en faisant le produit membre à membre, on a

$$OM \times OP = AC \times BD \times \frac{AO.BO}{AB \times BA}$$

$$= (a^2 - b^2)\frac{OA.BO}{b^2}.$$

Donc, si le point O est maintenu fixe, de façon que le contre-parallélogramme puisse tourner autour de ce point fixe et se déformer, M et P décriront des figures inverses.

En ajoutant une cinquième tige $M\omega$, qui relie M à un point fixe ω, et dont la longueur est égale à ωO, on ferait décrire à M un arc d'un cercle passant en O. Donc P décrirait un segment de droite.

(*A suivre.*)

ARITHMÉTIQUE

4035. — *On veut planter 324 arbustes sur un terrain rectangulaire ABCD de dimensions* $AB = 140^m$ *et* $BC = 32^m$. *Ces arbustes doivent former des rangées équidistantes parallèles à AB, la première étant sur AB et la dernière sur DC. Ils doivent aussi former des rangées équidistantes parallèles à BC, la première étant sur BC et la dernière sur AD. Trouver quelle doit être la distance de deux rangées consécutives, sachant que cette distance est la même pour les rangées parallèles à BC que pour les rangées parallèles à AB.*

Les dimensions du rectangle étant toujours 140^m *sur* 32^m, *si l'on se proposait de planter N arbustes dans les conditions énoncées, le problème ne serait possible que pour des valeurs de N convenablement choisies. Montrer que 324 est la plus petite de ces valeurs.*

(*B. S., Lyon, aspirants, 2ᵉ session 1919.*)

On peut dire qu'il s'agit de diviser le rectangle ABCD en carrés par des parallèles aux côtés : les sommets de ces carrés, y compris ceux qui sont sur les bords du rectangle, doivent être occupés par les arbustes. Soit x le côté d'un carré, c'est-à-dire la distance de deux rangées d'arbres parallèles, n le nombre de rangées parallèles à AB, p le nombre de rangées parallèles à AD. On aura

A B
D C

$$nx = 32 \qquad \text{et} \qquad px = 140,$$

d'où

$$\frac{n}{p} = \frac{32}{140} = \frac{8}{35}.$$

Or la fraction $\frac{8}{35}$ est irréductible : n et p sont des entiers, $\frac{n}{p}$ est donc une fraction égale à la fraction irréductible $\frac{8}{35}$; il faut que n et p soient des multiples de 8 et de 35 par un même entier m.

Le nombre d'arbres plantés est alors $(n+1) \times (p+1)$, et l'on doit avoir

$$(8m+1)(35m+1) = 324,$$

ce qui donne une équation du second degré en m,

$$280m^2 + 43m - 323 = 0.$$

Cette équation a visiblement la racine 1, et une autre racine qui, étant négative, ne peut donner une solution de la question

La racine $m = 1$ donne $32 : 8 = 4$ pour écartement de deux rangées d'arbustes.

Dans le cas général, si N est le nombre d'arbres à planter, m est donné par l'équation

$$280m^2 + 43m + 1 - N = 0,$$

où m et N désignent des entiers : N doit donc être un entier supérieur à l'unité et de la forme $(8m+1)(35m+1)$; le plus petit de ces nombres est évidemment celui qui correspond à la plus petite valeur de m, qui est 1, c'est donc $9 \times 36 = 324$. Les valeurs suivantes sont, par ordre de grandeur, celles qui correspondent à $m = 2, 3, 4$, etc.

$$m = 2, \qquad 17 \times 71 = 1\,207,$$
$$m = 3, \qquad 25 \times 106 = 2\,650,$$
$$m = 4, \qquad 33 \times 141 = 4\,653.$$

N. B. — Le raisonnement donné par certains correspondants à l'appui de leur solution n'est pas entièrement satisfaisant : ils admettent sans démonstration que l'écartement de deux rangées parallèles est un nombre entier de mètres, diviseur de 140 et de 32 : l'écartement le plus grand est alors le plus grand commun diviseur de 32 et de 140. Cela n'est point évident et d'ailleurs cela n'est pas exact, car l'écartement de deux rangées parallèles peut être $\frac{4}{3}$ ou $\frac{4}{5}$ de mètre.

La mesure de l'écartement de deux rangées voisines étant x, on sait seulement qu'il doit exister deux entiers p et n, tels que

$$140 = px \qquad \text{et} \qquad 32 = nx;$$

cela prouve que x est un nombre rationnel ou, si l'on veut, une fraction. Soit donc $x = \frac{\alpha}{\beta}$, fraction irréductible. On a alors

$$140\beta = p\alpha \qquad \text{et} \qquad 32\beta = n\alpha,$$

α, premier avec β, divise donc 140 et 32 et par conséquent divise le plus grand commun diviseur de 140 et de 32, qui est 4. En remplaçant 140 par 35×4, 32 par 8×4 et 4 par $\mu.\alpha$, les équations deviennent

$$\mu\beta 35 = p \qquad \text{et} \qquad \mu\beta 8 = n,$$

p et n sont des entiers; x est le plus grand possible quand p et n sont les plus petits possibles, c'est-à-dire quand $\mu = \beta = 1$. Alors x est en effet égal à 4.

La valeur générale de x est $\frac{140}{35\mu\beta} = \frac{4}{\beta\mu}$, où μ est un diviseur de 4. Comme β est assujetti seulement à être premier avec α, cette valeur peut ne pas être entière.

[Bonnes solutions de Mlles Bocquet; de MM. L. Coussinot; De Vooght; F. Dupire; L. Godard; M. Gros; V. Herbiet; Luce-Catinot; Magnani.

Assez bonnes solutions de Mlles M. Calmon; S. David; de MM. A. Arnaud; M. Boulvert; J. Briquet; G. Bruniquel; H. Cazes; M. Chatelier; G. Colle; A. Collet; A. Coton; E. Delmas; A. Doutau; M. Duclay; A. F., à Saint-Pons; J. Grall; E. Guicheney; Huon-Leroux; L. Kerleroux; L. Leroy; Lhôtelier; P. Louon; A. Magdinier; H. Micard; H. Naudet; L.-G. Papon; G. Pichon; L. Soulier; M. Stévenard; J. Tardieu; Wehrung.]

4036. — *Un entrepreneur a acheté un emplacement à bâtir. Cet emplacement a la forme d'un rectangle dont la somme des dimensions est* 76^m *et la différence* 26^m; *il a été vendu* 800^f *l'arc. L'entrepreneur verse comptant* $4\,500^f$ *sur son achat, et pour le surplus, il souscrit deux billets de même valeur nominale payables, l'un dans 9 mois et l'autre dans 15 mois. Calculer cette valeur nominale sachant que le vendeur reçoit le reste du prix de vente en présentant immédiatement les deux billets à un banquier qui les escompte en dehors à* $5\,^0/_0$.

(*B. S., Poitiers, aspirantes, 2ᵉ session 1919.*)

La longueur et la largeur du rectangle sont respectivement la demi-somme et la demi-différence des deux nombres donnés

$$x = \frac{1}{2}(76 + 26) = 51 \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{2}(76 - 26) = 25.$$

La surface du terrain est $51 \times 25 = 1\,275^{m^2}$ ou $12^a,75$. Le prix de vente est par conséquent $800 \times 12,75 = 10\,200^f$. Si de ce prix on retranche la somme de $4\,500^f$, payée comptant, il reste $5\,700^f$, qui représentent la somme des valeurs *actuelles* des billets.

A une somme de valeurs *nominales* de 200^f correspond une somme de valeurs *actuelles* de

$$\left(100 - \frac{5 \times 9}{12}\right) + \left(100 - \frac{5 \times 15}{12}\right) = 190;$$

la somme des valeurs nominales des deux billets est le quotient de 5 700 par la fraction $\frac{190}{200}$, ce qui donne $6\,000^f$. La valeur nominale de chacun des deux billets est donc de 3 000.

(HENRI NAUDET, à Decize, Nièvre.)

[Bonnes solutions de Mlles Bocquet; Calmon; S. David; de MM. Alamasset-Crozant; A. Arnaud; M. Boulvert; M. Bourreau; J. Briquet; G. Bruniquel; A. Cabarat; G. Colle; A. Collet; Coussinot; A. Coton; E. Delmas; De Vooght; R. Destobere; F. Dupire; E. Epailly; A. F., à Saint-Pons; P. Faucheux; M. Forcade; J. Grall; M. Gros; Guicheney; V. Herbiet; Huon-Leroux; L. Kerleroux; R. Lasellerie; Lhôtelier; P. Louon; Luce-Catinot; A. Magdinier; Magnani; Pichon; L. Soulier; Stévenard; J. Tarnus; Wehrung.]

4084. — *Trouver quatre termes consécutifs d'une progression arithmétique, sachant que si on les augmente respectivement de* 15, 30, 55 *et* 95 *unités, on obtient quatre nombres qui sont des termes consécutifs d'une progression géométrique.*

Soient x le premier terme de la progression arithmétique et r sa raison : les quatre termes sont

$$\div \quad x, \quad x+r, \quad x+2r, \quad x+3r,$$

qui, augmentés comme l'indique l'énoncé, donnent quatre nombres en progression géométrique :

$$x+15, \quad x+r+30, \quad x+2r+55, \quad x+3r+95;$$

en appelant q la raison de la progression géométrique, il faut que

$$\frac{x+r+30}{x+15} = \frac{x+2r+55}{x+r+30} = \frac{x+3r+95}{x+2r+55} = q$$

ou bien, en simplifiant,

$$1 + \frac{r+15}{x+15} = 1 + \frac{r+25}{x+r+30} = 1 + \frac{r+40}{x+2r+55} = q. \quad (1)$$

Retranchant l'unité de tous les termes, et posant $q - 1 = q'$, nous obtenons le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} r+15 &= q'(x+15), \\ r+25 &= q'(x+r+30), \\ r+40 &= q'(x+2r+55). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Retranchons la première équation membre à membre de chacune des deux autres, il vient

$$\begin{aligned} 10 &= q'(r+15), \\ 25 &= q'(2r+40), \end{aligned} \quad (3)$$

d'où l'on tire, en divisant membre à membre,

$$\frac{5}{2} = \frac{2r+40}{r+15}, \quad (4)$$

et enfin

$$r = 5;$$

cette valeur, portée dans l'une des équations du système (3), fournit $q' = \frac{1}{2}$, donc $q = \frac{3}{2}$; la première équation donne alors

$$20 = \frac{1}{2}(x+15),$$

donc

$$x = 25.$$

La progression arithmétique est formée des nombres

$$\div \quad 25 \;.\; 30 \;.\; 35 \;.\; 40;$$

la progression géométrique de

$$\begin{aligned} 25 + 15 &= 40, \\ 30 + 30 &= 60, \\ 35 + 55 &= 90, \\ 40 + 95 &= 135; \end{aligned}$$

les nombres

$$\div\div \quad 40 : 60 : 90 : 135$$

forment en effet une progression géométrique dont la raison est $\frac{3}{2}$.

(Georges KNOLL, à Clermont-Ferrand.)

[Bonnes solutions de Mlle M. Calmon, à Saint-Céré; de MM. A. Authier, à Mirepoix; F. Baujard; Bruniquel, à Toulouse; A. Cieutat, au Havre; J. Dougados, à Castres; P. Dujoux, à Dijon; F. Dupire, à Escaudain; M. Gros; L'Hotelier, à Évreux; P. Louon, athénée d'Ixelles; M., à Guéret; J. Mauhin, à Herbreste Jalnoy; E. Masdupuy, à Tulle; J. Millour; A. Ricoux; H. Sebban, à Boufarik.]

4087. — *Un fardier, chargé d'un tronc de sapin, roule sur une route avec une vitesse uniforme : le charretier, en faisant des pas d'une longueur constante, va d'un bout à l'autre du tronc, en marchant dans le sens du chariot, en* 72 *pas. S'il marche en sens contraire, il ne lui en faut que* 28. *Quelle est la longueur du tronc d'arbre, sachant que l'homme fait régulièrement* 126 *pas pour un hectomètre?*

Quelle est la vitesse du chariot, sachant que l'homme fait 105 *pas à la minute?*

Solution arithmétique. — Appelons A et B les deux extrémités du tronc d'arbre. Si le charretier va de A en B dans le sens du mouvement, il fait 72 pas; si, faisant aussitôt demi-tour, il revient de B jusqu'à la hauteur de A, il fait 28 pas; il a fait, au total, $72 + 28 = 100$ pas, pendant que le point A avançait d $72 - 28 = 44$ pas.

La vitesse du fardier est donc à celle de l'homme dans le rapport de 44 à 100; or la vitesse de l'homme est de $\frac{100}{126} \times 105 = \frac{100 \times 7 \times 5 \times 3}{2 \times 7 \times 9} = \frac{50 \times 5}{3}$ mètres par minute, soit 5^{km} à l'heure; celle du fardier est donc $5 \times \frac{44}{100} = 2^{km},200$ à l'heure.

Quand l'homme avance dans le même sens que le fardier, chaque fois qu'il fait un pas, le tronc avance parallèlement de $\frac{44}{100}$ de la longueur du pas, l'homme ne gagne que $\frac{56}{100}$ de cette longueur. La longueur du tronc est les $\frac{56}{100}$ de 72 pas et chaque pas est de $\frac{100^m}{126}$; donc la longueur de l'arbre est

$$\frac{100}{126} \times \frac{56}{100} \times 72 = 32^m.$$

(M., à Guéret.)

Solution algébrique. — Soit u la mesure, en mètres, du chemin parcouru par le fardier pendant que l'homme fait un pas, dont la longueur est $\frac{100}{126}$.

Quand le charretier et le fardier vont dans le même sens, à chaque pas, l'homme gagne $\frac{100}{126} - u$, sur la voiture.

Quand ils vont en sens contraire, à chaque pas, l'homme se déplace par rapport au tronc, de $\frac{100}{126} + u$.

Si y est la longueur du tronc, on a donc, d'après l'énoncé, les deux équations

$$72\left(\frac{100}{126} - u\right) = 28\left(\frac{100}{126} + u\right) = y. \quad (1)$$

On en tire d'abord la valeur de u.

$$100u = \frac{100}{126}(72 - 28),$$

$$u = \frac{44}{126} = \frac{22}{63},$$

puis celle de l'inconnue y, longueur du tronc,

$$y = 28 . \frac{144}{126} = 72 . \frac{56}{126} = 32^{m}.$$

La vitesse du fardier est, en mètres par minute,

$$105 \times \frac{22}{63} = \frac{110}{3},$$

ce qui fait $2^{km},200$ à l'heure; celle de l'homme est, en mètres par minute,

$$105 \times \frac{100}{126} = \frac{250}{3},$$

soit 5^{km} à l'heure.

Autre solution algébrique. — Soit l la longueur du tronc, V la vitesse du charretier, v celle du fardier, les unités étant le mètre et la seconde. Quand le charretier marche dans le même sens que le fardier, sa vitesse relative est $V - v$; quand il va en sens opposé, elle est $V + v$: le temps nécessaire pour faire n pas est $\frac{n}{105}60$, puisqu'il fait 105 pas en 60 secondes. On a donc les deux équations

$$\frac{l}{V - v} = \frac{72 \times 60}{105}; \qquad \frac{l}{V + v} = \frac{28 \times 60}{105}; \qquad (1)$$

en divisant membre à membre, il vient

$$\frac{V - v}{V + v} = \frac{28}{72} = \frac{7}{18},$$

d'où $$11V = 25v.$$

Or $V = \frac{100 \times 105}{126 \times 60} = \frac{50}{36}$, ce qui fait $\frac{50 \times 3\,600}{36} = 5\,000^{m}$ à l'heure; la vitesse du fardier est donc $\frac{50}{36} \times \frac{11}{25} = \frac{22}{36}$, soit $2^{km},200$ à l'heure; l'une ou l'autre des équations (1) donne alors l.

On a $l = \frac{72 \times 60}{105} \times \frac{28}{36} = 32^{m}$.

(Solution analogue : ANDRÉ BAL.)

[Bonnes solutions de Mlle Calmon, à Saint-Céré, Lot; de MM. A. Authier, à Mirepoix; Bruniquel, à Toulouse; A. Cieutat, au Havre; P. Dujoux, à Dijon; M. Gros; Le Pinois, à Brest; L'Hôtelier, à Évreux; P. Louon, athénée d'Ixelles; E. Masdupuy, à Tulle; A. Ricoux; H. Sebban, à Boufarik; G. Vignolle, à Clermont-Ferrand; A. Wehrung, à Paris.]

ALGÈBRE

4030. — *Un champ ayant la forme d'un trapèze dont la différence des bases est de* 20^{m} *a été vendu* $2\,880^{f}$ *à raison de* $5\,000^{f}$ *l'hectare. La hauteur étant les* $\frac{5}{9}$ *de la somme des bases, on demande de trouver la longueur des deux bases et de la hauteur.*

A 20^{m} *d'une des extrémités de la petite base du trapèze se trouve un puits. Partager le champ en trois parties équivalentes ayant accès à ce puits, et justifier le tracé indiqué.*

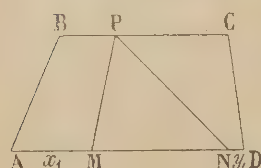
(*B. S., Chambéry, aspirantes,* 2e *session* 1919.)

La superficie du champ s'obtient en divisant la valeur du champ par le prix de l'hectare

$$2\,880 : 5\,000 = 0^{ha},5760.$$

La surface du champ est donc de 5 760 mètres carrés.

Les deux bases étant x et y et la hauteur h, on a



$$S = 5\,760 = \frac{1}{2}h(x + y);$$

or

$$h = \frac{5}{9}(x + y),$$

donc

$$5\,760 = \frac{5}{18}(x + y)^{2},$$

d'où l'on tire $$x + y = 144.$$

On connaît alors la somme et la différence des deux longueurs x et y; $x + y = 144$, $x - y = 20$, on en tire

$$x = \frac{1}{2}(144 + 20) = 82, \qquad y = \frac{1}{2}(144 - 20) = 62;$$

la hauteur est

$$h = \frac{5}{9}144 = 80.$$

La dernière partie du problème n'est déterminée que si l'on suppose implicitement que le terrain est partagé par des lignes droites, à l'exclusion de lignes courbes ou brisées; nous admettrons aussi que le puits est sur la petite base, pour que sa position soit fixée.

On peut trouver sur la grande base deux points M et N tels que les quadrilatères BPMA et CPND, ainsi que le triangle MPN aient la même aire, égale par conséquent au tiers de celle du trapèze; soit $AM = x_1$ et $ND = y_1$; il faudra que l'on ait

$$20 + x_1 = \frac{1}{3}144 = 48, \qquad \text{et} \qquad 42 + y_1 = \frac{1}{3}144 = 48;$$

cela donne $x_1 = 28$ et $y_1 = 6$. Il reste alors $MN = 82 - x_1 - y_1 = 48$; 48 est bien le tiers de 144. Les trapèzes ABPM, DCPN sont donc égaux au triangle MPN.

(Solution analogue : HENRI NAUDET, pensionnat des Minimes, à Decize.)

[Bonnes solutions de Mlles M. Bourreau, à Faye (Maine-et-Loire); M. Calmon, à Saint-Céré (Lot); de MM. A.-F., à Saint-Pons; A. Arnaud, à Decize; A. Authier, à Mirepoix; S. Béquain, à Vesoul; A. Bernadac; G. Bertrand, école pratique d'Industrie de Saint-Étienne; M. Boulvert, au Mans; Bourchanin, école normale de Mâcon; M. Brunet, 2e C., à Saint-Chamond; G. Bruniquel, école normale de Toulouse; A. Cabarat, à Decize; G. Cellier, école primaire supérieure de Granville; A. Collet, au Mans; G. Collé, à Douai; J. Condamin, à Saint-Chamond; A. Coton, à Tréguier; E. Delmas, E. P. S. d'Aubenas; G. Démaret, à Montreuil-sur-Mer; F. Dupire, à Escaudain; E. Épailly, à Corbeil; F.-M., à Carcassonne; M. Forcade, à Arance; M. Gros; V. Herbiet; Lhôtelier, à Évreux; R. Luce-Catinot, lycée de Valence; A. Mabillot, E. P. S., de Saint-Benoit-du-Sault (Indre); G. Martin, collège de Meaux; H. Micard, à Cormeilles (Eure); G. Pichon, au Mans; J. Redon, école Hanley, à Thiais; R. Renaud, E. P. S., de Decize; F. Richard, à Nancy; L. Soulier, à Sioniac.

Assez bonnes solutions de Mlle S. David; de MM. J. Broquet; J. Georges; J. Goudin; J. Grall; P. Louon; Magdinier; C. Noirbent.]

4063. — *Résoudre le système*

$$a(x - y) = 2(1 + xy), \qquad (1)$$
$$A + B(x + y) + Cxy = 0, \qquad (2)$$

où l'on suppose $AC - B^{2} > 0$.

Discuter et chercher entre quelles limites doit être compris le paramètre a *pour que le système ait des solutions.*

Calculons x et y en fonction de xy et des données : nous avons

$$x - y = \frac{2}{a} + \frac{2}{a}xy,$$

$$x + y = -\frac{A}{B} - \frac{C}{B}xy;$$

donc

$$2x = \frac{2}{a} + \frac{2}{a}xy - \frac{A}{B} - \frac{C}{B}xy; \qquad (3)$$

$$2y = -\frac{2}{a} - \frac{2}{a}xy - \frac{A}{B} - \frac{C}{B}xy; \qquad (4)$$

posons $xy = p$. A toute valeur de p correspondent une valeur de x et une valeur de y associées.

Il suffit donc de calculer p : pour cela, formons le produit xy au moyen des équations (3) et (4); nous obtiendrons une équation du second degré en p,

$$4p = \left(\frac{A + Cp}{B}\right)^{2} - 4\frac{(1 + p)^{2}}{a^{2}}, \qquad (5)$$

qui se développe et s'ordonne comme il suit :

$$p^2\left(\frac{C^2}{B^2}-\frac{4}{a^2}\right)+2p\left(\frac{AC}{B^2}-2-\frac{4}{a^2}\right)+\left(\frac{A^2}{B^2}-\frac{4}{a^2}\right)=0. \quad (5')$$

Il suffit, pour que le système soit possible, que cette équation ait des racines; posons $\frac{4}{a^2}=m^2$, la condition est

$$\left(\frac{AC}{B^2}-2-m^2\right)^2-\left(\frac{C^2}{B^2}-m^2\right)\left(\frac{A^2}{B^2}-m^2\right)\geqslant 0; \quad (6)$$

elle se réduit, après des simplifications évidentes, à

$$4-4\frac{AC}{B^2}+m^2\left[\frac{(A-C)^2}{B^2}+4\right]\geqslant 0$$

et enfin à

$$m^2\left[\left(\frac{A-C}{2B}\right)^2+1\right]+\frac{B^2-AC}{B^2}\geqslant 0. \quad (7)$$

Si $B^2-AC\geqslant 0$, cette condition est toujours remplie, et le système a deux solutions; mais, dans le cas indiqué par l'énoncé, où $AC-B^2>0$, on voit qu'il faut que

$$\frac{m^2}{4}\geqslant\frac{AC-B^2}{(A-C)^2+4B^2},$$

donc que

$$\left|\frac{1}{a}\right|\geqslant\sqrt{\frac{AC-B^2}{(A-C)^2+4B^2}}$$

ou bien

$$|a|\leqslant\sqrt{\frac{(A-C)^2+4B^2}{AC-B^2}}.$$

Remarque. — Presque tous nos correspondants, tirant une inconnue d'une équation et portant la valeur dans l'autre, arrivent bien à la solution, mais par des calculs qui ont perdu toute symetrie, et qui sont assez pénibles.

[Bonnes solutions de MM. A. Bal, à Épinal; A. Cioutat, au Havre; J. Dougados, à Castres; F.-A.-G., à Saint-Pons (Hérault); M. Forcade, château d'Arance (Basses-Pyrénées); J. Grall, à Landivisiau (Finistère); M. Guillery, à Amiens; Lhôtelier, à Évreux; M., à Guéret.]

4090. — *Résoudre l'équation*

$$3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{19}{4}. \quad (1)$$

Prenons pour inconnue auxiliaire $x-\frac{1}{x}=z$.

Remarquons que

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\equiv x^2+\frac{1}{x^2}-2,$$

donc

$$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2+2.$$

L'équation donnée peut donc être écrite, en fonction de la nouvelle inconnue,

$$3(z^2+2)-4z-\frac{19}{4}=0$$

ou

$$3z^2-4z+\frac{5}{4}=0. \quad (2)$$

L'équation (2) a deux racines :

$$z'=\frac{1}{3}\left(2+\sqrt{4-\frac{15}{4}}\right)=\frac{1}{3}\left(2+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6},$$

$$z''=\frac{1}{3}\left(2-\sqrt{4-\frac{15}{4}}\right)=\frac{1}{3}\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2};$$

si l'on prend la première valeur, on forme l'équation en x

$$x-\frac{1}{x}=\frac{5}{6}$$

ou

$$6x^2-5x-6=0; \quad (3)$$

si l'on prend la seconde, on trouve que x doit vérifier l'équation

$$2x^2-x-2=0. \quad (4)$$

La première équation a pour racines $+\frac{3}{2}$ et $-\frac{2}{3}$, dont le produit est -1; la seconde a aussi pour racines deux nombres dont le produit est -1, mais qui ne se trouvent pas être rationnels; ce sont

$$\frac{1+\sqrt{17}}{4}=1{,}2808\ldots \quad \text{et} \quad \frac{1-\sqrt{17}}{4}=-0{,}7808\ldots$$

L'équation proposée a donc quatre racines, qui sont, par ordre de grandeur croissante,

$$\frac{1-\sqrt{17}}{4}, \quad -\frac{2}{3}, \quad \frac{1+\sqrt{17}}{4}, \quad \frac{3}{2}.$$

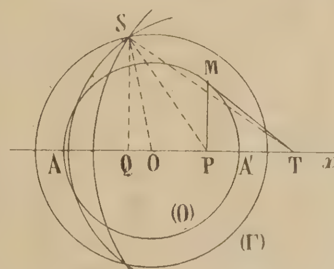
(André POPU, *école pratique d'Agen.*)

[Bonnes solutions de MM. Authier, à Mirepoix; A. Bal; F. Baujard; A. Cieutat, au Havre; A. De Bratz, à Paris; Bruniquel, à Toulouse; R. Destobère, à Menin (Belgique); J. Dougado, à Castres; F. Dupire, à Escaudain; J. Grall, à Landivisiau; M. Gros, école des Travaux Publics; Guillery, à Amiens; L'Hotelier, à Évreux; P. Louon, athénée d'Ixelles; M., à Guéret; J. Mauhin; P. Maudrou; J. Mazeau, à Montluçon; R. Renaud; A. Ricoux; H. Sebban, à Boufarik; N. Watelet, à Monceau-les-Mines.
Assez bonne solution de M. L. Godard, à la Rochelle.]

GÉOMÉTRIE

4039. — *Un point* M *parcourt un cercle fixe; il se projette en* P *sur un diamètre fixe* AA′ *de ce cercle et la tangente en* M *au cercle coupe* AA′ *en* T. *Trouver le lieu des points d'intersection de deux cercles, ayant l'un* P *pour centre et un rayon* k. PM, *l'autre* T *pour entre et un rayon* h. TM *(*h *et* k *désignant deux nombres constants, donnés). Examiner en particulier le cas où* $h=k$.

La solution de cette question se déduit de *l'identité de Stewart.*



Si S est un point du plan, O, le centre de la circonférence fixe donnée, on a entre les carrés des distances de S aux points O, P et T, la relation

$$\overline{SO}^2.\overline{PT}+\overline{SP}^2.\overline{TO}+\overline{ST}^2.\overline{OP}+\overline{PT}.\overline{TO}.\overline{OP}\equiv 0,$$

(où $\overline{PT}$, $\overline{TO}$, $\overline{OP}$ doivent être considérés comme les *mesures algébriques* de segments, c'est-à-dire comme des grandeurs positives ou négatives, suivant le sens des segments).

Posons $x=\overline{OP}$, nous aurons

$$\overline{OT}.\overline{OP}=R^2,$$

donc

$$\overline{OT}=\frac{R^2}{x},$$

$$\overline{PT}=\overline{OT}-\overline{OP}=\frac{R^2-x^2}{x};$$

d'autre part,

$$PM=+\sqrt{R^2-x^2},$$

$$TM=+\sqrt{\overline{OT}^2-\overline{OM}^2}=+\sqrt{\frac{R^4}{x^2}-R^2}=R\sqrt{\frac{R^2-x^2}{x^2}};$$

par hypothèse,

$$\overline{SP}^2=k^2.\overline{PM}^2=k^2(R^2-x^2),$$

$$\overline{ST}^2=h^2.\overline{TM}^2=h^2\frac{R^2}{x^2}(R^2-x^2).$$

En portant ces valeurs dans l'identité de Stewart, on trouve

$$\overline{\mathrm{SO}}^2\frac{\mathrm{R}^2-x^2}{x}-k^2(\mathrm{R}^2-x^2)\frac{\mathrm{R}^2}{x}+h^2\frac{\mathrm{R}^2}{x^2}(\mathrm{R}^2-x^2)x-\frac{\mathrm{R}^2-x^2}{x}\cdot\frac{\mathrm{R}^2}{x}\cdot x=0;$$

on peut mettre en facteur $\frac{\mathrm{R}^2-x^2}{x}$, il reste

$$\overline{\mathrm{SO}}^2-k^2\mathrm{R}^2+h^2\mathrm{R}^2-\mathrm{R}^2=0,$$

d'où

$$\overline{\mathrm{SO}}^2=\mathrm{R}^2(k^2-h^2+1).$$

$\overline{\mathrm{SO}}^2$ est donc constant. Le lieu du point S, s'il existe, est donc un cercle (Γ) ou des arcs de cercle, de centre O. Si $k=h$, ce cercle coïncide avec le cercle donné.

(Maurice FORCADE, château d'Arance, Basses-Pyrénées.)

Discussion. — Le lieu n'existe que si la valeur trouvée pour $\overline{\mathrm{SO}}^2$ est positive, c'est-à-dire si

$$k^2+1>h^2.$$

Si cette condition est remplie, on peut tracer un cercle (Γ) dont le centre est O et le rayon $\mathrm{R}\sqrt{k^2+1-h^2}$. Soit S un point quelconque du cercle (Γ), qui se projette en Q sur $\mathrm{O}x$, posons $\mathrm{OQ}=y$, d'où $y^2\leqslant\mathrm{R}^2(k^2-h^2+1)$; soit M un point du cercle (O), P, T et x ayant les mêmes significations que ci-dessus.

On aura

$$\overline{\mathrm{SP}}^2=\overline{\mathrm{SO}}^2+x^2-2xy,$$

et

$$\overline{\mathrm{PM}}^2=\mathrm{R}^2-x^2;$$

si l'on veut que $\overline{\mathrm{SP}}^2=k^2.\overline{\mathrm{PM}}^2$, cela donne l'équation

$$\overline{\mathrm{SO}}^2+x^2-2xy=k^2(\mathrm{R}^2-x^2),$$

qui devient, quand on y remplace $\overline{\mathrm{SO}}^2$ par $\mathrm{R}^2(k^2-h^2+1)$,

$$f(x)\equiv x^2(k^2+1)-2xy+\mathrm{R}^2(1-h^2)=0. \qquad (1)$$

On aura de même

$$\overline{\mathrm{ST}}^2=\overline{\mathrm{SO}}^2+\frac{\mathrm{R}^4}{x^2}-2\frac{\mathrm{R}^2}{x}y,$$

$$\overline{\mathrm{TM}}^2=\frac{\mathrm{R}^2}{x^2}(\mathrm{R}^2-x^2);$$

si l'on veut que $\overline{\mathrm{ST}}^2=h^2\overline{\mathrm{TM}}^2$, cela donne

$$\overline{\mathrm{SO}}^2+\frac{\mathrm{R}^4}{x^2}-2\frac{\mathrm{R}^2}{x}y=h^2\frac{\mathrm{R}^2}{x^2}(\mathrm{R}^2-x^2).$$

Remplaçant $\overline{\mathrm{SO}}^2$ par $\mathrm{R}^2(k^2-h^2+1)$, on voit disparaître le terme $-h^2\mathrm{R}^2$; on peut tout multiplier par x^2 et diviser par R^2; il reste alors une équation en x, identique à l'équation (1).

Pour que cette équation ait des racines, il faut que

$$y^2-(k^2+1)(1-h^2)\mathrm{R}^2\geqslant 0, \qquad (2)$$

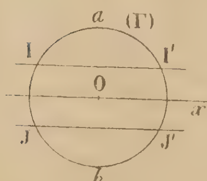
ce qui a toujours lieu si $h^2>1$ (inégalité compatible avec la condition $h^2<k^2+1$, posée initialement).

Si $h^2<1$, la condition (2) donne

$$y^2\geqslant\mathrm{R}^2(k^2-h^2+1)-\mathrm{R}^2h^2k^2; \qquad (2')$$

d'autre part $y^2\leqslant\overline{\mathrm{SO}}^2$, ce qui donne

$$y^2\leqslant\mathrm{R}^2(k^2-h^2+1); \qquad (3)$$



les conditions (2') et (3) sont compatibles.

La condition (2') exprime que le point S appartient à l'un des arcs IaI' ou JbJ' du cercle (Γ), dont les points sont à une distance de $\mathrm{O}x$ supérieure à

$$\sqrt{(1+k^2)(1-h^2)}.$$

Si S est un point d'un de ces arcs (dans le cas où $h<1$) ou un point quelconque du cercle (Γ) (dans le cas où $1\leqslant h^2\leqslant k^2+1$), l'équation (1) a deux racines.

Nous allons vérifier que ces deux racines sont comprises entre $+\mathrm{R}$ et $-\mathrm{R}$, et par suite qu'à chacune d'elles correspond bien un point M du cercle (O).

On a

$$\frac{1}{\mathrm{R}}f(+\mathrm{R})=\mathrm{R}(2+k^2-h^2)-2y,$$

$$\frac{1}{\mathrm{R}}f(-\mathrm{R})=\mathrm{R}(2+k^2-h^2)+2y,$$

donc $f(+\mathrm{R})\times f(-\mathrm{R})$ a le signe de

$$\mathrm{R}^2(2+k^2-h^2)^2-4y^2.$$

Si l'on substitue à y^2 dans cette expression les deux valeurs limites entre lesquelles est compris y^2, on trouve deux expressions qui se simplifient et sont respectivement

$$\mathrm{R}^2(h^2-k^2)^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{R}^2(h^2+k^2)^2.$$

$f(+\mathrm{R})\times f(-\mathrm{R})$ est donc compris entre deux quantités positives, et par conséquent est positif. Or

$$f(+\mathrm{R})+f(-\mathrm{R})=2\mathrm{R}^2(2+k^2-h^2),$$

ce qui est positif, puisque $1+k^2-h^2>0$.

$f(+\mathrm{R})$ et $(f-\mathrm{R})$ sont donc positifs, et, par conséquent, $+\mathrm{R}$ et $-\mathrm{R}$ sont tous deux extérieurs à l'intervalle des racines.

Or le produit des racines est $\mathrm{R}^2\frac{1-h^2}{1+k^2}$, il est inférieur à R^2 en valeur absolue.

Donc les deux racines sont bien entre $-\mathrm{R}$ et $+\mathrm{R}$ (elles sont toutes deux du signe de y si $h<1$; elles sont de signes opposés si $h>1$).

Conclusion. — Si $h<1$, tout point du cercle (Γ) peut être construit de deux façons différentes comme point du lieu défini ainsi que l'indique l'énoncé, les points P correspondants sont du même côté du centre que Q.

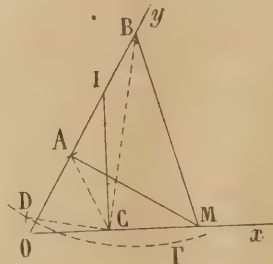
Si $1<h^2\leqslant k^2+1$, tout point de l'un des arcs IaI' et JbJ' peut être construit aussi de deux façons comme point du lieu; les points P correspondants sont de part et d'autre de O.

(Discussion analogue : M., à Guéret.)

[Bonnes solutions de MM. V. Herbiet, à Wavre; Lhôtelier, à Évreux; P. Louon, athénée d'Ixelles (Belgique); J. Tardieu, école Benoît, à l'Isle-sur-Sorgues.]

4091. — *On donne dans le plan un angle* $x\mathrm{O}y$ *de* 60° *et deux points* A *et* B *sur le côté* Oy; *le milieu* I *de* AB *se projette en* C *sur* Ox. *Trouver sur* Ox *un point* M *tel que* $\overline{\mathrm{MC}}^2=\mathrm{MA}\times\mathrm{MB}$, *c'est-à-dire tel que* MC *soit moyenne géométrique entre* MA *et* MB.

La solution suivante s'applique quelle que soit la valeur de l'angle donné $x\mathrm{O}y$.



Soit M un point ayant la propriété indiquée :

$$\mathrm{MA}\times\mathrm{MB}=\overline{\mathrm{MC}}^2; \qquad (1)$$

on sait que

$$\overline{\mathrm{MA}}^2+\overline{\mathrm{MB}}^2=2\overline{\mathrm{MI}}^2+2\overline{\mathrm{IA}}^2$$
$$=2\overline{\mathrm{MC}}^2+2\overline{\mathrm{CI}}^2+2\overline{\mathrm{IA}}^2; \qquad (2)$$

en éliminant $\overline{\mathrm{MC}}^2$ entre les équations (1) et (2), on obtient

$$\overline{\mathrm{MA}}^2+\overline{\mathrm{MB}}^2-2\mathrm{MA}\times\mathrm{MB}=(\mathrm{MA}-\mathrm{MB})^2=2(\overline{\mathrm{CI}}^2+\overline{\mathrm{IA}}^2)$$
$$=\overline{\mathrm{CA}}^2+\overline{\mathrm{CB}}^2.$$

La valeur absolue de la différence MA — MB est donc déter-

minée; elle est égale à l'hypoténuse BD d'un triangle DCB, rectangle en C, dont le côté CD = CA.

Réciproquement, si un point M de Ox est placé de façon que $(MA - MB)^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2$, on en déduit qu'il possède la propriété exprimée par l'équation (1).

On aura en effet

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 - 2MA \times MB = \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = 2(\overline{CI}^2 + \overline{IA}^2);$$

d'autre part, en vertu du théorème de la médiane,

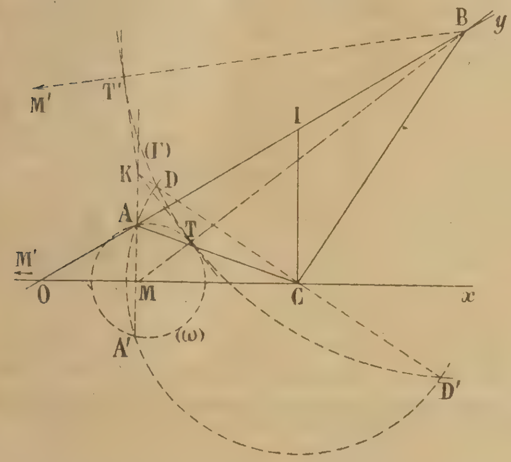
$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{MC}^2 + 2\overline{CI}^2 + 2\overline{IA}^2;$$

en retranchant la première équation de la seconde, on a bien

$$2MA \times MB = 2\overline{MC}^2.$$

(Ce calcul reproduit, en sens inverse, pour ainsi dire, le calcul précédent).

Le problème est donc ramené à un problème connu, qui est de trouver, sur la droite Ox, un point dont les distances aux deux points A et B aient une différence donnée, égale à CD.



Le point M cherché est donc le centre d'un cercle ω, qui, passant par A, touche extérieurement le cercle (Γ), dont B est le centre et le rayon BD.

Construction. — Un cercle passant par A et dont le centre est sur Ox passe aussi par le symétrique A′ de A par rapport à Ox, et réciproquement, tout cercle qui passe par A et A′ a son centre sur Ox.

Considérons alors trois cercles : (Γ), de centre B, passant en D et D′; (C), de centre C, passant aux deux mêmes points ainsi qu'en A et A′ et le cercle cherché (ω) de centre M, passant en A et A′ et touchant le cercle (Γ) en T : les axes radicaux de ces trois cercles, pris deux à deux, sont concourants; or ces axes radicaux sont les droites AA′, DD′ et la tangente commune aux deux cercles (Γ) et (ω) en T. Les deux premiers de ces axes sont connus et se coupent en K; le point T est donc un des points de contact des tangentes au cercle (Γ) menées de K.

Il peut exister deux solutions si de K on peut mener deux tangentes KT, KT′ au cercle (Γ); les points cherchés sont M et M′ où BT et BT′ coupent Ox.

Discussion. — Pour que le cercle (ω) existe, il faut et il suffit que A et A′ soient dans la même région du plan par rapport à (Γ). Or A′ est extérieur, car l'angle BCA′ est obtus, étant plus grand que ICO, donc

$$\overline{BA'}^2 > \overline{BC}^2 + \overline{CA'}^2 \quad \text{ou} \quad \overline{BA'}^2 > \overline{BD}^2;$$

pour que A soit aussi extérieur au cercle (Γ), il faut et il suffit que l'angle BCA soit aussi obtus, donc que la médiane du triangle BCA soit inférieure à la moitié de la base, donc que $CI < \frac{1}{2}AB$.

(M., à Guéret.)

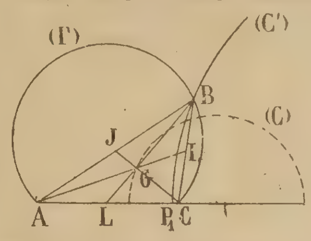
Remarque. — La figure est tracée dans un cas où il existe deux solutions, mais le point M′ est en dehors des limites.

[Bonnes solutions de MM. Bruniquel, école normale de Toulouse; H. Sebban, à Boufarik (Alger).]

SOLUTION D'EXERCICE

4053. — *Construire un triangle connaissant un angle B et les médianes m_a et m_c relatives aux côtés a et c.*

Soit ABC un triangle semblable au triangle donné. Ses médianes se coupent au point G, qui est au deuxième tiers de AI et de CJ, à partir de A et de C. On peut donc, en se donnant AC arbitraire, construire un lieu du point G : c'est le cercle (C), lieu des points dont le rapport des distances à A et à C est $\frac{MA}{MC} = \frac{m_a}{m_c}$. Le lieu du point B est alors le cercle (C′) homothétique de ce cercle (C) par rapport à L, la raison de l'homothétie étant 3. D'autre part, si l'angle ABC est connu, un second lieu du point B est le segment (Γ) capable de cet angle tracé sur la corde AC.



Le cercle (C′) et le segment (Γ) peuvent se couper en un seul point si P_1 est entre A et C, en deux points ou pas du tout si P_1 est extérieur au segment AC, ce qui est possible. Le problème posé peut donc avoir une ou deux solutions ou être impossible.

Car, une fois le point B obtenu par la construction précédente, il suffit de construire un triangle semblable à ABC, de façon que les médianes y soient égales à m_a et à m_b, au lieu d'être seulement dans le rapport de ces deux longueurs.

EXAMENS ET CONCOURS DE 1920 (*Suite*).

EXAMENS ORAUX des ÉCOLES NATIONALES D'ARTS ET MÉTIERS (*).

Arithmétique et Algèbre (*Suite*).

49. — Condition pour que

$$(Ax + B)^2 + (A'x + B')^2$$

soit carré parfait.

50. — Indiquer les applications de la réduction des fractions au même dénominateur. Peut-on réduire au même numérateur? Règle pour réduire au plus petit numérateur commun.

51. — *Calcul à la règle* :

$$x = \frac{615 \times 417}{2\,120}.$$

---

52. — Comment peut-on diviser un nombre par un produit de facteurs?

53. — [**4130** (**)]. Vérifier l'identité

$$\sqrt{1 + m + \sqrt{1 + 2m}} + \sqrt{1 + m - \sqrt{1 + 2m}} = \sqrt{2} \times \sqrt{1 + 2m}.$$

54. — [**4131**]. Résoudre

$$4^x + 4^{-x} = \frac{5}{2}.$$

(*) Les questions posées à un même candidat sont comprises entre deux traits

(**) Ce second numérotage ne porte que sur les questions dont nous avons l'intention de donner ici une solution. Ces questions seront résolues comme exercices; les abonnés ne devront pas en envoyer de solutions.

55. — Condition nécessaire et suffisante pour que deux nombres a et b divisés par un même nombre donnent le même reste.

56. — [**4132**]. Vérifier l'identité

$$4[(x^2-y^2)ab+(a^2-b^2)xy]^2+[(x^2-y^2)(a^2-b^2)-4abxy]^2 = (x^2+y^2)^2(a^2+b^2)^2.$$

57. — Résoudre les deux inégalités simultanées :

$$5x^2-7x+1<0,$$
$$x^2-9x+8<0.$$

Discuter.

---

58. — Définition de la racine cubique à une unité près par défaut d'un nombre entier. Définition du reste. A quelles conditions doit satisfaire le reste ?

59. — [**4133**]. Décomposer en facteurs

$$250(a-b)^3+2.$$

60. — Pour quelle valeur de m l'équation

$$(m+1)x^2-(3m+1)x+5m=0$$

a-t-elle : 1° deux racines séparées par le nombre 1 ; 2° deux racines plus grandes que 1 ? (*A suivre.*)

ÉCOLE SUPÉRIEURE DES POSTES ET TÉLÉGRAPHES

(*Section des rédacteurs élèves.*)

Arithmétique.

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction ordinaire soit égale à une fraction décimale.

Algèbre.

4134. — Soit le système

$$\begin{cases} 3x+(1+m)y+1-2m=0, \\ 2x+(1-m)y+1+2m=0. \end{cases}$$

Entre quelles limites doit être compris m pour que ce système admette une solution composée de deux nombres négatifs?

Géométrie.

I. — **4135.** On considère un triangle équilatéral ABC, puis l'arc BIC du cercle tangent en B et C aux côtés AB et AC. Soit I le milieu de cet arc, on mène BM et CM qui coupent respectivement AC et AB en D et E.

1° Montrer que CD = AE.

2° B′ et C′ étant les milieux de AC et AB, démontrer que les triangles IEC′ et IB′D sont égaux.

3° Quelle est en degrés la valeur de l'angle EID?

4° Lieu géométrique du centre du cercle circonscrit au quadrilatère ADME.

II. — Soient a, b, c l'hypoténuse et les côtés d'un triangle rectangle ABC. On désigne par A, B, C les volumes engendrés par ce triangle en tournant respectivement autour de BC, CA et AB en fonction de a, b, c.

Vérifier que l'on a

$$\frac{1}{A^2}=\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

4136. — Vérifier l'identité

$$\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

En déduire la sommation des termes de la suite

$$\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{4}+4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}.$$

Quelle est la limite de cette somme quand n augmente indéfiniment?

4137. — Deux lingots A et B, composés d'alliages d'argent et de cuivre à des titres différents, ont respectivement pour volumes $327^{cm^3},18$ et $137^{cm^3},34$; le rapport de leurs titres est $\frac{6}{7}$; le rapport de leurs poids est $\frac{7}{3}$. Trouver le poids et les titres de ces deux lingots sachant que la densité de l'argent est 10,5 et celle du cuivre 8,9.

N. B. — On établira tout d'abord que le poids d'argent contenu dans le premier lingot est le double du poids d'argent contenu dans le second lingot.

Les solutions purement algébriques sont admises.

(*B. S., Allier, aspirants, mars* 1920.)

4138. — Deux vases A et B de même poids contiennent des quantités d'eau différentes. Le poids total de A est les $\frac{4}{5}$ de celui de B. Si l'on verse le conteuu de B dans A, ce dernier pèse alors 8 fois plus que B vide. Sachant que le poids de l'eau contenue dans B surpasse celui de l'eau contenue dans A de 50 grammes, on demande le poids de chaque vase et le poids du liquide qu'il contenait primitivement.

(*B. S., Dijon, aspirantes, mars* 1920.)

4139. — Un canon envoie un obus à une distance de $9\,180^m$. La vitesse moyenne de l'obus est de 540^m par seconde et celle du son de 340^m par seconde. On demande à quelle distance du canon se trouve un soldat placé sur la ligne de tir dans chacun des cas suivants :

1° Il ne distingue pas le bruit du canon du bruit de l'éclatement de l'obus.

2° Le bruit du canon arrive à son oreille une seconde avant le bruit de l'éclatement.

Vérifier les résultats.

(*B. S., Seine-et-Marne, aspirants, mars* 1920.)

4140. — Trouver suivant les valeurs de m le nombre des racines de l'équation

$$(m-1)x^4-2mx^2+(m-2)=0.$$

(*B. S., Jura, aspirants, mars* 1920.)

4141. — Le tunnel du mont Cenis est plus long que celui de l'Arlberg de $1\,980^m$, mais plus court que celui du Gothard de $2\,690^m$.

Le triple de la longueur du tunnel de l'Arlberg dépasse de $3\,600^m$ la somme des longueurs des deux autres.

Quelles sont les longueurs des trois tunnels?

(*Examen autrichien.*)

4142. — On considère trois équations du second degré :

$$x^2-px+q=0,$$
$$x^2-p'x+q'=0,$$
$$x^2-p''x+q''=0,$$

telles que, la première ayant deux racines a et b, la seconde ait pour racines b et c et la troisième c et a (a, b et c étant trois nombres différents).

1° Quelles relations doivent exister entre les six coefficients de ces trois équations?

2° Montrer que si p, p' et p'' sont donnés, on peut calculer q, q' et q''.

3° Appliquer au cas où $p=3$, $p'=5$, $p''=9$. Calculer les trois nombres a, b, c qui, associés deux à deux, donnent les racines des trois équations.

4143. — Résoudre l'équation

$$\sqrt{x+6}+\sqrt{x-10}=\sqrt{x+17}+\sqrt{x-15}.$$

4144. — On découpe dans une feuille de carton un secteur circulaire AOB, dont le rayon R est donné et dont l'angle au centre AOB $=x$. En courbant la feuille de façon à rapprocher les rayons OA et OB, on forme la surface d'un cône de révolution; déterminer l'angle x de façon que le volume de ce cône soit le plus grand possible.

4145. — Déterminer une sphère qui passe par deux points donnés de l'espace et qui touche deux droites parallèles, dont le plan ne contient aucun des deux points.

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie Paul BRODARD.

23e Année. 15 Novembre 1920. No 4.

L'Éducation Mathématique

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

PRIX DU NUMÉRO : France et Colonies, 0 fr. 60. Étranger, 0 fr. 70.
ABONNEMENT ANNUEL : France et Colonies, 10 fr. Étranger, 12 fr.

Tous les abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, l'on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction : Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Abonnements : Librairie **Vuibert**, Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

L'INVERSION (*Suite.*)

Transformation d'une ligne courbe.

Un point M décrivant une ligne courbe (C), le point inverse M′ décrit une ligne (C′), qu'on appelle inverse de (C) par rapport au pôle d'inversion O. La courbe (C) est aussi l'inverse de (C′), car la transformation est réciproque.

Prenons sur la ligne (C) un point P, voisin de M [nous entendons par là que ce point peut venir en M en suivant un arc de la courbe (C)]; soit P′ l'inverse de P. Quand P vient se confondre avec M, la droite MP a pour position limite, par définition, la tangente à la courbe (C) au point M; en même temps, le point P′ vient se confondre avec M′ et la droite M′P′ a pour position limite la tangente à la courbe (C′) au point M′.

Considérons d'abord le cas où la puissance d'inversion est positive (fig. 1). Les triangles OPM et OM′P′ sont semblables, les angles OMP et OP′M′ sont égaux, soit α leur valeur commune : l'angle $zM'P' = \beta$, extérieur au triangle OM′P′, est égal à la somme des angles intérieurs, $\alpha + \omega$, donc $\beta - \alpha = \omega$.

Quand le rayon OPP′ se confond avec le rayon OMM′, l'angle ω devient nul, la différence des angles $zM'P'$ et OMP tend vers zéro. On peut donc énoncer ce théorème :

Les tangentes à deux courbes inverses, (C) *et* (C′), *en deux points correspondants,* M *et* M′, *sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la perpendiculaire à* MM′ *en son milieu.*

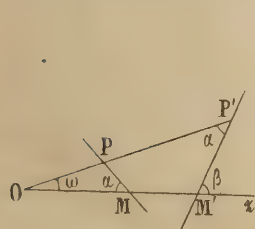


Fig. 1.

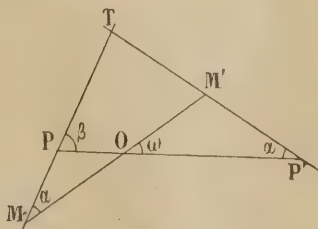


Fig. 2.

Le même théorème a lieu, lorsque la puissance de l'inversion est négative (fig. 2). Les deux angles marqués α sont égaux, en raison de la similitude des triangles OMP et OP′M′. L'angle TM′M, marqué β, extérieur au triangle M′OP′, est égal à la somme des deux angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents, $\alpha + \omega = \beta$, ou $\beta - \alpha = \omega$.

Donc, lorsque ω tend vers zéro, la différence des angles TM′M et TMM′ devient nulle; les lignes MT et M′T, qui ont pour limites les tangentes aux deux courbes inverses en M et en M′, sont symétriques par rapport à la perpendiculaire à MM′ en son milieu.

Fig. 3.

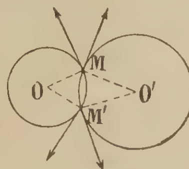
Considérons alors deux courbes (C) et (Γ) (fig. 3) ayant un point commun en M (lequel n'est pas pris pour pôle d'inversion); les courbes inverses (C′) et (Γ′) ont en commun le point M′, inverse de M. Soit yy' la perpendiculaire élevée à MM′ en son milieu; l'angle des tangentes aux deux courbes (C′) et (Γ′) en M′ est symétrique, par rapport à yy', de celui des tangentes aux courbes (C) et (Γ) en M.

Cette propriété s'énonce ainsi :

Théorème. — *L'angle de deux courbes qui se coupent en* M *est égal à celui des courbes inverses au point* M′, *inverse de* M.

On dit souvent, d'une façon abrégée, mais insuffisamment explicite, que « l'inversion conserve les angles ».

Toutefois, certaines difficultés peuvent se rencontrer dans l'application : si l'angle de deux courbes en un point d'intersection est défini comme égal à celui des tangentes en ce point, le sens de cet angle n'est pas fixé et sa grandeur même n'est pas complètement déterminée, car, lorsque des directions ne sont pas choisies sur les tangentes, on peut prendre pour leur angle deux valeurs supplémentaires l'une de l'autre. Il reste donc quelque incertitude au sujet des angles auxquels s'applique la relation d'égalité.



Dans le cas particulier des cercles, on peut convenir d'appeler angle de deux cercles le supplément de celui que forment les rayons joignant un point d'intersection au centre : cet angle n'a pas de sens défini, car les deux angles OMO′ et OM′O′ sont symétriques par rapport à la ligne des centres OO′, par conséquent de sens contraires, mais sa valeur absolue est bien déterminée.

Si l'on adopte cette définition précise, l'angle de deux cercles (C′) et (Γ′), inverses de (C) et de (Γ), est égal soit à l'angle de (C) et de (Γ), soit à son supplément.

La difficulté disparaît lorsque les deux cercles (C) et (Γ) sont orthogonaux : deux cercles orthogonaux se changent en cercles orthogonaux.

Deux cercles tangents se changent en cercles tangents : mais l'angle de deux cercles tangents est zéro ou 2π suivant la nature

du contact : deux cercles tangents extérieurement font un angle nul, deux cercles tangents intérieurement font un angle de deux droits. La nature du contact ne se conserve pas toujours : un contact extérieur peut devenir intérieur ou inversement. Le changement de nature est régi par la règle suivante : la nature du contact reste la même quand les puissances du pôle par rapport aux deux cercles transformés ont le même signe; elle change au contraire quand les puissances du pôle par rapport à ces cercles sont de signes contraires.

Pour établir ces règles, nous allons démontrer deux propriétés simples :

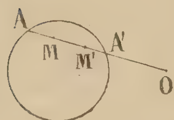
Quand on transforme un cercle en lui-même par inversion, si le pôle est extérieur au cercle (ce qui entraîne que la puissance d'inversion est positive), les points intérieurs au cercle ont pour inverses des points intérieurs; si le pôle d'inversion est intérieur au cercle (ce qui entraîne que la puissance de l'inversion est négative), les points extérieurs au cercle ont pour inverses des points intérieurs et réciproquement.

Dans le premier cas, OA, OA′, OM, OM′ ont même sens; on a

$$OM \times OM' = OA \times OA' \quad \text{et} \quad OA > OM > OA',$$

donc

$$OA \times OA' > OM \times OA' \quad \text{ou} \quad OM \times OM' > OM \times OA' \quad \text{ou} \quad OM' > OA',$$



et

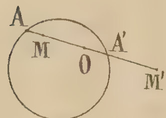
$$OM \times OA > OA \times OA'$$

ou

$$OM \times OA > OM \times OM' \quad \text{ou} \quad OA > OM',$$
$$OA > OM' > OA';$$

l'ordre de succession des points est donc O, A′, M′, M, A; M et M′ sont dans la même région. Il est superflu de démontrer qu'un point extérieur a pour inverse un point extérieur; il ne peut être inverse d'un point intérieur, d'après ce qui précède.

Dans le second cas, il faut remarquer que si OA et OM ont même sens, OA′ et OM′ ont tous deux le sens opposé. Si nous considérons les valeurs absolues des segments, l'égalité $OA \times OA' = OM \times OM'$ avec $OA > OM$ entraîne $OA' < OM'$. L'ordre de succession des points est donc A, M, O, A′, M′. On voit que M et M′ sont dans deux régions différentes, puisque la droite qui les joint traverse le cercle une seule fois entre M et M′.



Il est maintenant facile de discuter la question de la nature du contact de deux cercles. Remarquons au préalable que la puissance d'inversion peut être choisie de façon à transformer un des cercles en lui-même, car, en prenant des puissances d'inversion différentes, on obtient des figures homothétiques présentant des dispositions identiques.

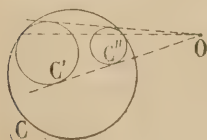
Cercles se touchant intérieurement. — Le pôle peut occuper trois positions différentes :

a) extérieur aux deux cercles;

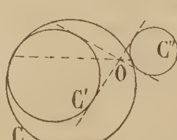
b) intérieur à l'un, extérieur à l'autre;

c) intérieur aux deux.

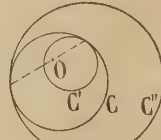
Cas a). — Le cercle (C) contient (C′), la puissance qui transforme (C) en lui-même est positive; (C′), dont tous les points sont intérieurs à (C), a pour inverse un cercle (C″) dont les points sont intérieurs à (C); le contact n'a pas changé de nature.



Cas *a*.



Cas *b*.

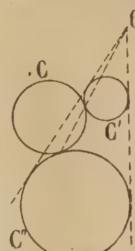


Cas *c*.

Cas b). — Le pôle est intérieur à (C), qui contient (C′), mais extérieur à (C′); la puissance qui transforme (C) en lui-même est négative; donc (C′) a pour inverse (C″), dont tous les points sont extérieurs à (C); d'autre part (O) est extérieur à (C′) et par conséquent à (C″), (C″) ne contenant pas (O), ne contient pas (C); le contact est extérieur; il a changé de nature.

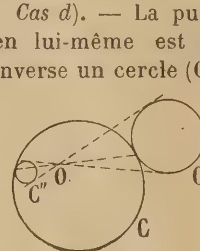
Cas c). — Le pôle est intérieur à (C′) et par suite à (C), qui contient (C′); la puissance qui transforme (C) en lui-même est négative : (C′) a pour inverse (C″), dont tous les points sont extérieurs à (C), mais qui contient O, intérieur à (C). (C″) contient donc (C) et le contact est intérieur; il n'a pas changé de nature.

Cercles se touchant extérieurement. — Le pôle ne peut occuper que deux positions : il est extérieur aux deux cercles (cas *d*) ou intérieur à un seul d'entre eux (cas *e*).



Cas *d*.

Cas d). — La puissance qui transforme (C) en lui-même est positive, donc (C′) a pour inverse un cercle (C″), dont tous les points sont extérieurs à (C). D'ailleurs ce cercle ne contient pas le cercle (C), en vertu de ce qui a été démontré dans le cas *a*); le contact est extérieur; il n'a pas changé de nature.



Cas *e*.

Cas e). — Le pôle est intérieur au cercle (C), extérieur au cercle (C′); la puissance qui change (C) en lui-même est négative, donc le cercle (C′), dont tous les points sont extérieurs, se change en un cercle (C″) dont les points sont intérieurs; le contact est intérieur; il a changé de nature. En changeant (C′) et (C″), le cas *e*) est le même que le cas *b*).

(*A suivre.*)

ARITHMÉTIQUE

4034. — *Un menuisier est chargé de couvrir la partie inférieure des murs d'une salle à manger avec des panneaux de même largeur. Quelle doit être cette largeur, sachant qu'il faut qu'elle soit comprise entre* 15^{cm} *et* 30^{cm} *et qu'il y a à couvrir 6 pans de mur : un de* $4^m,86$ *de long, deux de* $1^m,98$, *deux de* $1^m,26$ *et un de* $3^m,42$?

Même question lorsque l'intervalle entre deux panneaux consécutifs ou entre un panneau et l'extrémité du pan de mur doit être le tiers de la largeur d'un panneau.

1° Les pans ont respectivement 486, 342, 198 et 126 centimètres de largeur.

Soit x la largeur d'un panneau, a, b, c et d le nombre de panneaux qui couvrent chacun des quatre pans : ces quatre derniers nombres sont des entiers.

On aura donc

$$\left.\begin{aligned} ax &= 486 = 18 \times 27, \\ bx &= 342 = 18 \times 19, \\ cx &= 198 = 18 \times 11, \\ dx &= 126 = 18 \times 7; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

18 est le plus grand commun diviseur des quatre nombres 486, 342, 198 et 126; par conséquent, les quotients 27, 19, 11 et 7

sont premiers entre eux. On tire des équations (1) les valeurs de a, b, c et d,

$$a = 27 \times \frac{18}{x}, \quad b = 19 \times \frac{18}{x}, \quad c = 11 \times \frac{18}{x}, \quad d = 7 \times \frac{18}{x};$$

$\frac{18}{x}$ doit donc être un entier ou une fraction : mais $\frac{18}{x}$ ne peut être égal à une fraction irréductible $\frac{m}{n}$, parce que n devrait être un diviseur de 27, 19, 11 et 7 qui sont premiers entre eux (trois de ces nombres sont même premiers absolus).

Nous poserons donc $\frac{18}{x} = p$, p étant un entier quelconque.

Pour $p = 1$, nous aurons $x = 18$;	pour $p = 4$, nous aurons $x = 4,50$,
$p = 2$, — $x = 9$;	— $p = 5$, — $x = 3,60$,
$p = 3$, — $x = 6$;	— $p = 6$, — $x = 3$,

etc.,

la seule valeur de x qui satisfasse à la condition de grandeur $15 < x < 30$ est 18. On prendra donc $p = 1$: il en résulte que les quatre pans contiendront respectivement 27, 19, 11 et 7 panneaux.

Remarque. — Tous nos correspondants raisonnent comme si la mesure x d'un panneau ne pouvait être qu'un nombre entier de centimètres; il n'y a aucune raison d'admettre cela, le calcul fait ci-dessus montre que des panneaux de 4cm,50 de largeur ou de 3cm,60 pourraient couvrir les quatre pans.

2° Prenons pour inconnue y le tiers de la largeur d'un panneau; si la même condition de grandeur subsiste, cette inconnue y doit être comprise entre 5 et 10. Le tableau précédent montre qu'il y a deux valeurs de x satisfaisant à ces conditions, ce sont $x = 6$ et $x = 9$, qui correspondent à $p = 3$ et à $p = 2$.

Mais chaque panneau aura un intervalle égal à y à sa gauche, le dernier panneau aura de plus un intervalle y à droite : le nombre de bandes de largeur y, contenues soit dans les panneaux, soit entre deux panneaux, soit en bordure, est donc un multiple de 4 augmenté d'une unité. Cette condition écarte la valeur 9, car $486 = 9 \times 54$ et 54 divisé par 4 donne un reste égal à 2. Au contraire, la valeur 6 convient, car

$$486 = 81 \times 6 \quad \text{et} \quad 80 = 20 \times 4,$$
$$342 = 57 \times 6 \quad \text{et} \quad 56 = 14 \times 4,$$
$$198 = 33 \times 6 \quad \text{et} \quad 32 = 8 \times 4,$$
$$126 = 21 \times 6 \quad \text{et} \quad 20 = 5 \times 4.$$

Vérification :

20 panneaux de 18 font 360, 21 intervalles de 6 font 126, $126 + 360 = 486$;
14 — 18 — 252, 15 — 6 — 90, $252 + 90 = 342$;
8 — 18 — 144, 9 — 6 — 54, $144 + 54 = 198$;
5 — 18 — 90, 6 — 6 — 36, $90 + 36 = 126$.

N. B. — Aucune des solutions reçues n'est pleinement satisfaisante.

[Solutions assez bonnes de Mlle M. Bourreau; de MM. M. Boulvert; G. Bruniquel; G. Collé; A. Collet; A. F., à St-Pons; M. Gros; A. Henry; Huon-Leroux; Lhôtelier; R. Luce-Catinot; R. Reynard; L. Soulier.
Solutions partielles de MM. J. Briquet; M. Chatelier; F. Dupire; M. Forcade; L. Kerleroux; A. Magdinier; L.-G. Papon; M. Stévenard.]

4046. — *On écrit la suite des nombres entiers dans le système de base 10, puis on supprime tous les nombres où figure le chiffre 9. Quels rangs occupent, dans la suite ainsi réduite, les nombres 10, 100, et, en général, 10^n?*

Si nous écrivons la première dizaine

00 01 02 03 04 05 06 07 08 09,

la seconde s'obtient en remplaçant le premier chiffre (zéro) par 1, les suivantes, en écrivant 2, puis 3, 4 ... 8, 9 successivement à la place du premier chiffre à gauche.

En écrivant ces dix dizaines, on forme la première centaine; la suivante est formée de la même suite de nombres, précédés du chiffre 1; la troisième et les suivantes se forment en remplaçant le chiffre 1 des centaines successivement par 2, 3, ... 9.

Comptons maintenant combien de nombres disparaissent, quand on supprime tous ceux où se présente le chiffre 9.

De la première dizaine disparaît le nombre 09; dans les suivantes on efface 19, 29, 39, ... ; de la dixième dizaine, dont tous les nombres commencent par un 9, il ne reste rien.

Donc le nombre de termes rayés est un pour la première dizaine, et il en reste 9; le nombre de termes rayés est $9 + 10$ pour la première centaine, et il en reste $100 - 19 = 81$.

Jusqu'à 1 000 exclu, il y a dix centaines : des neuf premières il subsiste 81 nombres; la dixième disparaît tout entière : il reste donc $9 \times 81 = 729 = 9^3$ nombres.

Il est facile de s'assurer de la généralité de cette loi : si jusqu'à 10^n (exclu), il ne subsiste que 9^n nombres, cela entraîne que jusqu'à 10^{n+1} (exclu), il n'en subsiste que 9^{n+1}.

En effet, jusqu'à 10^{n+1} exclu, il y a dix groupes de 10^n nombres; de chacun des neuf premiers groupes, qui sont composés comme le premier, avec la seule différence que le premier chiffre, au lieu d'être 0, est 1, 2, 3 ou 8, il ne reste que 9^n nombres, par hypothèse; du dixième groupe, dont tous les nombres commencent par un 9, il ne reste rien. Donc il reste en tout 9×9^n ou 9^{n+1} nombres. Si maintenant on enlève le nombre 00, qui est le premier de la première dizaine, on voit que 10 aura le rang 9, 100 le rang 81 et 1 000 le rang 729; d'une façon générale, 10^n aura le rang 9^n.

Remarque I. — Il a été utile d'écrire la première dizaine en commençant par 0, pour que cette dizaine, formée des nombres d'un seul chiffre ait 10 nombres, comme les autres, et pour que la première centaine soit aussi composée comme les suivantes. Sans cette précaution, le premier groupe de 1 à 10^n exclu n'est pas semblable aux autres; il n'a que $10^n - 1$ nombres, les suivants en ont 10^n.

Remarque II. — Quand on écrit les nombres qui restent, après suppression de ceux qui présentent un chiffre 9, la suite formée est identique à celle que constitueraient les nombres successifs écrits dans le système de base 9 : mais les valeurs représentées ne seraient pas les mêmes. Le nombre qui s'écrit 10 dans le système à base neuf se lit 9 quand la base est 10. Le rang d'un nombre quelconque de la suite considérée est donc la valeur, exprimée en base 10, de ce nombre considéré comme écrit en base 9. Ainsi, le nombre 3 725 se trouve, après suppression des nombres où figure le chiffre 9, occuper le rang

$$3 \times 9^3 + 7 \times 9^2 + 2 \times 9 + 5 = 2\,777,$$

donc $3\,725 - 2\,777 = 948$ nombres précédant 3 725 ont été effacés parce qu'ils présentaient un ou plusieurs chiffres 9.

(B. Clément, école pratique de Mende.)

Remarque III. — La conclusion est la même si les nombres supprimés sont ceux où figure un autre des chiffres, 1, 2, ... 8, à l'exception du chiffre zéro.

[Bonnes solutions de Mlles A. Levifve; M. Marignac, école normale de Poitiers; de MM. R. Blondelle, pensionnat Gomberd, à Fournes (Nord); M. Boulvert, au Mans; Bourchanin, E. N. de Mâcon; G. Bruniquel, E. N. de Toulouse; E. Delmas, E. P. S. d'Aubenas; M. Devin, à Fournes; F. Dupire, à Escaudain; A. F., à St-Pons; V. Herbiet; Hiriartborde, à Brest; E. Lebœuf, école professionnelle de Vierzon; L'Hôtelier, à Évreux; P. Louon, athénée d'Ixelles; M., à Guéret; J. Millour; R. Reynard, au camp du Ruchard; L. Soulier, à Sioniac (Corrèze); J. Tarnus, E. P. S. de Nancy.
Assez bonnes solutions de MM. Chabaud; A. Collet; E. Guicheney; G. Pichon.]

4072. — *Trouver tous les nombres de trois chiffres tels qu'en leur ajoutant deux unités on obtienne la même somme qu'en multipliant par 5 la somme des produits deux à deux de leurs chiffres.*

Soient a, b, c les trois chiffres du nombre, a étant différent de zéro. On doit avoir

$$100a + 10b + c + 2 = 5(ab + bc + ca);$$

il faut donc que $c + 2$ soit multiple de 5, c'est-à-dire que $c = 3$ ou $c = 8$. Examinons l'une après l'autre ces deux hypothèses.

1° $c = 3$. On a, en divisant les deux membres par 5,

$$20a + 2b + 1 = ab + 3(b + a),$$

ou

$$17a - b - ab + 1 = 0,$$

ce que l'on peut écrire, en ajoutant 16 aux deux membres,

$$(a + 1)(17 - b) = 16.$$

$(a + 1)$ et $(17 - b)$ sont deux facteurs de 16; mais $a + 1$ est supérieur ou égal à 2 et $17 - b$ supérieur ou égal à 8. Il faut donc que $a + 1 = 2$ et $17 - b = 8$, cela donne $a = 1$, $b = 9$ et par suite, puisque $c = 3$, le nombre est 193. On a bien, en effet,

$$193 + 2 = 195;$$
$$1 \times 9 + 1 \times 3 + 9 \times 3 = 39 \quad \text{et} \quad 5 \times 39 = 195.$$

2° $c = 8$. On a, en divisant par 5,

$$20a + 2b + 2 = ab + 8(a + b)$$

ou

$$ab - 12a + 6b = 2;$$

en retranchant des deux membres le produit 6×12, on peut mettre l'équation sous la forme

$$(a + 6)(12 - b) = 70;$$

$(a + 6)$ et $(12 - b)$ sont deux facteurs de 70; le premier est au moins égal à 7 et au plus égal à 15.

On peut donc prendre :

$a + 6 = 14$,	et par suite	$12 - b = 5$;	$a = 8$,	$b = 7$;
$a + 6 = 10$,	—	$12 - b = 7$;	$a = 4$,	$b = 5$;
$a + 6 = 7$,	—	$12 - b = 10$;	$a = 1$,	$b = 2$;

on trouve ainsi trois autres nombres, qui sont 878, 458, 128.

Ils satisfont certainement à la condition posée; la vérification n'est pas nécessaire, elle n'est d'ailleurs pas difficile à faire.

(François DUPIRE, à Escaudain, Nord.)

Remarque. — On peut résoudre autrement en nombres entiers les équations

$$17a - b = ab - 1, \qquad (1)$$

et

$$12a - 6b = ab - 2; \qquad (2)$$

la première, résolue par rapport à a, donne

$$a = \frac{b - 1}{17 - b},$$

or a est égal ou supérieur à 1, donc $b - 1 \geqslant 17 - b$, ou $b \geqslant 9$; on ne peut donc donner à b que la valeur 9, qui fournit une valeur entière acceptable de a, $a = \frac{9 - 1}{17 - 9} = 1$.

On obtient ainsi la solution 193.

La seconde équation, résolue de la même façon par rapport à a, donne

$$a = \frac{6b - 2}{12 - b} = \frac{70}{12 - b} - 6;$$

la fraction $\frac{70}{12 - b}$ doit donc être un entier au moins égal à 7. On pourra prendre

$b = 2$, d'où $a = 1$,
$b = 5$, d'où $a = 4$,
$b = 7$, d'où $a = 8$.

On obtient ainsi les trois autres solutions, 128, 458, 878.

(M., à Guéret.)

[Bonnes solutions de MM. A. Bal; A. Cieutat, au Hâvre; L'Hôtelier, à Évreux; J. Millour, à la Forêt (Finistère); R. Reynard, au camp du Ruchard (Indre-et-Loire).

Assez bonnes solutions de M[lle] Calmon; MM. F. A. G., à St-Pons; E. Masdupuy; A. Ricoux.]

ALGÈBRE

4032. — *On donne trois droites perpendiculaires à une droite* ABC *aux points* A, B *et* C; *les couper par deux lignes, abc et a'b'c', parallèles à* ABC *et dont la distance est donnée, de façon que les aires des rectangles* AacC *et* Bb'c'C *aient un rapport donné.*

Le problème présente deux cas, suivant que les parallèles sont d'un même côté de ABC, ou bien de part et d'autre.

Premier cas. — Posons $Bb = x$ et $Bb' = y$; par hypothèse, on connaît la valeur absolue de la différence $|Bb - Bb'| = |x - y| = d$; d'autre part, on connaît aussi le rapport $\frac{x}{y}$ par la condition

$$\frac{AC \times Bb}{BC \times Bb'} = k, \qquad (k, \text{ rapport donné})$$

qui donne

$$\frac{x}{y} = k\frac{BC}{AC}.$$

Le problème est ramené à calculer deux longueurs, c'est-à-dire deux nombres arithmétiques, dont on connaît la différence et le rapport.

Si $k.BC > AC$, x est la plus grande longueur et $d = x - y$. On trouve alors

$$x = d\frac{k.BC}{k.BC - AC}, \qquad y = d\frac{AC}{k.BC - AC}.$$

Si $k.BC < AC$, y est la plus grande longueur et $d = y - x$, on trouve

$$x = d\frac{k.BC}{AC - k.BC}, \qquad y = d\frac{AC}{AC - k.BC}.$$

On peut dire que, dans tous les cas,

$$x = d\frac{k.BC}{|AC - k.BC|}, \qquad y = d\frac{AC}{|AC - k.BC|}.$$

Le problème est impossible si $k.BC = AC$; à part ce cas exceptionnel, il a une solution et une seule.

(E. DELMAS, école primaire supérieure d'Aubenas.)

Solution géométrique. — Construisons deux rectangles $A\alpha\gamma C$ et $B\beta'\gamma'C$, dont les surfaces soient entre elles dans le rapport k (fig. 1); ayant pris pour $A\alpha$ une longueur arbitraire, nous aurons

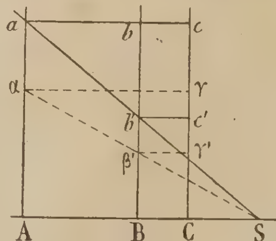


Fig. 1.

$$\frac{A\alpha.AC}{B\beta'.BC} = k,$$

donc

$$B\beta' = A\alpha.\frac{AC}{k.BC}.$$

Quelle que soit la longueur $A\alpha$, arbitrairement choisie, la droite $\alpha\beta'$ coupe ABC en un point fixe S, car

$$\frac{SA}{SB} = \frac{A\alpha}{B\beta'} = k\frac{BC}{AC} = \text{Constante}.$$

Réciproquement, si une droite menée par S coupe $A\alpha$ en a et $B\beta'$ en b', on aura

$$\frac{Aa \times AC}{Bb' \times BC} = \frac{SA \times AC}{SB \times BC} = \frac{A\alpha \times AC}{B\beta' \times BC} = k.$$

Le problème revient à mener par S une droite coupant $A\alpha$ en a et $B\beta'$ en b', de façon que la projection ga de ab' sur Aa ait une longueur donnée d (fig. 2).

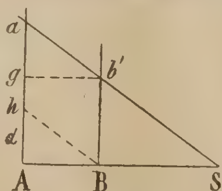


Fig. 2.

Les deux côtés de l'angle droit du triangle rectangle gab' sont connus et par conséquent les angles sont déterminés : portons sur Aa la longueur $Ah = d$, joignons les points h et B; la droite Sab' demandée est la parallèle à Bh menée par S.

Le problème a une solution, à moins que ab' ne soit parallèle à ABC, ce qui arrive si $k.BC = AC$. C'est le cas d'impossibilité (nous ne regardons pas comme différentes les deux solutions qui sont symétriques par rapport à la droite ABC).

Deuxième cas. — Les parallèles sont de part et d'autre de la ligne ABC. Dans ce cas, en appelant x et y les longueurs inconnues Bb et Bb', on voit, comme précédemment, que le rapport de ces longueurs est connu et égal à $k.\frac{BC}{AC}$; mais la distance d des deux parallèles est la somme $x+y$, et non plus la différence.

Le problème est donc ramené à trouver deux nombres arithmétiques, connaissant leur somme et leur rapport, ou, en d'autres termes, à partager d en deux parties proportionnelles à k.BC et à AC. Ce problème est toujours possible et n'a qu'une solution.

La solution géométrique est analogue à celle du premier cas. Il faut placer les deux rectangles $A\alpha\gamma C$ et $B\beta'\gamma'C$ l'un d'un côté de ABC, l'autre de l'autre. Le point S' où $\alpha\beta'$ coupe AB est alors entre A et B.

(E. GUICHENEY, école normale de Constantine.)

[Bonnes solutions de MM. A. Arnaud, à Decize; F. Baujard, à Cléry; G. Bruniquel, école normale de Toulouse; M. Chatelier, à la Montagne; A. F., à Saint-Pons; M. Forcade; J. Goudin; L. Goyard, collège de Villefranche; J. Grall, à Landivisiau; V. Herbiet; P. Louon, athénée d'Ixelles; R. Luce-Catinot, lycée de Valence; Magdinier, à Saint-Quentin; J. Millour; J. Redon, école Hanley, à Thiais; L. Soulier, à Sionac; M. Stévenard, à Auchel; G. Vergnon.

Assez bonnes solutions de MM. Adelle; A. Lamure.]

4089. — *Résoudre l'équation*

$$\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}}+\sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}}=\frac{13}{6}.$$

Prenons pour inconnue auxiliaire

$$\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}}=y;$$

l'équation proposée s'écrit alors

$$y+\frac{1}{y}=\frac{13}{6}$$

ou

$$6y^2-13y+6=0;$$

ses racines sont données par la formule

$$\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{12}=\frac{13\pm\sqrt{25}}{12}.$$

Une valeur de l'inconnue y est $\frac{3}{2}$, l'autre $\frac{2}{3}$ (on était certain d'avance que le produit des racines de l'équation serait égal à l'unité).

On calculera donc x par l'équation

$$\frac{x+3}{5x+2}=y^3,$$

qui donne

$$x+3=\frac{27}{8}(5x+2)$$

et

$$x+3=\frac{8}{27}(5x+2).$$

La première équation donne

$$x=-\frac{30}{127},$$

la seconde

$$x=5.$$

L'équation proposée a donc deux solutions :

$$x'=-\frac{30}{127}, \qquad x''=+5.$$

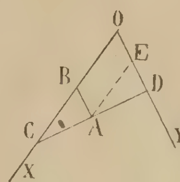
(Robert DESTOBÈRE, à Menin, Belgique.)

[Bonnes solutions de MM. A. Authier; L. Bordron; G. Bruniquel; A. Cieutat; J. Dougados; A. F., à St-Pons; P. Faucheux; M. Forcade; M. Gros; E. Guicheney; M. Guilluy; G. Knoll; Lhôtelier; P. Louon; M., à Guéret; P. Mandrou; J. Mazeau; Mouillade; Ph. Plisson; A. Popu; A. Ricoux; N. Watelet.

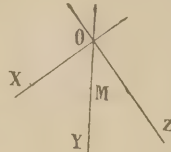
Assez bonnes solutions de MM. F. Baujard; J. Grall.

Solutions passables de MM. F. Dupire; J. Laporte; J. Mauhin; L. Soulier; Ch. Vouilloux.]

GÉOMÉTRIE



4045. — *Soit un angle* XOY, A *un point pris à l'intérieur de l'angle. Par* A, *on mène la parallèle à* OY *jusqu'au point* B *où elle rencontre* OX, *et on prend sur* BX *un segment* BC *égal à* OB. *On mène la droite* CA *qu'on prolonge jusqu'au point* D *où elle rencontre* OY.



Démontrer que le point A *est le milieu de* CD. *On a ainsi la solution du problème suivant : par un point pris à l'intérieur d'un angle, mener une sécante limitée aux côtés de l'angle et dont ce point soit le milieu.*

Application. — *Trois droites* OX, OY, OZ, *concourantes au point* O, *portent les trois médianes d'un triangle. Le point* M, *pris sur* OY, *est le milieu de l'un des côtés.*

Construire le triangle.

(*Bourses des lycées et collèges de jeunes filles, 1920.*)

Les deux droites AB et OY étant parallèles par construction, le théorème de Thalès, appliqué aux droites CD et CO, coupées par ces parallèles, donne

$$\frac{CB}{BO}=\frac{CA}{AD}=1,$$

A est donc le milieu de CD.

On peut démontrer cette propriété en s'appuyant seulement sur des propriétés du premier livre : prenons sur OY le segment OE = BA, la figure OBAE est alors un parallélogramme, car BA et OE sont égaux et parallèles. Il en résulte que OB = EA = BC, et que de plus EA et BC sont parallèles.

Les deux triangles EAD, BCA sont alors égaux, car les côtés CB et AE, égaux d'après ce qui précède, sont compris entre des angles deux à deux égaux, comme ayant des côtés parallèles.

(L. G. PAPON, à Decize.)

Application. — Il s'agit de mener par M une droite, coupant OX en A, OY en C, de façon que M soit le milieu de AC. C'est le problème résolu ci-dessus.

Cette droite étant menée, on trouvera le troisième sommet B, en prolongeant MO au delà de O, d'une longueur double de MO. La ligne BM sera une médiane du triangle ABC, puisque M est le milieu de AC, et O sera bien le point de concours des médianes, étant au tiers de MB à partir de M.

(L. SOULIER, à Sionac, Corrèze.)

[Bonnes solutions de Mlle A. Levifve; de MM. A. Bal; P. Bauer; G. Bertrand; M. Beyneix; M. Boulvert; G. Bruniquel; J. Chabaud; M. Chatelier; B. Clément; A. Collet; E. Delmas; G. Démaret; F. Dupire; A. F., à St-Pons; M. F., à Arance; P. Faucheux; J. Grall; E. Guicheney; V. Herbiet; M. Lascoux; Lhôtelier; Hiriartborde; M. Lowichi; P. Louon; J. Mauhin; Mazeau; H. Micard; J. Périn; G. Pichon; P. Renaud; R. Reynard; J. Robert; Saliceti; M. Stévenard; G. Vergnon; A. Wehrung.]

4058. — *Soient* A *et* B *deux points symétriques l'un de l'autre par rapport au centre* O *d'une circonférence* (O) *et un point* M *sur cette circonférence; les cordes* MA, MB *et le diamètre* MO *coupent la circonférence en* A', B' *et* M'; *montrer que la droite* A'B' *et la tangente en* M' *se coupent sur le diamètre* AB.

Appelons P et Q les points où MA et MB coupent la tangente en M'. La droite MM' est la hauteur du triangle PMQ, les points A'

et B′ sont les projections du pied de la hauteur sur les côtés MP et MQ.

D'autre part, le quadrilatère M′AMB est un parallélogramme, car le point O où les diagonales concourent est le milieu de chacune d'elles. On est donc amené à démontrer le théorème suivant :

On projette le pied M′ de la hauteur MM′ d'un triangle PMQ en A′ et B′ sur les côtés MP et MQ; on mène par M′ la parallèle à MP, coupant MQ en B, et la parallèle à MQ, coupant MP en A : les droites AB et A′B′ concourent sur la base PQ du triangle.

Soit S le point où la transversale A′B′ coupe la base : le théorème de Ménélaüs donne

$$\frac{SP}{SQ} \times \frac{B'Q}{B'M} \times \frac{A'M}{A'P} = 1; \qquad (1)$$

or les triangles QM′M et PM′M sont rectangles, le rapport des segments déterminés sur l'hypoténuse par la hauteur est égal au carré du rapport des côtés de l'angle droit : l'égalité (1) se change donc en

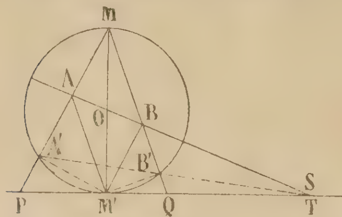


Fig. 1.

$$\frac{SP}{SQ} \times \left(\frac{M'Q}{M'M}\right)^2 \times \left(\frac{M'M}{M'P}\right)^2 = 1,$$

ce qui donne

$$\frac{SP}{SQ} = \left(\frac{M'P}{M'Q}\right)^2. \qquad (2)$$

La ligne AB coupe PQ en T; nous allons déterminer le rapport $\frac{TP}{TQ}$. Appliquons le théorème de Thalès, d'abord aux parallèles PA et M′B, coupées par TM′P et TBA, puis aux parallèles QB et M′A, coupées par TQM′ et TBA; nous aurons les proportions

$$\frac{TP}{TM'} = \frac{PA}{M'B} \quad \text{et} \quad \frac{TM'}{TQ} = \frac{M'A}{QB}, \qquad (3)$$

d'où l'on tire, en faisant le produit membre à membre,

$$\frac{TP}{TQ} = \frac{PA \times M'A}{M'B \times QB}.$$

Mais les triangles PAM′ et M′BQ sont semblables; on en déduit que

$$\frac{PA}{M'B} = \frac{M'A}{QB} = \frac{PM'}{M'Q};$$

le produit des deux premiers rapports est égal au carré du troisième. On a donc

$$\frac{TP}{TQ} = \left(\frac{PM'}{QM'}\right)^2.$$

Les deux rapports $\frac{TP}{TQ}$ et $\frac{SP}{SQ}$, positifs l'un et l'autre, étant égaux, les points S et T coïncident.

N. B. — Les démonstrations suivantes sont moins élémentaires, nous les reproduisons cependant, parce qu'elles sont assez rapides, et parce que la théorie des faisceaux harmoniques et du rapport harmonique, par un progrès nécessaire, est entrée dans l'enseignement de la géométrie.

Deuxième démonstration. — Menons Mx et M′y, respectivement parallèle et perpendiculaire à AB (fig. 2) : soit M′S la tangente en M′, I et S les points où A′B′ rencontre M′y et M′S. Les segments OA et OB étant opposés, le faisceau M(ABOx) est harmonique; il en est de même du faisceau M′(A′B′Ty), dont les rayons sont respectivement perpendiculaires à ceux du premier; I est donc conjugué harmonique de S par rapport à A′ et à B′ et M′y est la polaire de S par rapport au cercle, ce qui entraîne que OS est perpendiculaire à M′y; S est donc un point de AOB.

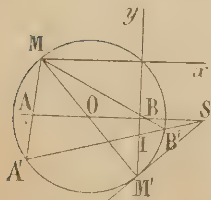


Fig. 2.

Troisième démonstration. — Soient P et Q les points où la tangente en M′ rencontre MA′ et MB′ (fig. 1). La figure MAM′B est un parallélogramme (voir la première solution), M′A′ et M′B′ sont les rayons respectivement perpendiculaires à M′B et M′A. Le faisceau M′(PA′AM) a des rayons respectivement perpendiculaires à ceux du faisceau M′(MBB′Q); leurs rapports anharmoniques sont donc égaux,

$$(PA'AM) = (MBB'Q) = (QB'BM);$$

les divisions PA′AM et QB′BM ont en commun le point M, donc PQ, A′B′ et AB concourent.

Quatrième démonstration. — Si A et B se déplacent symétriquement sur le diamètre COD (fig. 3), les rayons MAA′ et MBB′ engendrent des faisceaux en involution. On sait alors que les cordes telles que A′B′, qui joignent deux points correspondants du cercle, passent par un point fixe.

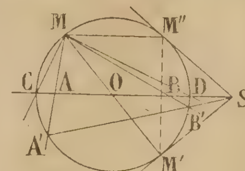


Fig. 3.

Or C et D sont deux positions correspondantes de A′ et B′. D'autre part, quand A et B sont confondus en O, A′ et B′ sont confondus en M′ et la corde A′B′ devient la tangente au cercle en M′. Donc les droites CD (ou AB), A′B′ et M′S sont concourantes.

Remarque. — Lorsque A et B s'éloignent à l'infini, les deux rayons sont encore confondus avec la parallèle à CD menée par M, et coupant le cercle en M″. La corde A′B′ devient alors la tangente en M″, qui passe aussi par S.

(M., à Guéret.)

Cette question a été traitée de différentes façons par nos correspondants : il est intéressant de comparer les solutions, qui ont des points de départ très éloignés et arrivent aux mêmes conclusions.

La solution suivante applique le théorème de Pascal, relatif à un hexagone inscrit dans un cercle :

Cinquième solution. — Soit B″ le point diamétralement opposé à B′ (fig. 4) : B″M′ est symétrique de MB′ par rapport à O, donc M′B″ passe en A. Soit R le point de concours de B′A′ et de la tangente en M′ au cercle (O). Considérons l'hexagone inscrit A′B′B″M′M′M, dont deux sommets consécutifs sont confondus en M′ et dont par conséquent un côté est constitué par la tangente au cercle en M′. Les points d'intersection des côtés opposés pris deux à deux sont trois points en ligne droite.

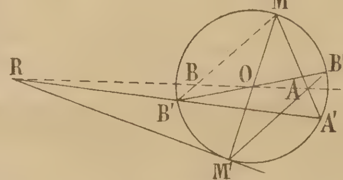


Fig. 4.

A′B′ et la tangente en M′ se coupent en R,
B′B″ et M′M se coupent en O,
B″M′ et MA′ se coupent en A;

ce qui démontre le théorème.

(Jean MILLOUR, à la Forêt, Finistère.)

La démonstration suivante, assez élémentaire comme principe, emploie des considérations d'angles; nous avons souvent dit que des démonstrations de ce genre sont rarement valables pour toutes les dispositions possibles que peut présenter la figure. Il est nécessaire de montrer que le principe de la démonstration et le résultat subsistent quand la disposition de la figure varie, ce qui exige souvent une discussion laborieuse.

Sixième solution. — La corde A′B′ coupe le diamètre AOB en R (fig. 5). Je dis que la droite M′R est la tangente au cercle (O) en M′. Menons B′H, parallèle à AB et coupant MM′ en I; le point I est le milieu de HB′, parce que O est le milieu de AB, parallèle à HB′. Soit alors J le milieu de A′B′, IJ est parallèle à MA et l'on a les égalités d'angles

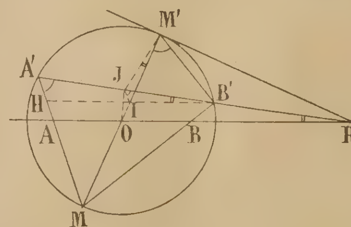


Fig. 5.

$$IJB' = MA'B' = IM'B',$$

ce qui entraîne que le quadrilatère IJM′B′ est inscriptible, et, par conséquent, que

$$\widehat{OM'J} = \widehat{IB'J} = \widehat{ORJ}.$$

Le quadrilatère OJM'R est donc aussi inscriptible, et

$$\widehat{OM'R} = \widehat{OJR} = \text{un droit},$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

(ANDRÉ BAL, étudiant en médecine.)

[Bonnes solutions de MM. A. Bal; F. Baujard, à Cléry; G. Bruniquel, école normale de Toulouse; M. Crabouillet, école professionnelle de l'Est, Nancy; J. Goudin, à Agen; F. Lefèvre, à Guérigny; Lhôtelier, postes et télégraphes d'Évreux; Mazeau, lycée de Montluçon; A. Popu; M. Robineau, école normale d'Angers; A. Valentini, école primaire supérieure de l'Isle-sur-Sorgue.]

SOLUTIONS D'EXERCICES

4054. — *On donne un triangle quelconque* ABC; *sur* BC *on construit deux triangles équilatéraux* BCD *et* BCD'. *Démontrer que*

$$\overline{AD}^2 + \overline{AD'}^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Le milieu I de DD' est aussi celui de BC. En appliquant aux triangles BAC et DAD' le théorème de la médiane, on a

$$\overline{AD}^2 + \overline{AD'}^2 = 2\overline{AI}^2 + 2\overline{ID}^2 = 2\overline{AI}^2 + \frac{3}{2}a^2;$$

et
$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AI}^2 + \frac{1}{2}a^2;$$

on obtient la relation proposée en retranchant la seconde équation membre à membre de la première.

4059. — *Résoudre le système*

$$x + y + z = 1, \quad (1)$$
$$ax + by + cz = h, \quad (2)$$
$$a^2x + b^2y + c^2z = h^2; \quad (3)$$

décomposer les valeurs trouvées en facteurs du premier degré.

Supposons $a \neq b \neq c$.

En multipliant les deux membres de la première équation par a et en retranchant de la seconde, on trouve

$$(b - a)y + (c - a)z = h - a; \quad (4)$$

de même, en multipliant les deux membres de la première équation par a^2, et en retranchant de la troisième, on trouve

$$(b^2 - a^2)y + (c^2 - a^2)z = h^2 - a^2. \quad (5)$$

Le système des équations (4) et (5) ne contient plus que deux inconnues. En multipliant les deux termes de l'équation (4) par $b + a$, et en retranchant de la troisième, on fait disparaître y, et l'on forme l'équation en z :

$$[c^2 - a^2 - (c - a)(b + a)]z = h^2 - a^2 - (h - a)(b + a).$$

On peut mettre $(c - a)$ en facteur dans le coefficient de z, et $h - a$ dans le terme constant; il vient ainsi

$$(c - a)(c + a - b - a)z = (h - a)(h + a - b - a)$$

ou

$$(c - a)(c - b)z = (h - a)(h - b);$$

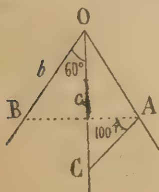
on trouve ainsi la valeur de z :

$$z = \frac{(h - a)(h - b)}{(c - a)(c - b)};$$

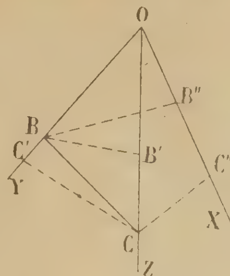
les valeurs des deux autres inconnues se calculent en permutant circulairement a, b et c :

$$x = \frac{(h - b)(h - c)}{(a - b)(a - c)}, \qquad y = \frac{(h - c)(h - a)}{(b - c)(b - a)}.$$

4060. — *Étant donné un trièdre* O(XYZ) *dont les faces ont* 60°, *on porte sur* OY *une longueur* OB = b, *sur* OZ *une longueur* OC = c; *on demande de calculer la longueur* OA = a *qu'il faut porter sur* OX *pour que l'angle* BAC *soit de* 100 *grades.*



La solution géométrique du problème est immédiate : le point A est déterminé par l'intersection avec OX de la sphère qui a BC pour diamètre. Cette sphère coupe OB en C' qui est la projection de C sur OX et OC en B' qui est la projection de B; on sait, puisque l'angle BOC vaut 60°, que $OC' = \frac{OC}{2}$ et $OB' = \frac{OB}{2}$. Donc la puissance de O par rapport à la sphère est $\frac{1}{2}bc$.



Les points B et C se projettent sur OA en B'' et C'': OB'' et OC'' sont respectivement égaux à $\frac{OB}{2}$ et $\frac{OC}{2}$; le centre de la sphère, qui est le milieu de BC, se projette au milieu de B''C'', à une distance de O égale à $\frac{1}{4}(b + c)$. La sphère coupe donc OX en deux points A et A', tels que la somme OA + OA' soit égale à $\frac{1}{2}(b + c)$ et que le produit OA × OA' soit égal à $\frac{1}{2}bc$. On est donc amené à construire deux longueurs, connaissant leur somme et leur moyenne géométrique.

La construction est possible si la moyenne géométrique est donnée inférieure à la demi-somme; cela fournit la condition

$$\frac{1}{16}(b + c)^2 > \frac{1}{2}bc, \quad \text{ou} \quad b^2 + c^2 - 6bc > 0;$$

comme rien ne distingue b de c, on peut supposer $b > c$; la condition devient alors

$$\frac{b}{c} > 3 + 2\sqrt{2}.$$

Solution algébrique. — La condition nécessaire et suffisante pour que le triangle BAC soit rectangle est que $\overline{BA}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2$. On peut exprimer les carrés des côtés BA et CA dans les triangles BOA et COA, qui ont un angle de 60°, parce que la projection d'un côté de cet angle sur l'autre est la moitié du côté projeté. On forme ainsi l'équation

$$b^2 + c^2 - bc = b^2 + x^2 - bx + c^2 + x^2 - cx$$

qui, ordonnée, devient

$$2x^2 - (b + c)x + bc = 0;$$

la demi-somme des racines est bien $\frac{1}{4}(b + c)$, le produit $\frac{1}{2}bc$.

EXAMENS ET CONCOURS DE 1920 (*Suite*).

EXAMENS ORAUX
des
ÉCOLES NATIONALES D'ARTS ET MÉTIERS (*)

Arithmétique et Algèbre (*Suite*).

61. — [**4146** (**)]. Trouver le reste de la division par 11 du produit $8\,381^{529} \times 237^{421}$.

62. — Simplifier l'expression

$$\frac{7a^3 - 2a^2b - 63ab^2 + 18b^3}{5a^4 - 3a^3b - 43a^2b^2 + 27ab^3 - b^4}.$$

63. — *Calcul logarithmique.* — Calculer le rayon de base d'un cône de révolution, de volume V = 1 000^{cm}, dont la section est un triangle équilatéral.

(*) Les questions posées à un même candidat sont comprises entre deux traits.

(**) Ce second numérotage ne porte que sur les questions dont nous avons l'intention de donner ici une solution. Ces questions seront résolues comme exercices; les abonnés ne devront pas en envoyer de solutions.

64. — [**4147**]. Simplifier

$$\frac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}.$$

65. — Condition pour que les deux équations

$$3x^2-(m-1)x+m+1=0,$$
$$2x^2-(2m-1)x+2(m+1)=0$$

aient une racine commune.

---

66. — [**4148**]. La somme des cubes de trois nombres entiers consécutifs est divisible par trois fois le terme moyen et divisible aussi par 9.

67. — [**4149**]. Résoudre le système

$$x^2+xy+y^2=39,$$
$$y^2+yz+z^2=201,$$
$$z^2+zx+x^2=147.$$

68. — Calculer à la règle la hauteur d'un cône connaissant le volume et le rayon de base : $V=1^{m3},250$, $r=0^m,43$.

---

69. — Étant donnée la fraction $\frac{a}{b}$, quel nombre faut-il ajouter aux deux termes pour avoir $\frac{c}{d}$? Application numérique.

70. — [**4150**]. Résoudre l'équation

$$(1+x+x^2)^{\frac{1}{2}}=a-(1-x+x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

71. — Calculer à la règle le volume du cube dont on donne la diagonale $d=8^{cm},45$.

(*A suivre.*)

INSTITUT CATHOLIQUE D'ARTS ET MÉTIERS DE LILLE

Arithmétique et algèbre.

ARITHMÉTIQUE

I. — **4151**. Les caves d'une usine ont une superficie de $653^{m2},4$; l'eau y monte de $0^m,05$ par heure, calculer en chevaux-vapeur la force motrice nécessaire pour maintenir ces caves à sec sachant que l'eau doit être refoulée dans un réservoir situé à une hauteur de 15^m au-dessus du niveau des caves, que les pompes fonctionnent sans arrêt et ont un rendement de 60,5 % de leur force motrice.

Quand un accident survient au groupe d'épuisement, il faut 3^h pour mettre en route un groupe de secours (rendement 60,5 %); calculer la force supplémentaire qu'il faudra employer pour que 2^h après la mise en marche du groupe de secours les caves soient de nouveau à sec.

L'eau refoulée sert à l'alimentation de l'usine dont la consommation par heure est exactement égale au débit des pompes, le réservoir étant cubique, calculer à 1^{cm} près quelle doit être son arête pour que la marche de l'usine ne soit pas interrompue pendant les 3^h nécessaires à la mise en route du groupe de secours. On supposera le réservoir rempli au moment de l'accident. On sait que le cheval-vapeur est une force capable d'élever 75^{kg} à 1^m de hauteur en 1 seconde.

II. — **4152**. Trouver deux nombres sachant que leur somme est 581 et que le quotient de leur plus petit commun multiple par leur plus grand commun diviseur est 240.

ALGÈBRE

4153. — Résoudre et discuter le système

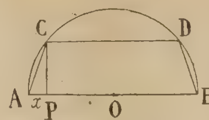
$$(m-2)x-(m+1)y=3,$$
$$\frac{x-y}{3}=\frac{(m+2)(m-1)}{(m-2)(m+1)},$$

m variant de $-\infty$ à $+\infty$, étudier les variations de signe de x et de y.

4154. — Résoudre et discuter le système

$$x+y+z=2,$$
$$x^2+y^2=z^2,$$
$$m(x+y)=xy.$$

4155. — On donne une demi-circonférence de centre O et de diamètre AB = 2R et l'on demande de trouver entre A et O un point P tel qu'en élevant en P la perpendiculaire PC à AB et en menant de C la parallèle CD à AB, on détermine un trapèze ACDB dont le périmètre soit égal à $2R+2p$.

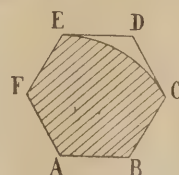


On posera $AP=x$. Discussion.

(22 *juin, de* 8 *h. à* 11 *h.*)

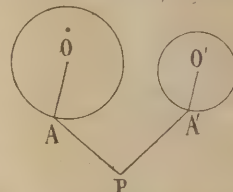
Géométrie.

4156. — On donne un hexagone régulier ABCDEF de côté a. De A comme centre avec AC pour rayon on décrit l'arc CE; on fait tourner la figure autour de AB et l'on demande de calculer :



1° la surface engendrée par le contour mixtiligne ABCEFA;

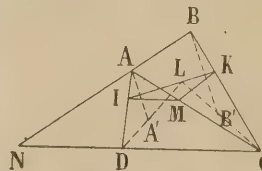
2° le volume engendré par la surface ABCEFA.



4157. — On donne deux circonférences O et O′ et un point P extérieur. On demande de mener deux rayons parallèles OA et O′A′ tels que l'on ait PA = PA′.

4158. — Étant donné un quadrilatère ABCD, on détermine sur AD et BC les points I et K tels que

$$\frac{AI}{ID}=\frac{BK}{KC}=\frac{AB}{CD}.$$



On joint I à K et par I on mène la parallèle à DC qui rencontre en M la diagonale AC; on joint M à K, prouver que :

1° IM = MK;

2° la droite IK est parallèle à la bissectrice de l'angle BNC des deux côtés AB et DC.

On construit les symétriques A′ et B′ de A et de B par rapport à IK; on joint D à A′ et C à B′, prouver que ces deux droites se coupent en un point L situé sur IK.

(23 *juin, de* 8 *h. à* 10 *h.* 30.)

Physique.

I. — **4159**. A un ballon sphérique en verre d'une capacité de 1^l est soudé un tube cylindrique de verre, AB, dont la longueur est $0^m,50$ et la section $1^{cm},2$. L'appareil étant plein d'air à la température de 0° et sous la pression de 76^{cm} de mercure, on le plonge verticalement dans une cuve à mercure à 0°; le tube est immergé sur une longueur de 40^{cm}. On demande jusqu'à quelle hauteur BC le mercure pénétrera dans le tube.

On suppose ensuite que le gaz du ballon soit refroidi à — 4° Réaumur; trouver où s'arrête le niveau du mercure dans le tube. La pression extérieure reste la même. On ne tiendra pas compte de la contraction du verre. Coefficient de dilatation des gaz : 0,0036.

II. — Chaleur de vaporisation. Définition. Mesure par la méthode des mélanges.

Chimie.

I. — L'acide sulfurique.

II. — **4160**. Quel est le poids d'oxyde de cuivre que l'on peut réduire avec l'hydrogène provenant de la décomposition de l'eau par 28^g de fer : 1° au rouge; 2° en présence des acides.

Poids atomiques :

$$H=1, \quad O=16, \quad Fe=56, \quad Cu=63.$$

(24 *juin, de* 8 *h. à* 9 *h.* 45.)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie PAUL BRODARD.

23e Année. 1er Décembre 1920. No 5.

L'Éducation Mathématique

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

PRIX DU NUMÉRO : France et Colonies, 0 fr. 60. Étranger, 0 fr. 70.
ABONNEMENT ANNUEL : France et Colonies, 10 fr. Étranger, 12 fr.

Tous les abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, l'on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

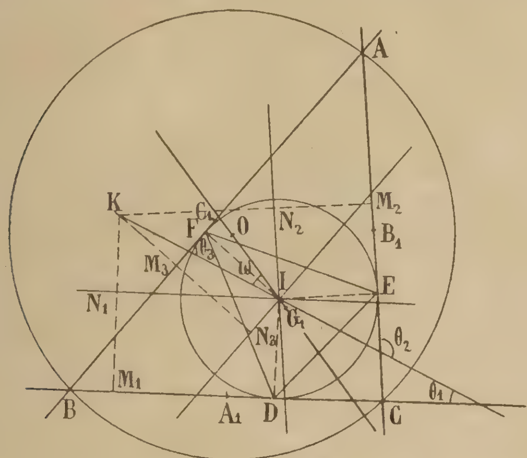
Rédaction : Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Abonnements : Librairie **Vuibert**, Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

SOMME DES DISTANCES D'UN POINT DU PLAN AUX COTÉS D'UN TRIANGLE

par M. **V. Thébault** à Ernée (Mayenne).

1. Soient A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés, D, E, F les contacts du cercle inscrit, de rayon r, avec les côtés BC, CA, AB d'un triangle; O et R le centre et le rayon du cercle circonscrit.



On a

$$\overline{A_1D} = \overline{BD} - \overline{BA_1} = (p-b) - \frac{a}{2},$$

$$\overline{B_1E} = (p-c) - \frac{b}{2}; \qquad \overline{C_1F} = (p-a) - \frac{c}{2};$$

d'où

$$\overline{A_1D} + \overline{B_1E} + \overline{C_1F} = 0.$$

Or la somme des moments des trois vecteurs ID, IE, IF par rapport au point O a pour expression

$$\overline{A_1D}.r + \overline{B_1E}.r + \overline{C_1F}.r = (\overline{A_1D} + \overline{B_1E} + \overline{C_1F}).r;$$

elle est donc nulle, et la résultante de ces trois vecteurs passe par le centre O du cercle circonscrit.

Mais si G_1 est le centre de gravité du triangle DEF, on sait que la résultante dés trois vecteurs ID, IE, IF est représentée par le vecteur $3\overline{IG_1}$.

Le rapport $\dfrac{IG_1}{OI}$ détermine la position de G_1 sur OI.

Or ce rapport égale celui des projections de IG_1 et OI sur AB; mais

$$\text{proj. } \overline{IG_1} = \frac{1}{3} \text{ proj. } 3\overline{IG_1} = \text{proj. } \overline{IE} + \text{proj. } \overline{IF} = r(\sin B - \sin A),$$

$$\text{proj. } \overline{OI} = \frac{b-a}{2},$$

d'où

$$\frac{IG_1}{OI} = \frac{2r(\sin B - \sin A)}{3(b-a)} = \frac{r}{3R}\ (*). \qquad (1)$$

Le centre de gravité G_1 du triangle DEF des contacts du cercle inscrit avec les côtés d'un triangle ABC est donc situé sur la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit à ce triangle.

2. Une transversale quelconque Δ_1 coupe BC, CA, AB et OI sous les angles θ_1, θ_2, θ_3 et ω. Sa parallèle Δ_2 menée par I détermine les mêmes angles avec les mêmes droites. Or les perpendiculaires $D\delta_1$, $E\varepsilon_1$, $F\varphi_1$, $G_1\gamma_1$ abaissées de D, E, F et G_1 sur Δ_1 sont telles que

$$\overline{D\delta_1} + \overline{E\varepsilon_1} + \overline{F\varphi_1} = 3\overline{G_1\gamma_1}.$$

De plus,

$$\cos\theta_1 = \frac{\overline{D\delta_1}}{ID}, \qquad \cos\theta_2 = \frac{\overline{E\varepsilon_1}}{IE}, \qquad \cos\theta_3 = \frac{\overline{F\varphi_1}}{IF}, \qquad \sin\omega = \frac{\overline{G_1\gamma_1}}{IG_1}$$

et

$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 = \frac{\overline{D\delta_1} + \overline{E\varepsilon_1} + \overline{F\varphi_1}}{r} = \frac{3\overline{G_1\gamma_1}}{r} = \frac{d \sin\omega}{R}, \qquad (2)$$

en tenant compte de (1) et posant $OI = d$.

Si l'on considère une droite Δ_3, perpendiculaire à Δ_1, un raisonnement analogue donne

$$\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 = \frac{d\cos\omega}{R}. \qquad (3)$$

Par conséquent, *dans un triangle inscrit à un cercle fixe et circonscrit à un autre cercle fixe, la somme des sinus et celle des cosinus des angles que forment les côtés avec une droite fixe, restent constantes pendant le déplacement. Ces sommes varient en général avec les positions de la droite.*

3. Nous désignerons par d_a, d_b, d_c des nombres algébriques dont les valeurs absolues sont les distances d'un point K aux côtés BC, CA, AB et dont le signe soit le signe + si K est, par rapport à BC, CA, AB, du même côté que les sommets opposés A, B, C, le signe — dans le cas contraire.

Soient KM_1N_1, KM_2N_2, KM_3N_3 les perpendiculaires sur les parallèles à BC, CA, AB menées par le centre I du cercle inscrit. IK coupe BC, CA, AB et OI sous les angles θ_1, θ_2, θ_3 et ω.

Posons

$$\overline{KM_1} = d_a, \qquad \overline{KM_2} = d_b, \qquad \overline{KM_3} = d_c.$$

(*) Pour simplifier, nous utilisons les formules fondamentales de la Trigonométrie.

Alors

$$\overline{KN_1} = \overline{KM_1} + \overline{M_1N_1} = d_a - r = KI \sin\theta_1,$$
$$\overline{KN_2} = \overline{KM_2} + \overline{M_2N_2} = d_b - r = KI \sin\theta_2,$$
$$\overline{KN_3} = \overline{KM_3} + \overline{M_3N_3} = d_c - r = KI \sin\theta_3,$$

d'où, en additionnant et en vertu de (3).

$$d_a + d_b + d_c = \frac{KI \times d \cos\omega}{R} + 3r.$$

Telle est l'expression de la somme des distances d'un point quelconque du plan aux côtés d'un triangle.

Cette somme reste la même lorsque K se déplace sur une perpendiculaire Δ à OI, à une distance d' de I, car

$$\cos\omega = \frac{d'}{KI}, \qquad \text{et} \qquad d_a + d_b + d_c = \frac{dd'}{R} + 3r.$$

Si $d' = 0$, $\quad d_a + d_b + d_c = 3r$;

si $d' = d$, $\quad d_a + d_b + d_c = R + r$; $\quad$ (*)

si $d' = -\frac{3Rr}{d}$, $\quad d_a + d_b + d_c = 0$.

Enfin on peut énoncer cette propriété :

Quand un triangle varie en restant inscrit à un cercle fixe et circonscrit à un autre cercle également fixe, la somme des distances d'un point fixe du plan à ses côtés reste constante; la valeur de cette constante dépend en général de la position du point dans le plan.

ARITHMÉTIQUE

4071. — *Trouver, en employant les neuf chiffres autres que zéro, trois nombres de trois chiffres chacun, tous différents, tels que l'un de ces nombres soit égal à la somme des deux autres.*

Soient $\overline{abc}$, $\overline{def}$, $\overline{ghk}$ trois nombres tels que $\overline{abc} + \overline{def} = \overline{ghk}$; la somme de leurs chiffres est celle des neuf premiers nombres soit $\frac{1}{2}(9 \times 10) = 45$; c'est un nombre impair. Pour faire la somme $\overline{abc} + \overline{def}$, il faut faire les additions partielles $c + f$, $b + e$, $a + d$. La dernière somme doit être un nombre d'un seul chiffre, puisque le nombre $\overline{ghk}$ n'a que trois chiffres; mais les deux autres sommes peuvent donner un nombre inférieur à 10 (c'est-à-dire pas de retenue), ou une somme comprise entre 10 et 20 (c'est-à-dire une retenue d'une unité).

a) Nous allons montrer qu'il est impossible qu'il n'y ait aucune retenue, car de

$$c + f = k, \qquad b + e = h, \qquad a + d = g,$$

on tire que la somme des chiffres serait égale à $2(g + h + k)$, nombre pair, ce qui est impossible.

b) Nous pouvons prouver de même qu'il est impossible que l'addition des unités et celle des dizaines donnent l'une et l'autre une retenue, car de

$$c + f = 10 + k, \qquad 1 + b + e = 10 + h, \qquad 1 + a + d = g,$$

on tire, en ajoutant membre à membre,

$$b + e + c + f + a + d + 2 = 20 + g + h + k.$$

La somme des neuf chiffres serait donc $18 + 2(g + h + k)$, nombre pair, ce qui est impossible.

Il ne reste donc que deux hypothèses : *une* des deux sommes $c + f$ ou $b + e$ et *une seule*, est comprise entre 10 et 20.

(*) Cette relation généralise une propriété connue; voir par exemple : *Relations entre les éléments d'un triangle*, formule 20, p. 40. (Librairie Vuibert.)

Nous examinerons la première hypothèse, et nous pourrons ensuite, connaissant les nombres qui répondent à la question, dans cette hypothèse, en déduire les solutions de la seconde sorte.

Supposons donc

$$c + f = 10 + k, \qquad (1)$$
$$1 + b + e = h, \qquad (2)$$
$$a + d = g; \qquad (3)$$

nous pouvons appeler $\overline{abc}$ celui des deux nombres *abc*, *def*, dont le chiffre de centaines est le plus grand, $a > d$, et nous pouvons encore supposer $b > e$ et $c > f$; à chaque solution qui satisfait à ces conditions en correspondent trois autres, ce qui forme un groupe de quatre solutions associées :

$$\begin{cases} abc & abf & aec & aef \\ def & dec & dbf & dbc \end{cases}$$

Des égalités (1), (2), (3), on déduit

$$a + b + c + d + e + f = 9 + h + g + k$$

et comme

$$a + b + c + d + e + f + g + h + k = 45,$$

il faut que

$$g + h + k = 18. \qquad (4)$$

Comme b et e sont deux nombres différents dont le plus petit est au moins égal à 1, l'égalité (2) entraîne

$$h \geqslant 4; \qquad (5)$$

on déduit de même de l'égalité (1) que

$$k \leqslant 7; \qquad (6)$$

enfin de (3) résulte que

$$g \geqslant 3. \qquad (7)$$

Si l'on tient compte des conditions (4), (5), (6), (7) et du fait que les chiffres des nombres cherchés doivent être tous différents, on voit que le nombre $\overline{ghk}$ ne peut être qu'un de ceux qui figurent dans le tableau suivant :

$h = 4$	$h = 5$	$h = 6$	$h = 7$	$h = 8$	$h = 9$
$g + k = 14$	$g + k = 13$	$g + k = 12$	$g + k = 11$	$g + k = 10$	$g + k = 9$
846	657	567	(576)	(387)	(396)
945	(756)	(765)	(675)	486	495
	954	864	873	(684)	594
		963	972	783	693
				981	792
					891

Mais si l'on suppose $k = 7$, on a $c = 9$ et $f = 8$, il faut donc rejeter 387, parce que $f = h$; si $k = 6$, on a $c = 9$ et $f = 7$; il faut écarter 756, 576, parce que g ou $h = f$, et 396 parce que $k = c$; si $k = 5$, il faut, ou bien que $c = 9$ avec $f = 6$, ou que $c = 8$ avec $f = 7$; cela fait écarter 765 et 675, parce que $h = f$.

Enfin le nombre 684 donne $c + f = 14$, ce qui exige $c = 9$, $f = 5$ (les valeurs 6 et 8 n'étant plus possibles), les seuls chiffres qui restent disponibles pour b et e sont alors 1, 2, 3 et 7 avec lesquels on ne peut satisfaire à l'égalité $b + e = 7$. Il faut donc rayer du tableau 684.

On peut alors constater que chacun des nombres qui restent fournit soit une, soit deux solutions : en effet, les 21 opérations suivantes satisfont bien aux conditions de l'énoncé :

abc	529	628	439	738	439	349	739	748	659	658	359
def	317	317	218	216	128	218	125	215	214	314	127
ghk	846	945	657	954	567	567	864	963	873	972	486

abc	569	659	657	746	368	378	478	658	567	657
def	214	124	324	235	127	216	215	134	324	234
ghk	783	783	981	981	495	594	693	792	891	891

On déduit de ce tableau un nombre quadruple de solutions, en faisant les permutations de chiffres indiquées plus haut, soit $4 \times 21 = 84$ solutions.

Si l'on fait maintenant la seconde hypothèse, savoir que la somme des unités est inférieure à 10 et que celle des dizaines surpasse 10, on aura

$$c + f = k, \qquad b + e = 10 + h, \qquad 1 + a + d = g;$$

mais si l'on compare ces équations aux équations (1), (2) et (3), on reconnaît qu'on aura les solutions correspondantes en faisant passer les chiffres de centaines des nombres trouvés précédemment au rang des unités, ce qui donne au lieu de 529 le nombre 295, etc.; on a ainsi les solutions suivantes, dont il suffit d'écrire les premières :

295	286	394	....
173	173	182	
468	459	576	

Comme les chiffres des nombres $\overline{ghk}$ sont différents, cette transposition d'un chiffre fournira des nombres tous nouveaux.

Le nombre total des solutions est donc $2 \times 84 = 168$. Les valeurs de $\overline{ghk}$, rangées par ordre de grandeur croissante, sont :

459 468 486 495 549 567² 576 594 639 648 657
675² 693 729 738 783² 792 819² 837² 873 846 864²
891² 918² 927 936 945² 954² 963 972 981²;

l'exposant 2, placé à côté d'un nombre, indique que ce nombre fournit deux groupes de quatre solutions associées : les nombres qui ne portent pas cette indication n'en fournissent qu'un.

(Solution analogue : M., à Guéret.)

N. B. — Plusieurs correspondants ont trouvé quelques solutions, sans indiquer une méthode générale permettant de les déterminer toutes. Quelques-uns même n'ont donné qu'un groupe de nombres. De telles réponses ne sont pas intéressantes : la difficulté de la question consistait précisément à trouver un procédé, soit pour construire *a priori* toutes les solutions, — ce que nous n'avons pu faire, — soit du moins pour sélectionner, le plus rapidement et le plus directement possible, les nombres cherchés, dans un ensemble qu'on aura d'abord réduit au minimum.

C'est ce que la méthode précédente a obtenu. Il est aussi très intéressant de compter le nombre de solutions que le problème admet, de former les catégories où elles peuvent se ranger, de déterminer les opérations (permutations ou autres) par lesquelles d'une solution on déduit un groupe.

Enfin, de deux solutions dont les résultats sont aussi complets, la meilleure est la plus directe et la plus brève. Sous ce rapport, quelques-unes de celles que nous avons reçues ne sont pas très satisfaisantes.

[Très bonne solution de M. F. A. G., à Saint-Pons.
Bonnes solutions de MM. Millour; R. P. L; R. Reynard.
Assez bonnes solutions de MM. A. Cieutat; Lhôtelier.]

ALGÈBRE

4107. — *Résoudre l'équation*

$$\sqrt[3]{x+49} - \sqrt[3]{x-49} = 2. \qquad (1)$$

Posons

$$u = \sqrt[3]{x+49}, \qquad v = \sqrt[3]{x-49};$$

u et v satisfont à l'équation

$$u - v = 2 \qquad (1)$$

et à la relation

$$u^3 - v^3 = 2 \times 49 = 98. \qquad (2)$$

Or on a identiquement

$$u^3 - v^3 \equiv (u - v)(u^2 + uv + v^2);$$

si dans cette identité on remplace $u^3 - v^3$ et $u - v$ par les valeurs tirées des équations (1) et (2), on trouve

$$u^2 + uv + v^2 = 49. \qquad (3)$$

On est donc amené à résoudre le système de deux équations à deux inconnues

$$u - v = 2, \qquad (1)$$
$$u^2 + uv + v^2 = 49. \qquad (3)$$

Remarquons que $(u+v)^2$ et $(u-v)^2$ sont liés par l'identité

$$3(u+v)^2 + (u-v)^2 \equiv 4(u^2 + uv + v^2),$$

qui donne, quand on y porte les valeurs de $(u-v)^2$ et de $u^2 + uv + v^2$ tirées du système

$$3(u+v)^2 + 4 = 4 \times 49,$$

donc

$$(u+v)^2 = 64,$$

et enfin

$$u + v = \pm 8.$$

Si l'on prend $u + v = +8$ avec $u - v = 2$, on a $u = 5$, $v = 3$; l'autre valeur $u + v = -8$ avec $u - v = +2$ donne $u = -3$, $v = -5$.

La première solution donne

$$\sqrt[3]{x+49} = 5,$$

d'où

$$x + 49 = 125 \qquad \text{et} \qquad x = 76,$$

(vérification : $\sqrt[3]{x-49} = \sqrt[3]{76-49} = 3$, on a bien $5 - 3 = 2$); la seconde donne

$$\sqrt[3]{x+49} = -3,$$

d'où

$$x + 49 = -27 \qquad \text{et} \qquad x = -76,$$

(vérification : $\sqrt[3]{x-49} = \sqrt[3]{-125} = -5$;
on a bien $-3 - (-5) = +2$.)

Deuxième solution. — On peut résoudre autrement le système

$$u - v = 2, \qquad (1)$$
$$u^2 + uv + v^2 = 49, \qquad (2)$$

en calculant uv, car on a identiquement

$$u^2 + v^2 \equiv (u-v)^2 + 2uv,$$

en remplaçant $u^2 + v^2$ par cette valeur dans l'équation (2), on obtient

$$(u-v)^2 + 3uv = 49,$$

d'où

$$4 + 3uv = 49,$$
$$uv = 15;$$

u et $-v$ sont donc les racines de l'équation du second degré

$$z^2 - 2z - 15 = 0,$$

qui donne

$$u = 5 \quad \text{avec} \quad -v = -3, \quad \text{donc} \quad x = +76,$$

ou

$$u = -3 \quad \text{avec} \quad -v = +5, \quad \text{donc} \quad x = -76.$$

(Solution analogue : ANDRÉ POPU, dessinateur aux usines du Périgord, à Fumel.)

Troisième solution. — On pouvait résoudre l'équation sans faire de changement d'inconnue : élevons au cube les deux membres de l'équation donnée, en appliquant la formule

$$(a-b)^3 \equiv a^3 - b^3 - 3ab(a-b),$$

nous trouvons

$$(x+49) - (x-49) - 3\sqrt[3]{x^2 - 49^2}\left[\sqrt[3]{x+49} - \sqrt[3]{x-49}\right] = 8; \quad (2)$$

or les deux premiers termes se réduisent, et, d'autre part, la quantité entre crochets est par hypothèse égale à $+2$, l'équation (2) devient alors

$$2 \times 49 - 3\sqrt[3]{x^2 - 49^2} \times 2 = 8$$

ou $$3\sqrt[3]{x^2 - 49^2} = 49 - 4 = 45,$$
$$x^2 - 49^2 = 15^3,$$
$$x^2 = 49^2 + 15^3 = 5\,776 = 76^2,$$
ce qui donne deux valeurs de x, $+76$ et -76.

(A. LONGUET.)

N. B. — L'élévation au cube des deux membres d'une équation n'introduit pas de solution étrangère (du moins réelle). Il n'était donc pas nécessaire de vérifier que les valeurs de x satisfont à l'équation.

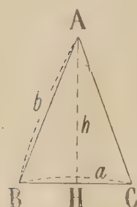
Plusieurs correspondants ont rejeté *a priori* la racine négative -76 : il n'y a aucune raison pour cela.

[Bonnes solutions de Mlle A. Levifve; de MM. H. Aubert; A. Authier; F. Baujard; P. Baylac; L. Bordron; V. Bourdon; A. Boyer; M. Boursier; G. Bruniquel; J. Bugnard; R. Cachia; Ch. Cadaert; J. Camus; G. Capus; Ch. Caussin; J. Calaviq; H. Cazes; G. Cellier; B. Charles; A. Chatelier; M. Chatelier; Chauvalon; A. Cieutat; Clamens; G. Clément; J. Contour; P. Cornuéjols; M. Courboulay; Daoudal; Dauriac; A. de Batz; Delacourt; Delord; E. Delmas; J. Devisme; M. Didier; J. Dougados; P. Dubus; Ducros; F. Dupire; A. Duval; A. F., à Saint-Pons; P. Faucheux; G. Fouché; E. Garandel; J. Georges; Ch. Girod; Goïcoechia; A. Haudrechy; R. Henry; A. Heurtaux; L'hôtelier; G. Houabet; G. Knoll; J. Le Déan; Le Lan; Le Pinois; H.-C. Lotard-Doazan; P. Louon; M., à Guéret; F. Maitre; P. Maudron; R. Marchand; R. Maricot; J. Mauhin; J. Maulini; Y. Maurice; J. Mazeau; Ménéchal; J. Millour; R. Morel; G. Mouzon; G. N., à Bruxelles; R. Panchaud; E. Paté; Pautras; Peton; G. Pichon; Pierdet; E. Pinlong; J. Régitano; E. Richard; F. Richard; A. Ricoux; V. Roux; A. Rougeault; D. Roullet; M. Roumy; J. Sambussy; J. Schilling; H. Sebban; R. Siberchicot; L. Soulier; M. Stévenard; J. Tarnus; L. Thaon; F. Torchet; C. Vasilesco; Vetter; Ch. Vouilloux.]

4093. — *La surface d'un triangle isocèle est égale aux* $\frac{10}{9}$ *de celle du carré construit sur la base; on sait de plus que l'un des côtés égaux est plus long que la base de* 23m.

Quelles sont les longueurs des côtés et la hauteur?

Soient a, b et h les mesures, en mètres, de la base, de l'un des côtés égaux et de la hauteur du triangle.



L'énoncé fournit les équations

$$\frac{1}{2}ah = \frac{10}{9}a^2, \qquad (1)$$
$$b = a + 23, \qquad (2)$$

auxquelles il faut joindre celle que l'on obtient en appliquant le théorème de Pythagore au triangle BHA,

$$b^2 - \frac{a^2}{4} = h^2. \qquad (3)$$

Il s'agit de résoudre ce système de trois équations à trois inconnues.

On peut diviser par a, qui n'est pas nul, les deux membres de la première équation, qui devient

$$h = \frac{20}{9}a. \qquad (4)$$

On obtient alors l'équation résolvante en portant les valeurs de b et de h, en fonction de a, dans l'équation (3); on obtient ainsi

$$(23 + a)^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{400}{81}a^2$$

ou

$$\left(\frac{400}{81} - \frac{3}{4}\right)a^2 - 2 \times 23a - \overline{23}^2 = 0; \qquad (5)$$

cette équation se simplifie, parce que

$$\frac{400}{81} - \frac{3}{4} = \frac{1\,600 - 243}{18^2} = \frac{1\,357}{18^2} = \frac{23 \times 59}{18^2}.$$

On peut alors diviser par 23 les coefficients de l'équation (5), qui devient

$$59a^2 - 2 \times \overline{18}^2 a - 23 \times \overline{18}^2 = 0;$$

cette équation a deux racines, de signes contraires, données par la formule

$$\frac{18(18 \pm 41)}{59};$$

la racine positive convient seule au problème posé; cette racine est 18, ce qui donne

$$a = 18, \qquad b = 41, \qquad h = 40.$$

(ANDRÉ BAL.)

Remarque. — La racine négative de l'équation, qui est

$$-\frac{18 \times 23}{59},$$

donne

$$b = 23 - \frac{18 \times 23}{59} = +\frac{41 \times 23}{59}$$

et

$$h = -\frac{20}{9} \times \frac{18 \times 23}{59} = -\frac{4 \times 23}{59}.$$

On remarque que cette racine, changée de signe, fournit la solution d'un problème dont l'énoncé serait analogue à celui qui était proposé.

La surface d'un triangle isocèle est égale aux $\frac{10}{9}$ *de celle du carré construit sur la base; on sait de plus que* la somme *de l'un des côtés égaux et de la base* (au lieu de la différence) *est de* 23m.

Quelles sont les longueurs des côtés et de la hauteur?

Les réponses sont

$$a = \frac{18 \times 23}{59}, \qquad h = \frac{4 \times 23}{59}, \qquad b = \frac{41 \times 23}{59}.$$

(GEORGES KNOLL, commis des P. T. T., à Clermont-Ferrand.)

Deuxième solution. — De $\frac{1}{2}ha = \frac{10}{9}a^2$ on tire $h = \frac{20}{9}a$, et, par conséquent,

$$h^2 = \frac{400}{81}a^2;$$

or

$$b^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} = \left(\frac{400}{81} + \frac{1}{4}\right)a^2 = \frac{1\,681}{18^2}a^2;$$

mais $1\,681 = 41^2$, comme b est positif, on a $b = \frac{41}{18}a$.

On connaît maintenant la différence et le rapport de b et de a,

$$(b - a) = \left(\frac{41}{18} - 1\right)a = 23,$$

ce qui donne

$$a = 18, \qquad b = 41, \qquad c = 40.$$

(R. P. L.)

[Bonnes solutions de Mlle Calmon, de MM. A. Authier; F. Baujard; L. Bordron; J. Briquet; G. Bruniquel; R. Destobere; J. Dougados; F. Dupire; A. F., à Saint-Pons; M. Forcade; R. Godard; J. Grall; M. Gros; Lhôtelier; P. Louon; F. Maître; E. Masdupuy; J. Mazeau; E. Pinlong; Ph. Plisson; A. Popu; A. Ricoux; L. Soulier; V. Vasilesco; N. Watelet.]

GÉOMÉTRIE

4031. — *On donne le triangle équilatéral* ABC, *dont le côté est égal à* a. *Sur* BC *on prend un point* M *et l'on abaisse les perpendiculaires* MP, MQ *sur les côtés* AB, AC.

1° *Démontrer que la somme des deux perpendiculaires* MP, MQ *est constante quand le point* M *se déplace sur* BC.

2° *Évaluer l'aire du quadrilatère* APMQ (*on représentera par* x *la distance* IM *du point* M *au milieu* I *de* BC).

3° *Quel sera le maximum et quel sera le minimum de la surface de ce quadrilatère quand le point* M *se déplacera sur* BC?

(*B. S., Dijon, aspirants,* 2e *session* 1919.)

1° Menons par C la parallèle Cz à AB, et prolongeons PM jusqu'au point Q' où cette droite rencontre normalement Cz.

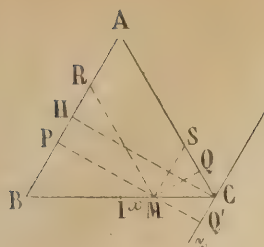


Fig. 1.

Les droites Cz et CA sont symétriques par rapport à CB, car les angles BCA et BCz sont égaux à 60°; donc les perpendiculaires à ces droites menées par M sont symétriques par rapport à MC, et l'on a MQ' = MQ.

Or PQ' est constant, car c'est la distance des deux parallèles Cz et AB; comme PQ' = PM + MQ, il est démontré que la somme des distances PM + QM est constamment égale à la hauteur du triangle équilatéral ABC (pour toute position de M comprise entre B et C).

2° L'aire du quadrilatère APMQ peut se calculer en retranchant du triangle ABC la demi-somme des triangles équilatéraux BMR et CMS, dont les côtés sont respectivement

$$BM = \frac{a}{2} + x \qquad \text{et} \qquad MC = \frac{a}{2} - x.$$

En appelant S la surface du triangle donné, $\left(S = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, et σ celle du quadrilatère, on a

$$\sigma = S\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{a}{2}+x\right)^2}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{a}{2}-x\right)^2}{a^2}\right]$$

$$= S\left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{4}\right] = S\frac{3a^2 - 4x^2}{4a^2}.$$

3° Cette surface varie en sens contraire de la valeur absolue de x, qui est compris entre 0 et $\frac{1}{2}a$; elle est maxima quand x est nul, sa valeur est alors $\frac{3}{4}$S; elle est minima quand $x = \frac{a}{2}$, sa valeur est alors $\frac{1}{2}$S, résultat évident, car le quadrilatère se réduit alors au triangle HCA.

(Solution analogue : A. Bernadac.)

Remarque. — On peut demander ce que deviennent les résultats précédents, quand le point M est sur le prolongement de BC. Dans ce

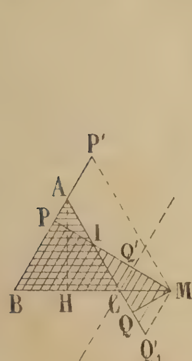


Fig. 2.

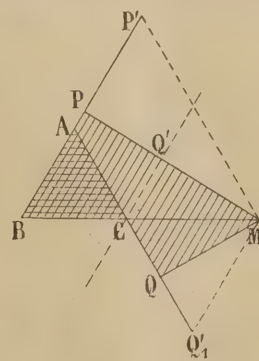


Fig. 3.

cas, les deux points P et Q' sont du même côté de M, et c'est la *différence* MP — MQ' dont la valeur absolue est constante et égale à CH. Donc, quand M est sur le prolongement de BC, c'est la différence |MP — MQ| qui est constante.

D'autre part la formule $S\frac{3a^2 - 4x^2}{4a^2}$ représente la différence

$$ABC - BMP - CMQ;$$

dans le cas de la figure 2, où P est entre A et B, et Q sur le prolongement de AC, c'est la mesure de l'aire qui reste quand on compte positivement l'aire couverte de hachures horizontales, négativement celle qui est couverte de hachures obliques, ce qui fait que l'on supprime celle qui est couverte de hachures dans les deux sens.

Il reste alors dans le cas (2) un quadrilatère croisé, dont l'aire est + PAI — IMQ (aire qui peut être nulle, et qui l'est en effet si $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, c'est-à-dire si HM = HA); dans le cas (3), il reste l'aire APMQ comptée avec le signe —. D'ailleurs le sens de rotation APMQ sur cette figure est opposé au sens APMQ de la figure 1.

[Bonnes solutions de Mlle S. David; de MM. Adelle; A. Arnaud; F. Baujard, à Cléry; M. Boulvert; J. Briquet; A. Cabarat; G. Cellier; M. Chatelier; G. Colle; J. Condamin; E. Delmas; G. Démaret; H. Detour; F. Dupire; M. Forcade; L. Goyard; E. Guicheney; V. Herbiet; P. Lamotier; A. Lamure; G. Leroy; Lhôtelier; Magdinier; J. Mauhin; R. Mauruc; G. Pichon; J. Redon; R. Renaud; L. Soulier; M. Stévenard; E. Wellinger.

Solutions assez bonnes de MM. J. Goudin; J. Grall; H. Le Lan; P. Louon; A. Ricoux.

4110. — *Sur une circonférence O de rayon R, on marque deux points A et B. Deux circonférences ω et ω', de rayons r et r', sont tangentes à O en A et B respectivement. Calculer la longueur de la tangente commune extérieure aux circonférences ω et ω', en fonction de R, r, r' et AB = d.*

Le carré de la tangente commune extérieure aux deux cercles (fig. 1) est

$$\overline{TT'}^2 = \overline{\omega\omega'}^2 - (r - r')^2. \qquad (1)$$

Soit OI l'unité de longueur portée sur AO et a = OJ sa projection sur OB(*); on sait que

$$d^2 = \overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2OB \times OJ \times R$$
$$= 2R^2(1 - a); \qquad (2)$$

on en tire

$$a = 1 - \frac{d^2}{2R^2}.$$

D'autre part

$$\overline{\omega\omega'}^2 = \overline{O\omega}^2 + \overline{O\omega'}^2 - 2aO\omega \times O\omega'$$
$$= (R + r)^2 + (R + r')^2$$
$$- 2(R + r)(R + r')a; \qquad (3)$$

Fig. 1.

en portant dans l'équation (3) la valeur de a tirée de l'équation (2) et en remplaçant $\overline{\omega\omega'}^2$ dans l'équation (1), on trouve

$$\overline{TT'}^2 = (R + r)^2 + (R + r')^2 - 2(R + r)(R + r')\left(1 - \frac{d^2}{2R^2}\right) - (r - r')^2$$
$$= (R + r)^2 + (R + r')^2 - 2(R + r)(R + r')$$
$$+ \frac{d^2}{R^2}(R + r)(R + r') - (r - r')^2;$$

mais les premiers termes forment le carré de (R + r — R — r') ou de $(r - r')$; la formule se réduit donc à

$$\overline{TT'}^2 = \frac{d^2}{R^2}(R + r)(R + r') = \frac{d^2}{R^2}O\omega . O\omega'.$$

(Pautras, à Paris.)

Remarque I. — Le carré de la tangente commune *intérieure* aux cercles ω et ω' est

$$\overline{LL'}^2 = \overline{\omega\omega'}^2 - (r + r')^2$$
$$= (r - r')^2 - (r + r')^2 + \frac{d^2}{R^2}(R + r)(R + r')$$
$$= \frac{d^2}{R^2}(R + r)(R + r') - 4rr'.$$

Remarque II. — Si le cercle ω touche *intérieurement* le cercle donné O, on a $O\omega = |R - r|$ et $\overline{O\omega}^2 = (R - r)^2$; nous allons examiner ce que deviennent les formules dans les différents cas que peut présenter la figure.

(*) a est le *cosinus* de l'angle AOB.

Le carré de $\omega\omega'$ est toujours égal à

$$\overline{O\omega}^2 + \overline{O\omega'}^2 - 2\,\overline{O\omega}\times\overline{O\omega'}\times a,$$

à condition de regarder $\overline{O\omega}$ comme la mesure d'un segment porté sur OA, le sens positif étant OA, et $\overline{O\omega'}$ comme la mesure d'un segment porté sur OB, le sens positif étant OB. On a

$$\overline{O\omega} = \overline{OA} + \overline{A\omega},$$

donc $\overline{A\omega} = +r$ si le contact des cercles O et ω est extérieur et $\overline{A\omega} = -r$ si le contact est intérieur. Posons donc

$$\overline{O\omega} = R + \varepsilon r \qquad \text{et} \qquad \overline{O'\omega'} = R + \varepsilon' r',$$

ε et ε' désignant des nombres qui seront remplacés, une fois le calcul effectué, par $+1$ ou par -1, suivant que le contact est extérieur ou intérieur.

On aura alors

$$\overline{\omega\omega'}^2 = (R+\varepsilon r)^2 + (R+\varepsilon' r')^2 - 2\left(1 - \frac{d^2}{2R^2}\right)(R+\varepsilon r)(R+\varepsilon' r')$$

$$= (R+\varepsilon r)^2 + (R+\varepsilon' r')^2 - 2(R+\varepsilon r)(R+\varepsilon' r') + \frac{d^2}{R^2}(R+\varepsilon r)(R+\varepsilon' r')$$

$$= (\varepsilon r - \varepsilon' r')^2 + \frac{d^2}{R^2}(R+\varepsilon r)(R+\varepsilon' r').$$

S'il existe une tangente commune extérieure aux cercles ω et ω', le carré de sa longueur est donné par la formule

$$\overline{TT'}^2 = \overline{\omega\omega'}^2 - (r - r')^2,$$

et s'il existe une tangente commune intérieure, le carré de sa longueur est donné par la formule

$$\overline{LL'}^2 = \overline{\omega\omega'}^2 - (r + r')^2;$$

en remplaçant $\overline{\omega\omega'}^2$ par sa valeur, on a

$$\overline{TT'}^2 = (\varepsilon r - \varepsilon' r')^2 - (r - r')^2 + \frac{d^2}{R^2}(R+\varepsilon r)(R+\varepsilon' r')$$

et

$$\overline{LL'}^2 = (\varepsilon r - \varepsilon' r')^2 - (r + r')^2 + \frac{d^2}{R^2}(R+\varepsilon r)(R+\varepsilon' r');$$

puisque $\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = +1$, ces formules se réduisent à

$$\overline{TT'}^2 = 2rr'(1 - \varepsilon\varepsilon') + \frac{d^2}{R^2}(R+\varepsilon r)(R+\varepsilon' r'), \qquad (1)$$

$$\overline{LL'}^2 = -\,2rr'(1 + \varepsilon\varepsilon') + \frac{d^2}{R^2}(R+\varepsilon r)(R+\varepsilon' r'). \qquad (2)$$

Premier cas. — Les contacts des cercles ω et ω' avec le cercle O sont de même nature : $\varepsilon = \varepsilon'$ et $\varepsilon\varepsilon' = +1$. Alors la formule (1) donne

$$\overline{TT'}^2 = \frac{d^2}{R^2}(R+\varepsilon r)(R+\varepsilon r'),$$

d'où

$$TT' = \frac{d}{R}\sqrt{\overline{O\omega}\times\overline{O\omega'}};$$

cette tangente commune existe si $\overline{O\omega}$ et $\overline{O\omega'}$ sont de même signe, c'est-à-dire si les cercles ω et ω' :

a) touchent extérieurement le cercle O (fig. 1);

b) touchent intérieurement le cercle O et sont tous deux intérieurs à ce cercle (fig. 2);

c) sont touchés intérieurement par le cercle O (c'est-à-dire contiennent l'un et l'autre le cercle O) (fig. 3).

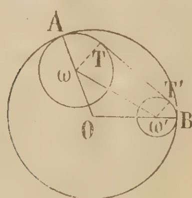


Fig. 2.

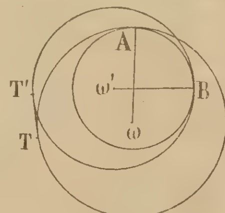


Fig. 3.

Il n'y a pas de tangente commune extérieure si les deux contacts sont intérieurs et si l'un des cercles contient le cercle O, tandis que l'autre est intérieur au cercle O, ce qui était facile à prévoir.

La formule (2) devient

$$\overline{LL'}^2 = \frac{d^2}{R^2}(R + r)(R + r') - 4rr'$$

si les deux contacts sont extérieurs, et

$$\overline{LL'}^2 = \frac{d^2}{R^2}(R - r)(R - r') - 4rr'$$

si les deux contacts sont intérieurs.

On voit que LL' n'existe pas toujours. La condition de contact (extérieur) des cercles ω et ω' s'obtient en écrivant que $LL' = 0$, c'est

$$d^2(R+\varepsilon r)(R+\varepsilon r') - 4R^2 rr' = 0.$$

Deuxième cas. — Si les contacts des deux cercles avec le cercle O sont de natures différentes (fig. 4),

$$\varepsilon = -\varepsilon' \qquad \text{et} \qquad \varepsilon\varepsilon' = -1;$$

la formule (1) devient alors

$$\overline{TT'}^2 = \frac{d^2}{R^2}(R+\varepsilon r)(R-\varepsilon r') + 4rr'$$

$$= \frac{d^2}{R^2}\overline{O\omega}\times\overline{O\omega'} + 4rr';$$

la tangente commune extérieure n'existe que si cette quantité est positive; la condition de contact (intérieur) des cercles ω et ω' est

$$d^2(R+\varepsilon r)(R-\varepsilon r') + 4rr' = 0.$$

Fig. 4.

La formule (2) donne

$$\overline{LL'}^2 = \frac{d^2}{R^2}(R+\varepsilon r)(R-\varepsilon r') = \frac{d^2}{R^2}\overline{O\omega}\times\overline{O\omega'}.$$

La tangente commune intérieure existe donc toujours si $\overline{O\omega}$ et $\overline{O\omega'}$ ont même signe, c'est-à-dire si le cercle qui touche intérieurement le cercle O lui est intérieur.

Corollaire de la discussion. — La formule

$$t = \frac{d}{R}\sqrt{\overline{O\omega}\times\overline{O\omega'}}$$

donne la longueur de la tangente commune *extérieure* quand les deux cercles touchent de la même façon, et celle de la tangente commune *intérieure* quand ils touchent de façons différentes.

(M., à Guéret.)

[Bonnes solutions de MM. H. Aubert, lycée de Tours; Aureille, à Marseille; F. Baujard; G. Bruniquel; J. Calaviq, à Béziers; Ch. Caussin, à Escarbotin; G. Cellier, E. P. S. de Granville; M. Chatelier, à La Montagne; P. Cornuéjols, à Metz; Dauriac, E. P. S. de Toulouse; J. Devisme; P. Dubus, à Lille; J. Dutheil, lycée de Bordeaux; Herbiet; R. Lecas; P. Louon, athénée d'Ixelles; R. Marchant, athénée d'Anvers; A. Monjallon, collège de Chatellerault; G. Mouzon, à Chasseneuil; E. Peton, à Brest; A. Ricoux, école normale d'Angoulême; V. Roux, à Marseille; J. Schilling, à Alger.

Assez bonnes solutions de MM. J. Contour; A. Daoudal; J. Lassave; Lhôtelier.]

4111. — *Aux sommets* A, B, C, D *d'un quadrilatère inscrit dans une circonférence* O, *on trace quatre circonférences tangentes à* O : O_1, O_2, O_3, O_4. *Soient* α, β, γ, δ, λ, ε *les longueurs des tangentes communes extérieures à* O_1 *et* O_2, O_2 *et* O_3, O_3 *et* O_4, O_4 *et* O_1, O_1 *et* O_3, O_2 *et* O_4, *respectivement. Démontrer que*

$$\alpha\gamma + \beta\delta = \lambda\varepsilon.$$

Cette question est un corollaire du théorème qui fait l'objet de la précédente.

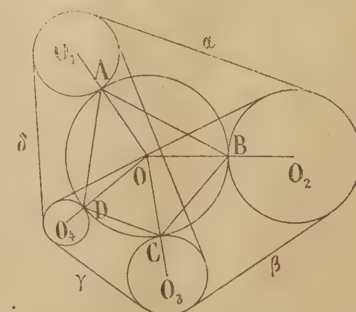


Fig. 1.

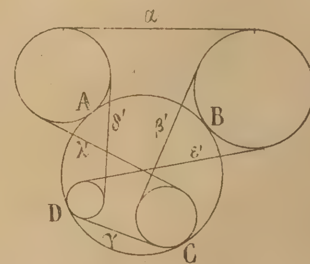


Fig. 2.

Il a été démontré (n° 4110) que

$$\alpha = \frac{AB}{R}\sqrt{OO_1 . OO_2}, \qquad \beta = \frac{BC}{R}\sqrt{OO_2 . OO_3}, \qquad \gamma = \frac{CD}{R}\sqrt{OO_3 . OO_4},$$

$$\delta = \frac{DA}{R}\sqrt{OO_4 . OO_1}, \qquad \lambda = \frac{AC}{R}\sqrt{OO_1 . OO_3}, \qquad \varepsilon = \frac{BD}{R}\sqrt{OO_2 . OO_4},$$

Il en résulte que

$$\alpha\gamma = \frac{AB \times CD}{R^2}\sqrt{OO_1.OO_2.OO_3.OO_4},$$

$$\beta\delta = \frac{BC \times DA}{R^2}\sqrt{OO_1.OO_2.OO_3.OO_4},$$

$$\lambda\varepsilon = \frac{AC \times BD}{R^2}\sqrt{OO_1.OO_2.OO_3.OO_4},$$

on en déduit que

$$(\alpha\gamma + \beta\delta - \lambda\varepsilon)$$

$$= (AB.CD + BC.AD - AC.BD)\frac{\sqrt{OO_1.OO_2.OO_3.OO_4}}{R^2}.$$

Mais le premier facteur de ce produit est nul, en vertu du théorème de Ptolémée, applicable au quadrilatère inscrit ABCD. La relation est donc démontrée.

(J. SCHILLING, à Alger.)

Remarque. — D'après la discussion de la question précédente, l'énoncé de ce théorème s'applique quand les quatre cercles O_1, O_2, O_3, O_4 touchent le cercle O de la même façon, soit extérieurement, soit intérieurement (dans ce cas, il faut que les quatre cercles soient contenus dans le cercle O, ou bien, au contraire, qu'ils le contiennent tous).

Si les contacts ne sont pas tous de même nature, l'énoncé du théorème subsiste, avec une modification qui résulte de la discussion précédente : il faut prendre la tangente commune intérieure à deux cercles qui touchent le cercle O de façon différente.

La figure 2, par exemple, donnerait

$$\alpha\gamma + \beta'\delta' = \lambda'\varepsilon'.$$

[Bonnes solutions de MM. Aureille, à Marseille; F. Baujard, à Cléry; Bruniquel, à Toulouse; J. Calaviq, à Béziers; Ch. Caussin, à Escarbotin; M. Chatelier, à La Montagne (Loire-Inférieure); J. Contour, école normale de Troyes; A. Daoudal, à Elliant (Finistère); Dauriac, E. P. S. de Toulouse; J. Devisme, à Paris; P. Dubus, à Lille; Geffroy-Le Jan, E. P. S. de Guingamp; Herbiet; J. Lassave, à l'Isle-en-Bodon (Haute-Garonne); R. Lecas; P. Louon, athénée d'Ixelles; M., à Guéret; R. Marchant, athénée d'Anvers; G. Mouzon, à Chasseneuil; Pautras, à Paris; A. Ricoux, à Angoulême; V. Roux, à Marseille.]

SOLUTION D'EXERCICE

4094. — *Décomposer en un produit de facteurs l'expression*

$$(b^2 - c^2)a^3 + (c^2 - a^2)b^3 + (a^2 - b^2)c^3.$$

Cette expression est un polynome homogène et du degré 5 par rapport à l'ensemble des trois lettres a, b et c, mais du troisième degré seulement par rapport à chacune d'elles.

Si l'on permute deux des lettres, par exemple a et b, il change de signe, sans changer de valeur absolue. Il en résulte qu'il est nul si l'on remplace a par b, en effet de

$$f(a, b, c) = -f(b, a, c),$$

il résulte que

$$f(a, a, c) = -f(a, a, c),$$

donc

$$2f(a, a, c) = 0.$$

La vérification se fait d'ailleurs sans calcul :

$$(a^2 - c^2)a^3 + (c^2 - a^2)a^3 + (a^2 - a^2)c^3 = 0.$$

L'expression est donc un polynome en a, qui admet les deux racines $a = b$ et $a = c$: il est par conséquent divisible par le produit $(a - b)(a - c)$; comme l'expression proposée ne change pas si l'on permute circulairement a, b et c, il est évident que ce polynome est divisible par le produit $(a - b)(b - c)(c - a)$:

$$f(a, b, c) \equiv (a - b)(b - c)(c - a)Q(a, b, c).$$

$Q(a, b, c)$ est un polynome homogène et du second degré en a, b et c, mais qui est du premier degré seulement par rapport à chacune des trois lettres, prise isolément. Ce polynome ne doit pas changer quand on permute deux des lettres a, b et c, car le facteur

$$(a - b)(b - c)(c - a)$$

change de signe par cette permutation. Il en résulte que $Q(a, b, c)$ ne peut avoir d'autre forme que $k(ab + bc + ca)$, en appelant k un coefficient numérique.

Pour déterminer ce coefficient, de façon à vérifier l'identité

$$(b^2 - c^2)a^3 + (c^2 - a^2)b^3 + (a^2 - b^2)c^3 \equiv k(a - b)(b - c)(c - a)(ab + bc + ca),$$

il suffit de donner à a, b et c trois valeurs numériques quelconques *différentes*, par exemple $a = 0$, $b = +1$, $c = -1$; le premier membre devient $1 + 1 = 2$, le second, $k(-1)(2)(-1)(-1) = -2k$. Il en résulte que la valeur de k est -1, et que l'expression proposée est identique à

$$-(a - b)(b - c)(c - a)(ab + bc + ca).$$

EXAMENS ET CONCOURS DE 1920 (*Suite*).

EXAMENS ORAUX des ÉCOLES NATIONALES D'ARTS ET MÉTIERS (*).

Arithmétique et Algèbre (*Suite*).

72. — Comment peut-on trouver le reste de la division d'un nombre par 45 sans effectuer la division?

73. — Effectuer le produit

$$(a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c).$$

74. — [**4161** (**)]. Dans une circonférence de diamètre $AB = 2R$, mener une corde CD parallèle à AB, telle qu'en tirant AD et BC, on ait $DC + AB = AD + BC$. On prendra comme inconnue $DC = 2x$.

---

75. — [**4162**]. Prouver que, quel que soit a entier, les fractions $\frac{2a+1}{3a+1}$ et $\frac{2a+1}{a(a+1)}$ sont irréductibles. Comment obtient-on toutes les fractions $\frac{A}{B}$ égales à la première? Combien y en a-t-il, si on suppose $a = 6$, dont les dénominateurs soient compris entre $100a$ et $600a$? Forme générale d'une des fractions cherchées.

76. — Condition nécessaire et suffisante pour que $x^m - a^m$ soit divisible par $x^p - a^p$.

Application : $x^6 - a^6$ est divisible par $x^2 - a^2$, par $x^3 - a^3$.

77. — Résoudre l'inégalité

$$\frac{-2x + 11}{x^2 - 4x + 1} > 0.$$

---

78. — Si a et b sont premiers entre eux, ab et $a^2 + b^2 + 3ab$ sont premiers entre eux.

79. — [**4163**]. Trouver trois nombres x, y, z, en progression géométrique, tels que : si l'on augmente le deuxième nombre de a, la progression devient arithmétique; si l'on augmente le troisième nombre de b, la progression redevient géométrique.

80. — Calculer à la règle un nombre x de la forme $\frac{abcd}{efg}$.

Application : $x = \frac{1{,}15 \times 0{,}026 \times 137 \times 2{,}9}{0{,}65 \times 4{,}27 \times 11}$.

(*) Les questions posées à un même candidat sont comprises entre deux traits.

(**) Ce second numérotage ne porte que sur les questions dont nous avons l'intention de donner ici une solution. Ces questions seront résolues comme exercices; les abonnés ne devront pas en envoyer de solutions.

81. — Si a et b sont premiers absolus, trouver les nombres premiers inférieurs à a et b et premiers avec ab.

82. — Établir les formules donnant les racines de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$. Relations entre les coefficients et les racines.

83. — Expliquer comment s'effectue à la règle le calcul de

$$x = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Application : $$x = \sqrt{\frac{0,06135}{1,72}}.$$

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4164. — Trouver le plus petit multiple de 17 qui, divisé par 19 et par 101, donne des restes égaux.

4165. — Trouver un nombre s'écrivant $\overline{acba}$ dans le système de base 10, sachant qu'il s'écrit $\overline{abdba}$ dans le système de base 6 (a, b, c, d désignant des chiffres tous différents et dont aucun n'est nul).

(Lhôtelier, à Évreux.)

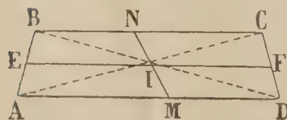
4166. — Deux mobiles partent en même temps, l'un de A, l'autre de B; ils vont à la rencontre l'un de l'autre, la distance qui les sépare est de 19 055 mètres. Le premier mobile parcourt 50 mètres pendant la première heure, puis 100 pendant la seconde, 200 pendant la troisième, et ainsi de suite, l'espace parcouru pendant une heure étant toujours double de l'espace parcouru pendant la précédente. Le second mobile fait 128 mètres pendant la première heure, 192 pendant la suivante, et ainsi de suite, l'espace parcouru pendant une heure étant toujours les $\frac{3}{2}$ de celui qui a été parcouru pendant l'heure précédente. Après combien d'heures se rencontreront-ils, et quel sera le chemin parcouru par chacun d'eux?

(Paul Louon, athénée d'Ixelles.)

4167. — Un entrepreneur emprunte une somme de 100 000 francs, remboursable en 15 annuités égales, dont la première sera payée quand la sixième année après le jour de l'emprunt sera révolue. Quel sera le montant de chaque annuité, le taux d'intérêt étant 6 $^0/_0$?

(Paul Louon, athénée d'Ixelles.)

4168. — Le croquis représentant un champ ayant la forme d'un trapèze porte les indications suivantes :



grande base AD $= a = 170^{m}$,
petite base BC $= b = 150^{m}$,
angle ABD = angle ACD = 1 droit

et mentionne la position d'une source en M sur AD à une distance AM $= m$ du sommet A.

1. Démontrer que le trapèze ABCD est isocèle et indiquer les constructions graphiques à effectuer pour dessiner l'épure du champ à l'échelle de $\frac{1}{1000}$.

2. On se propose de diviser le champ ABCD en deux parties équivalentes par une droite MN issue de la source M et rencontrant la petite base BC en un certain point N.

Déterminer la droite MN en prenant pour inconnue BN $= x$ qu'on calculera en fonction de AB $= a$, BC $= b$, AM $= m$.

Entre quels points de AD doit se trouver la source M pour que le problème soit possible?

Donner la valeur numérique de x pour $m = 100^{m}$.

3. Soient E et F les milieux des côtés non parallèles. Montrer que le point de rencontre I de MN avec EF est le milieu de EF et en déduire une construction pratique de MN sur le terrain.

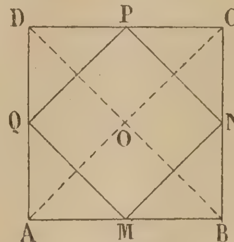
4. On veut faire placer le long de l'alignement MN une clôture revenant à 2^f le mètre.

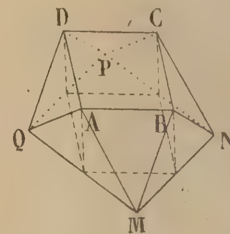
Pour évaluer la dépense, on construit la droite MN sur l'épure et l'on trouve en mesurant sur le dessin la droite ainsi obtenue qu'elle a une longueur de 52^{mm},5.

Déterminer l'erreur de dépense ainsi commise par ce procédé, en calculant MN dans la figure ABCD en fonction des longueurs $a = 170^{m}$, $b = 150^{m}$, $m = 100^{m}$.

(*B. S., Creuse, aspirants, mars* 1920.)

4169. — M, N, P, Q sont les milieux des côtés du carré ABCD dont le côté est $2c = 30^{cm}$. On relève les triangles AMQ, BNM, CPN,

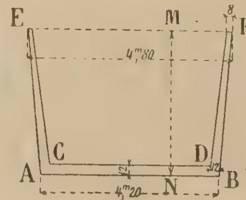




DPQ perpendiculairement au plan MNPQ; on détermine ainsi un solide qui a pour bases MNPQ et ABCD, et pour faces latérales les quatre triangles relevés et quatre triangles isocèles ABM, BCN, CDP, DAQ. Prouver que ces derniers sont équilatéraux, et calculer la surface latérale et le volume du solide déterminé (en le décomposant en un prisme central et quatre pyramides latérales égales).

(*B. S., Doubs, aspirants, mars* 1920.)

4170. — La coupe d'une cuve tronconique en béton a la forme ci-contre.

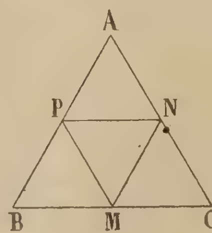


L'épaisseur du fond est de 12^{cm}. La paroi latérale a une épaisseur de 12^{cm} au niveau du fond intérieur CD et de 8^{cm} au bord supérieur. Le diamètre AB $= 4^{m},20$; le diamètre EF $= 4^{m},80$. La hauteur totale MN est égale au côté du carré inscrit dans la grande base EF du tronc.

On demande : 1° le volume intérieur de la cuve; 2° le volume du béton.

(*B. S., Belfort, mars* 1920.)

4171. — On donne un morceau de carton ayant la forme d'un triangle équilatéral ABC.



1° Calculer sa surface sachant qu'il est inscriptible dans un cercle de rayon R.

2° On plie les angles autour des droites MN, NP, PM, qui joignent les milieux des côtés, de façon à former un tétraèdre régulier ayant pour base le triangle MNP.

Calculer le volume du tétraèdre.

Application numérique :

$R = 4^{dm}$,
$\sqrt{2} = 1,414$,
$\sqrt{3} = 1,732$.

(*B. S., Haute-Saône, mars* 1920.)

4172. — Trois circonférences O_1, O_2, O_3, se coupent deux à deux sous un même angle 2θ en M, N et P. Montrer que :

1° MN, NP, PM passent par des centres de similitude des trois circonférences;

2° le cercle MNP, de centre ω, coupe les trois circonférences O_1, O_2, O_3 sous l'angle θ;

3° les droites ωM, ωN, ωP sont bissectrices des angles en M, N et P de l'hexagone AMBNCP, qui est circonscrit à un cercle de centre ω.

(V. Thébault, à Ernée.)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie Paul BRODARD.

23e Année. 15 Décembre 1920. N° 6.

L'Éducation Mathématique

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

PRIX DU NUMÉRO : France et Colonies, 0 fr. 60. Étranger, 0 fr. 70.
ABONNEMENT ANNUEL : France et Colonies, 10 fr. Étranger, 12 fr.

Tous les abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, l'on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction : Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Abonnements : Librairie **Vuibert**, Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

DE LA CERTITUDE MATHÉMATIQUE

Il ne fait plus de doute pour personne que la Géométrie ne soit une science d'origine expérimentale. Elle emprunte à la nature, ou du moins aux perceptions que le monde extérieur nous impose, ses concepts, ses axiomes, son langage et en grande partie ses méthodes. Mais elle est parvenue à un très haut degré de perfection et est rapprochée de son but, qui, comme celui de toute science, est de connaître et de prévoir.

Il est impossible, en présence de l'innombrable multitude des faits, de connaître sans classer, c'est-à-dire sans trouver entre les objets de la connaissance des analogies, des liens logiques, permettant de les rattacher les uns aux autres. Ces liens s'expriment par des nécessités ou par des impossibilités de coexistence, s'énonçant ainsi : « si ceci a lieu, cela a lieu » ou, au contraire : « cela n'a pas lieu ». La Géométrie a effectivement classé les faits géométriques et les a attribués à un petit nombre de causes, qu'on appelle axiomes ou postulats, les uns explicitement formulés, d'autres, — d'ailleurs moins rares qu'on ne le croit, — tacitement admis, d'une façon consciente ou non.

Quand une science a catalogué les faits qu'elle étudie, elle cherche à prévoir, car c'est la démonstration de son utilité et de sa valeur : elle s'y exerce parfois même avant d'avoir rempli la première partie de sa mission, comme c'est le cas de la Météorologie. La Géométrie est depuis longtemps entrée dans ce stade : elle y avance avec une assurance absolue et ne fait même plus appel à l'expérience pour contrôler et vérifier ses prévisions, pour révéler des erreurs possibles de ses méthodes. Bien des théorèmes sur des droites concourantes, sur des points en ligne droite ou situés sur un cercle ont été publiés par ceux qui les ont découverts et acceptés par les lecteurs sans que les uns ou les autres aient songé à les vérifier par une construction soigneusement faite dans un cas pris comme exemple. Des égalités de rapports pourraient être vérifiées par la mesure des lignes d'une figure et par un calcul numérique effectué sur ces mesures, mais rarement on prend cette peine, si grande est la confiance qu'inspirent les méthodes de découverte et de démonstration. On peut dire qu'elles engendrent cette certitude géométrique, regardée comme d'essence supérieure.

Il est intéressant de comparer, à ce point de vue, les autres sciences dites « exactes ». Plus haut encore que la Géométrie, sur l'échelle de la certitude, nous trouvons l'Algèbre et l'Arithmétique. La vérification d'une prévision, autrement dit d'un théorème d'arithmétique, semble une satisfaction donnée à l'esprit, qui aime à prendre connaissance de sa puissance et de sa pénétration, plutôt qu'une concession aux exigences de la critique. Les vérifications arithmétiques ont d'ailleurs un caractère de perfection qui les rend puissamment convaincantes : quand on énonce un théorème sur la divisibilité, formulant que tel nombre est multiple de 17, ou que tel autre sera premier, la constatation du fait aura une netteté indiscutable, l'essai répondra par un oui catégorique ou par un non brutal. Si quelque jour un raisonnement inattaquable menait à conclure qu'un certain nombre N est premier et si un amateur lui trouvait un diviseur, il n'y aurait pas à épiloguer. Ce serait un cataclysme dans les sciences. Le rétablissement ne pourrait se faire comme s'est fait celui des sciences physiques, un moment ébranlées par la découverte de certaines propriétés du radium.

L'Algèbre, principalement cette partie qu'on appelle Analyse, progresse maintenant sans hésitation et ne s'attarde pas à des vérifications qu'elle juge superflues : mais il n'en a pas toujours été ainsi. Au XVIIIe siècle, quand furent fondés l'analyse des infiniment petits et le calcul différentiel, la nouveauté de ces conceptions, l'introduction de quantités qui n'étaient pas définies, qui variaient, pour ainsi dire, dans le moment même où on les soumettait au calcul, — Newton les appelait « fluentes », quantités qui coulent, — inspiraient à de très bons esprits de la défiance, presque de la répugnance. Il faut dire pour les justifier, que des raisonnements plus que hasardés, des inductions et des généralisations vraiment suspectes n'inspiraient aucun scrupule aux plus hardis des savants, lancés à la découverte d'un monde nouveau, cherchant à se devancer les uns les autres, comme Cortez au Mexique ou Pizarre au Pérou. A cette époque, D'Alembert ne disait-il pas à un débutant, qui lui exprimait quelques doutes : « Allez en avant, la foi vous viendra. »

Or c'est précisément par des applications heureuses et par des vérifications retentissantes que la conviction des uns se forma, que les doutes des autres furent écartés. C'est aussi l'expérience, c'est-à-dire le calcul de résultats et leur comparaison avec ceux qui avaient été prévus, qui a décelé les raisonnements spécieux, fait apercevoir les points faibles. On reconnut ainsi que les critiques n'avaient pas toujours tort, que leurs doutes avaient rendu service. Abel, Gauss, Cauchy ont eu la gloire de fonder l'analyse sur des bases solides, de donner des méthodes qui ne peuvent tromper. Les conquêtes faites par les premiers analystes ont été régulièrement annexées au domaine de la science.

L'analyse est donc en possession de méthodes de raisonnement et d'investigation sûres : quiconque les applique correctement est certain des résultats obtenus.

Toutefois les vérifications n'ont pas en général le caractère absolu et tranchant de celles des théorèmes d'arithmétique pure.

Si l'on affirme que la somme de telle série est le nombre π, on peut seulement constater que la différence entre le résultat du calcul et le nombre prédit est fort petite, quand le calcul est conduit de façon à donner une valeur très approchée : la certitude naît si l'on démontre que l'on pourrait effectuer le calcul de façon que cette différence fût plus petite qu'un nombre donné à l'avance.

La Mécanique rationnelle, qui est, à n'en pas douter, une science expérimentale, est à un degré au-dessous de la Géométrie. Ses axiomes ne s'imposent pas à nous avec la même évidence : on peut même dire qu'ils ne s'imposent pas, et ne sont probablement que l'interprétation d'expériences faites sur des corps animés de vitesses allant de 0 à 1 500 mètres par seconde (projectiles) ou atteignant 50 à 100 kilomètres par seconde (corps célestes), mais qui ne sont plus d'accord avec les hypothèses faites sur les molécules et les atomes, qui, dans les rayons cathodiques, semblent animés de vitesses mille ou deux mille fois plus grandes. La mécanique a donc besoin du secours de l'expérience, dans tous les cas qui sortent du cercle des applications anciennes. Et l'explication de ces expériences paraît devoir exiger de sérieuses transformations des principes fondamentaux. La Mécanique a dans le ciel un champ d'essai prodigieux. Le mouvement des corps célestes constitue une immense expérience, d'une durée indéfinie. Malheureusement, cette expérience est d'une effrayante complexité, et il ne nous est possible ni d'influer sur elle si peu que ce soit, ni de diminuer le prodigieux enchevêtrement de causes et d'effets qui la rend si difficile à interpréter; il est impossible d'isoler l'action d'une planète sur une autre. Mais comme l'expérience se poursuit inexorablement, pour ainsi dire, elle fournit un moyen toujours présent de contrôler le perfectionnement des théories et des méthodes. Elle donnera dans l'avenir à chaque génération nouvelle la confirmation ou le démenti des pronostics établis par les siècles précédents. La concordance, généralement assez satisfaisante, qui existe entre les observations et les prévisions, est le fondement de la confiance accordée à la Mécanique.

La Mécanique fournit aussi des explications très plausibles et des prévisions, justifiées par les faits, de nombreux phénomènes, surprenants au premier abord, comme ceux que présente le gyroscope.

On remarquera que le degré de certitude que donne une science dépend de la complexité des principes et des axiomes qui sont à la base; il dépend aussi, pour la même raison, de l'antiquité de la science : l'Arithmétique est extrêmement ancienne, et l'origine de la Géométrie doit être cherchée dans des temps très reculés, tandis que l'Algèbre remonte au XVIe siècle, et que la Mécanique date de Galilée, Huygens et Newton.

ARITHMÉTIQUE

4070. — *Un rentier a fait deux parts de sa fortune : la première, qui est les $\frac{7}{8}$ de la seconde, est placée à 4 %; la seconde à 5 %. Sachant que l'intérêt trimestriel de la seconde part surpasse de 90f l'intérêt trimestriel de la première, dites à combien s'élevait la fortune de ce rentier au moment du placement.*

N. B. — On donnera de ce problème : 1° une solution arithmétique; 2° une solution algébrique.

(*Certificat d'aptitude au professorat des classes élémentaires de l'enseignement secondaire, conc. de* 1920.)

Solution arithmétique. — Employons la méthode que l'on appelle de « fausse supposition »; considérons les intérêts que produirait un capital de 150f, partagé en 70f placés à 4 % et 80f placés à 5 %. La première part de ce capital donnerait un intérêt annuel de $0{,}04 \times 70 = 2{,}80$; les 80f, placés à 5 %, rapporteraient $0{,}05 \times 80 = 4$, soit 1f,20 de plus par an que l'autre part, ou 0,30 par trimestre.

Si le capital total était 150f, l'intérêt de la seconde part surpasserait celui de la première de 0,30 par trimestre : si l'on multiplie ce capital par n, sans changer le rapport des deux parts, non plus que les taux et la durée des placements, les intérêts et par suite leur différence sont aussi multipliés par n : pour que la différence de 0,30 devienne 90f, il faut prendre $n = 300$. Le capital est donc $300 \times 150 = 45\,000$f, les deux parts sont $70 \times 300 = 21\,000$f et $80 \times 300 = 24\,000$f.

(Émile PINLONG, école normale de Guéret.)

Autre solution arithmétique. — La somme des deux parts est $\frac{7}{8} + \frac{8}{8}$, soit $\frac{15}{8}$ de la seconde. La première part est donc $\frac{7}{15}$ de la fortune totale, et la seconde en est les $\frac{8}{15}$.

La première part donne un intérêt trimestriel qui est les

$$\frac{7 \times 4 \times 3}{15 \times 100 \times 12} = \frac{7}{1\,500}$$

de la fortune, et l'intérêt de la seconde, pendant le même temps, en est les $\frac{8 \times 5 \times 3}{15 \times 100 \times 12} = \frac{10}{1500}$; la différence de 90f représente donc les $\frac{10 - 7}{1500} = \frac{3}{1500}$ de la fortune qui, par conséquent, s'élevait à $90 \times 500 = 45\,000$f. Les deux parts en sont respectivement $\frac{7}{15}$ et $\frac{8}{15}$, soit 21 000 et 24 000f.

(Raymond RENAUD, école primaire supérieure de Decize.)

Solution algébrique. — Appelons x la première part et y la seconde; l'énoncé donne la première relation $x = \frac{7}{8}y$; la deuxième part, placée à 5 %, rapporte annuellement 360f de plus que la première, qui est placée à 4 % : cela fournit l'équation

$$\frac{5}{100}y - \frac{4}{100} \cdot \frac{7}{8} \cdot y = 360,$$

d'où

$$3y = 72\,000,$$

ce qui donne $y = 24\,000$

et par conséquent

$$x = 7 \times 3\,000 = 21\,000.$$

(Jean GRALL.)

[Bonnes solutions de MM. A. Bal; Bertrand, école pratique d'Industrie de Saint-Etienne; M. Chatelier, à la Montagne (Loire-Inférieure); J. Dougados, à Castres; P. Dujoux, école primaire supérieure de Dijon; F. Dupire, à Escaudain (Nord); E. Epailly, à Corbeil; P. Faucheux, au prytanée militaire de la Flèche; F. A. G., à Saint-Pons; A. Lhôtelier, à Evreux; P. Louon, athénée d'Ixelles; E. Masdupuy, école normale de Tulle; J. Mazeau, lycée de Montluçon; L. G. Papon, école primaire supérieure de Decize; A. Wehrung, à Paris.]

4088. — *Lorsque l'on s'enfonce verticalement dans le sol, la température augmente en général, en un lieu donné, régulièrement, proportionnellement à la profondeur.*

En un point où l'on a fait un sondage, il est venu de l'eau quand le sondage avait atteint 405m, la température en était 26°; il se fait un nouveau jaillissement quand le sondage arrive à 513m, la température est 30°.

Quelle a dû être la température constatée à 18m, si la loi de croissance uniforme est vérifiée, et à quelle profondeur faudrait-il descendre pour rencontrer une température de 100°?

L'accroissement de température a été de 4° pour

$$513 - 405 = 108^{m},$$

soit de 1° par 27^m. A la profondeur de 18^m, la température était donc de $26 - \frac{1}{27}(405 - 18)$, ce qui fait $26 - \frac{43}{3} = 11°\frac{2}{3}$.

Pour arriver à une température de 100°, il faudrait descendre à une profondeur de $513 + 70 : \frac{1}{27} = 2\,403^m$.

(R. GODARD, à Évreux-la-Madeleine.)

[Bonnes solutions de Mlle Calmon; de MM. A. Authier; R. Destobère; F. Dupire; A. F., à Saint-Pons; M. Gros; G. Knoll; Lhôtelier; P. Louon; E. Masdupuy; E. Pinlong; A. Ricoux; H. Sebban; N. Watelet; Wehrung.]

4118. — *Trouver un nombre de deux chiffres, $\overline{ab}$, qui, divisé par le nombre $\overline{ba}$ (écrit avec les deux mêmes chiffres, dans l'ordre inverse), donne pour quotient* 3 *et pour reste* 5.

Les chiffres du nombre cherché doivent vérifier l'équation

$$10a + b = 3(10b + a) + 5,$$

qui devient, après réduction des termes semblables,

$$7a - 29b = 5, \qquad (1)$$

ou

$$7(a - 4b) - b = 5;$$

on a immédiatement deux nombres entiers vérifiant cette dernière équation en prenant

$$a_0 = 4b_0 \qquad \text{et} \qquad b_0 = -5,$$

d'où

$$a_0 = -20, \qquad b_0 = -5;$$

la solution générale de l'équation (1) en nombres entiers est alors donnée par les formules

$$a = a_0 + 29t = -20 + 29t,$$
$$b = b_0 + 7t = -5 + 7t,$$

où t peut recevoir toutes les valeurs entières, positives ou négatives. Pour que a et b soient compris entre 0 et 10, il faut choisir $t = +1$, aucune autre valeur ne convient. Cela donne le nombre 92.

Vérification :

$$92 = 3 \times 29 + 5.$$

(MONNES, à Saint-Saulve, Nord.)

Remarque. — Nos correspondants ont employé d'autres procédés, plus particuliers, pour résoudre en nombres entiers l'équation (1). Ils ont, dès le début, utilisé les inégalités, $1 \leqslant a \leqslant 9$, $1 \leqslant b \leqslant 9$. En écrivant

$$7(a - 4b) = b + 5,$$

on voit que $b + 5$ doit être multiple de 7; d'autre part, puisque

$$a - 4b > 0,$$

il faut que $b \leqslant 2$; la seule valeur à conserver pour b est donc 2, qui donne $a = 8 + 1$.

(R. CHASSELUT, E. P. S. de Corbigny.)

[Bonnes solutions de Mme G. Clot; Mlles Marignac; M. Pinot; de MM. G. Alamassot; Ch. Andrei; Arbey; H. Aubert; M. Barny; M. Boulvert; A. Boyer; W. Burniat; P. Carpentier; M. Castelain; Ch. Caussin; G. Cellier; U. Cerisier; H. Chabrot; B. Charles; A. Châtelier; M. Chatelier; G. Clément; A. Cieutat; J. Clamens; P. Cornuéjols; M. Courboulay; A. Deforge; P. Delacour; E. Delmas; G. Démaret; J. Dirand; M. Didier; J. Dougados; G. Dujoux; F. Dupire; A. Duval; G. Février; L. Fixe; Forcevillo; G. Fouché; E. Garandel; L. Giltou; Y. Guézelle; R. Godard; A. Grall; C. Grard; J. Griscelli; V. Herbiet; A. Heurtaux; G. Houalet; L. P. C.; P. Lagache; Lavoine; Lecas; F. Leherre; Le Jan-Geoffroy; M. Le Pinois; A. Lhôtelier; J. Libier; M., à Guéret; Magnani; Y. Maurico; Ménéchal; G. Meynaud; H. Micard; J. Millour; R. Morel; J. Morin. Chanteau; Mortaigne; Ch. Norgelet; E. Paté; M. Pellé; E. Peton; G. Pichon; M. Pommerolle; Popu; A. Renault; R. Reynard; A. Ricoux; A. Robba; D. Roullet; M. Roumy; V. Roux; M. Saint-Juvin; J. Sambussy; H. Sebban; J. Torrès; N. Vedie; Ed. Yvroud.]

4119. — *Avec trois chiffres différents, a, b, c, on peut écrire six nombres. Quelle est leur somme?*

Généraliser : avec p chiffres différents ($p < 10$) on peut écrire plusieurs nombres, en changeant l'ordre de toutes les façons; quelle est leur somme?

Les six nombres que l'on peut écrire avec les trois chiffres différents a, b et c sont abc, acb, bac, bca, cab, cba; si l'on appelle S la somme $a + b + c$ des trois chiffres, celle des trois nombres est

$$2S(1 + 10 + 100) = 2S \times 111 = \frac{2}{9}S \times 999 = 2S\frac{(10^3 - 1)}{9}.$$

Généralisation. — Le nombre de nombres différents que l'on peut écrire avec p chiffres, tous différents et dont aucun n'est nul, est égal à celui des permutations de ces p chiffres; c'est le produit des p premiers entiers, $1.2.3\ldots p$, que l'on nomme *factorielle* de p et que l'on note $p!$. Un de ces nombres $\overline{abcd\ldots h}$, par exemple, représente la somme de $a10^p + b10^{p-1} + \ldots + h$ unités : leur somme contiendra, dans la colonne qui représente des unités de l'ordre de 10^k, tous les chiffres $a, b, c \ldots h$, et qui y figureront le même nombre de fois : il y a $p!$ chiffres, chaque chiffre figurera donc $(p!) : p$ fois, soit $(p-1)!$ fois. La somme des termes de cette colonne donnera donc $S \times 10^k (p-1)!$ unités, en appelant S la somme des chiffres donnés. Le même raisonnement, appliqué à toutes les colonnes successivement, montre que la somme de tous les nombres est

$$(p-1)!\,S(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^p) = (p-1)!\,S\frac{(10^{p+1} - 1)}{10 - 1}$$
$$= S(p-1)(p-2)(p-3)\ldots 3.2.\frac{(10^{p+1} - 1)}{9};$$

$\frac{10^{p+1} - 1}{9}$ est le nombre qui s'écrit avec p chiffres égaux à 1.

(G. N., à Bruxelles.)

[Bonnes solutions de MM. Arbey; M. Barny; B. Charles; Chasselut; M. Chatelier; A. Cieutat; G. Clément; M. Courboulay; E. Delmas; I. Dougados; G. Février; E. Garaudel; R. Godard; R. Hacquin; G. Houadet; J. Lambussy; M., à Guéret; Y. Maurice; Ménéchal; J. Millour; Monnez; R. Morel, E. Paté; E. Peton; G. Pichon; R. Reynard; A. Ricoux; H. Sebban; N. Vedic.

Assez bonnes solutions de Mme G. Clot; de MM. Ch. Caussin; G. Cellier; P. Cornuéjols; M. Descotte; A. Grall; V. Herbiet; Lecas; M. Pommerolle; Y. Quézelle; A. Renault.]

4122. — *Deux cylistes partent à midi d'un même point* A *d'une piste circulaire et vont en sens inverse. Ils roulent pendant une heure. La vitesse du premier est* 16^{km} *à l'heure, celle du deuxième* 15^{km},4. *On demande les époques et le nombre des rencontres. On prendra $\pi = 3{,}14$, le rayon de la piste est de* 1^{km}.

(*B. S., Cantal, aspirants, mars* 1920.)

Le tour de la piste est $2\pi R = 2 \times 3{,}14$.

Les cyclistes se croiseront une première fois quand la somme des arcs qu'ils auront parcourus sera égale à un tour; or, en une heure, la somme des arcs qu'ils parcourent est

$$16 + 15{,}4 = 31{,}4;$$

c'est cinq fois le périmètre de la piste. Donc la première rencontre aura lieu au bout du cinquième d'une heure, soit de 12 minutes. Mais alors les deux cyclistes se retrouvent dans la même situation relative qu'au départ, et l'on voit que les rencontres successives se produiront toutes les 12 minutes. La cinquième rencontre aura lieu une heure après le départ.

(André DUVAL, *école normale de Quimper.*)

Remarque. — On peut se demander comment sont placés sur la piste les points de croisement des deux cyclistes, dans l'hypothèse où le mouvement continue indéfiniment : l'arc qui sépare deux points

successifs est de longueur constante : ces points sont donc les sommets d'un polygone régulier inscrit. En un cinquième d'heure, le cycliste le moins rapide parcourt $3^{km},08$, soit $\frac{308}{628}$ du périmètre de la piste. La fraction $\frac{308}{628}$ est égale à $\frac{77}{157}$, qui est irréductible. Les deux cyclistes ne se retrouveront donc ensemble au point de départ qu'après s'être croisés 157 fois et les points de rencontre seront les sommets d'un polygone régulier étoilé, de 157 côtés, faisant 77 fois le tour de la circonférence. Le cycliste le plus rapide parcourt, en un cinquième d'heure $\frac{320}{628} = \frac{80}{157}$ de la piste. Quand les deux cyclistes repasseront simultanément au point de départ, après 157×12 minutes, l'un des cyclistes aura fait trois tours de plus que l'autre.

[Bonnes solutions de Mlles M. Bourreau ; M. Marignac ; de MM. G. Alamasset ; Arbey ; E. Beaussire ; M. Boulvert ; J. Briquet ; P. Buchon ; P. Carpentier ; J. Cartouzou ; M. Castelain ; A. Châtelier ; M. Châtelier ; A. Cieutat ; J. Clamens ; G. Clément ; G. Clot ; P. Cornuéjols ; M. Darny ; E. Delmas ; P. Dujoux ; J. Dupaquier ; F. Dupire ; A. Eparvier ; R. Godard ; A. Grall ; E. Grandame ; C. Grard ; Y. Guézelle ; M. Hambert. Herbiet ; P. Lagache ; R. Laporte ; J. Libier ; M.. à Guéret ; F. Maitre ; Y. Maurice ; Ménéchal ; G. Meynaud ; H. Micard ; G. Morel ; Mortaigne ; E. Paté ; E. Peton ; G. Pichon ; J. Pinelli ; M. Pommerolle ; F. Puget ; A. Renault ; A. Ricoux ; A. Robba ; M. Roumy ; H. Sebban ; M. Supernant.]

ALGÈBRE

4085. — *Quand Cicéron fut gouverneur de la Cilicie (51 av. J.-C.), il abaissa le taux légal de l'intérêt à 12 %. par an. De ce fait, M. J. Brutus, qui, quelque temps auparavant, avait prêté de l'argent à une communauté de l'île de Chypre, au taux de 48 %, se trouva recevoir 149 talents, au lieu de 344 sur lesquels il comptait.*

Quelle somme avait-il prêtée, et depuis combien de temps?

On tiendra compte des intérêts composés, les intérêts capitalisant au bout d'un an. (Calcul à faire avec les tables de logarithmes.)

(*Examen allemand*, 1900.)

Soit n la durée du prêt, en années, x la somme prêtée, en talents. M. J. Brutus comptait être remboursé par 344 talents, cela donne l'équation

$$x(1+0,48)^n = 344; \qquad (1)$$

mais au taux de 12 %, il n'en reçut que 149, cela donne une seconde équation

$$x(1+0,12)^n = 149; \qquad (2)$$

on déduit de ces équations, en prenant les logarithmes :

$$\log x = \log 344 - n \log 1,48 = \log 149 - n \log 1,12. \qquad (3)$$

La dernière égalité ne contient pas x et donne la valeur de l'inconnue n :

$$n(\log 148 - \log 112) = \log 344 - \log 149.$$

Calcul :

$\log 344 = 2,53656$	$\log 148 = 2,17026$
$\log 149 = 2,17319$	$\log 112 = 2,04922$
différence $= 0,36337$	différence $= 0,12104$

or le quotient $36337 : 12104 = 3,002$; comme la capitalisation des intérêts se fait tous les ans, nous prendrons $n = 3$.

La durée du prêt est donc de 3 années.

Le calcul du montant x de ce prêt se fait par l'une ou l'autre des équations (3) :

$$\log x = \log 344 - 3 \log 1,48 = \log 149 - 3 \log 1,12$$

$\log 344 = 2,53656$	$\log 149 = 2,17319$
$3 \log 1,48 = 0,51078$	$3 \log 1,12 = 0,14766$
$\log x = 2,02578$	$\log x = 2,02553$

ces deux valeurs ne concordent pas tout à fait, parce que l'exposant n n'est pas exactement 3, mais la différence est assez faible. En prenant $\log x = 2,02553$, on trouve $x = 106,05$; en prenant $\log x = 0,02578$, on arrive à $x = 106,115$.

On peut admettre que la somme x est 106 talents, en chiffres ronds.

(LHOTELIER, à Évreux.)

[Bonnes solutions de MM. A. Authier, école primaire supérieure de Mirepoix ; R. Destobere, à Menin (Belgique) ; A. F., à St-Pons ; R. Godard, à Evreux ; M. Gros ; G. Knoll, à Clermont-Ferrand ; M. Le Pinois, école pratique de Brest ; P. Louon, athénée d'Ixelles ; E. Masdupuy, école normale de Tulle ; A. Ricoux ; A. Wehrung, à Paris.]

4121. — *Le propriétaire A d'un champ vend à une personne B, un lot rectangulaire, dont la longueur est double de la largeur, au prix de $1^f,25$ le mètre carré. Un an après, B propose à A de modifier les dimensions du terrain acheté, en augmentant la largeur primitive de 3^m, tout en diminuant sa longueur de 3^m. Comme, dans l'intervalle, la valeur du terrain a augmenté de 20 %, A accepte à condition que B lui verse une somme de 81^f. Calculer les dimensions primitives du terrain acheté.*

(*B. S., Rennes, aspirants, mars* 1920.)

La surface vendue est $2x^2$, en appelant x le petit côté du rectangle. La surface du champ, après modification de ses dimensions, est $(2x-3)(x+3) = 2x^2 + 3x - 9$; elle a donc augmenté de $3x - 9$. D'autre part, le prix du mètre carré, qui était $1^f,25$, ayant augmenté de 20 %, c'est-à-dire d'un cinquième, est devenu $1^f,50$. Donc $(3x-9)\,1,50 = 81$, ce qui donne, en divisant les deux membres par 9,

$$(x-3).0,5 = 9$$

et, en multipliant par 2,

$$x - 3 = 18.$$

Les dimensions du champ étaient donc 21 et 42^m.

(AUGUSTE CIEUTAT, à Montivilliers, Seine-Inférieure.)

[Bonnes solutions de Mlle M. Bourreau ; de MM. G. Alamasset ; H. Aubert ; Boulvert ; J. Briquet ; P. Carpentier ; J. Cartouzou ; Castelin ; Ch. Caussin ; G. Cellier ; L. Chapelon ; B. Charles ; A. Châtelier ; M. Châtelier ; J. Clamens ; G. Clément ; G. Clot ; P. Cornuéjols ; M. Courboulay ; E. Delmas ; P. Dujoux ; J. Dupaquier ; F. Dupire ; A. Eparvier ; Forceville ; G. Fouché ; R. Godard ; M. Hambert ; V. Herbiet ; G. Houalet ; P. Lagache ; Lecas ; P. Le Berd ; F. Leherre ; M. Le Pinois ; J. Libier ; F. Maitre ; Y. Maurice ; Ménéchal ; H. Micard ; R. Morel ; G. N., à Bruxelles ; J. Navel ; Norgelet ; E. Paté ; Ed. Peton ; G. Pichon ; F. Puget ; Rabelle ; A. Robba ; P. Salvagnac ; J. Sambussy ; M. Supernant ; J. Torres ; N. Vedie.]

4123. — *Résoudre le système*

$$x^2 + xy + yz + zx = a^2,$$
$$y^2 + xy + yz + zx = b^2,$$
$$z^2 + xy + yz + zx = c^2.$$

On peut écrire la première équation

$$x(x+y) + z(x+y) = a^2,$$

ou

$$(x+y)(x+z) = a^2$$

et donner au système la forme

$$\begin{cases} (x+y)(x+z) = a^2, \\ (y+z)(y+x) = b^2, \\ (z+x)(z+y) = c^2, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} ZY = a^2, \\ XZ = b^2, \\ YX = c^2, \end{cases}$$

en posant

$$x + y = Z, \qquad y + z = X, \qquad z + x = Y.$$

Le dernier système se résout immédiatement : en faisant le produit des deux dernières équations membre à membre et en

remplaçant ZY par a^2, on a $X^2a^2 = b^2c^2$. Supposons a, b et c différents de zéro, et désignons par ε un facteur qui sera remplacé, dans les résultats définitifs, par $+1$ ou par -1 : nous avons alors

$$X = \varepsilon\frac{bc}{a}, \qquad \text{d'où} \qquad Y = \frac{c^2}{X} = \frac{c^2a}{\varepsilon bc} = \varepsilon\frac{ac}{b},$$

et

$$Z = \frac{b^2}{X} = \varepsilon\frac{ab}{c}.$$

Pour terminer, on a

$$2x = Y + Z - X = \varepsilon\left(\frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} - \frac{bc}{a}\right) = \varepsilon\frac{a^2c^2 + a^2b^2 - b^2c^2}{abc}.$$

$$2y = Z + X - Y = \varepsilon\left(\frac{ba}{c} + \frac{bc}{a} - \frac{ac}{b}\right) = \varepsilon\frac{b^2a^2 + b^2c^2 - c^2a^2}{abc}.$$

$$2z = X + Y - Z = \varepsilon\left(\frac{cb}{a} + \frac{ca}{b} - \frac{ab}{c}\right) = \varepsilon\frac{c^2b^2 + c^2a^2 - a^2b^2}{abc}.$$

Si a, b et c sont différents de zéro, le système a donc toujours deux solutions, l'une des solutions étant d'ailleurs formée des nombres égaux respectivement à ceux qui forment la première, mais avec le signe opposé. Ce résultat pouvait être prévu, le système ne changeant pas quand on change à la fois le signe des trois inconnues.

(Fernand LEHERRE, aspirant conducteur du Génie rural.)

Discussion. — La solution précédente suppose que a, b et c sont différents de zéro. Supposons maintenant $a = 0$; il faut alors que l'un des deux facteurs $x + y$ ou $x + z$ soit nul. Si $x + y$ est nul et si b est différent de zéro, la seconde équation est impossible; si c'est $x + z$ qui est nul, et si $c \neq 0$, c'est la troisième équation qui est impossible. Donc le système est impossible si *un* seul des trois nombres a, b ou c est nul. Si a et b sont nuls simultanément, on vérifie les deux premières équations en prenant $x + y = 0$, la troisième devient alors $z^2 - x^2 = c^2$. Le système est donc indéterminé : on peut prendre x et y égaux et de signes contraires, leur valeur commune étant arbitraire, la troisième inconnue est alors donnée par $z = \pm\sqrt{c^2 + x^2}$.

Enfin, si a, b et c sont nuls, il est évident que le système est vérifié en annulant deux quelconques des trois facteurs $x + y$, $y + z$, $z + x$. Il se réduit donc à deux équations : on peut choisir arbitrairement la valeur d'une inconnue, les deux autres ayant la valeur égale et de signe contraire.

(E. PATÉ.)

[Bonnes solutions de MM. F. Baujard; Ch. Cadaert; B. Charles; A. Cieutat; J. Clamens; G. Clément; E. Delmas; G. Houalet; Le-Jan-Geffroy; M., à Guéret; Y. Maurice; J. Millour; Monnez; R. Morel; Roquet; V. Roux; H. Sebban; N. Vedie.
Assez bonnes solutions de MM. A. Dubuc; G. Pichon.]

GÉOMÉTRIE

4028. — *On donne un cercle de rayon* R *et d'un point* B *situé à une distance du centre égale à* 2R *on mène les deux tangentes* BC *et* BD. *Prouver que* CD *est le côté du triangle équilatéral inscrit. Prouver que le triangle* BCD *est équilatéral, en calculer le côté et la longueur de la tangente* EF *parallèle à sa base* CD.

Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la surface OCEFD *autour de son axe* OA.

(*B. S., Besançon, aspirants*, 2e *session* 1919.)

La longueur de la tangente BC est moyenne géométrique entre celles des deux segments du diamètre, qui sont $BA = R$ et $BA' = 3R$, donc $BC = R\sqrt{3}$.

(On arrive au même résultat par la considération du triangle rectangle BCO, où

$$\overline{BC}^2 = BO^2 - OC^2 = 3R^2.)$$

Ce triangle rectangle BCO donne

$$\overline{BC}^2 = BI \times BO,$$

donc

$$3R^2 = 2R \times BI, \qquad \text{d'où} \qquad BI = \frac{3}{2}R.$$

I est donc le milieu du rayon OA, ce qui entraine $CO = CA = OA = R$.

Le triangle BCD est équilatéral, car $CD = R\sqrt{3} = BC = BD$.

2° Le triangle OCB engendre un solide formé de deux cônes qui ont une base commune, le cercle engendré par CI; le volume de ce solide est $\pi\overline{CI}^2\frac{1}{3}OB = \pi\frac{3}{4}R^2\frac{2}{3}R$; on en retranche le volume du cône engendré par le triangle BAE, qui est $\pi\overline{EA}^2\frac{1}{3}AB$.

Or $\overline{CI}^2 = \frac{3}{4}R^2$, $EA = \frac{2}{3}CI$, donc $\overline{EA}^2 = \frac{1}{3}R^2$, $AB = R$, $OB = 2R$, le volume demandé est donc égal à

$$\frac{1}{3}\pi R^3\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{18}\pi R^3 = 1{,}2217R^3.$$

(L'HOTELIER, à Évreux.)

N. B. — Presque tous nos correspondants ont calculé le volume demandé en le considérant comme la somme du cône engendré par le triangle OID, et du tronc de cône engendré par le trapèze CIAE : cela conduisait à un calcul un peu moins rapide.

[Bonnes solutions de MM. Arnaud; A. Bernadac; M. Boulvert; Bouzil; G. Bruniquel; A. Cabarat; G. Cellier; M. Châtelier; G. Colle; A. Collet; G. Démaret; H. Detour; F. Dupire; E. Epailly; A. F., à St-Pons; P. Faucheux; M. Forcade; L. Gimbert; Goudin-Popu; J. Grall; M. Gros; G. Guicheney; R. Guiot; V. Herbiet; Hiriartborde; P. Lamoitier; H. Le Lan; P. Louon; Magdinier; G. Martin; J. Mauhin; R. Maurice; A. Moreau; H. Naudet; C. Noirbent; G. Pichon; A. Ricoux; L. Soulier; M. Stévenard; G. Vergnon.]

4092. — *On donne deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy, *un point* A *sur* Ox, *un autre point* B *sur* Oy, *tels que* $OA = OB$.

Un cercle variable (C), *passant par* A *et* B, *coupe* Oy *en* M; *on trace le cercle* (γ) *qui passe par* M *et touche en* O *la bissectrice intérieure de l'angle* AOB.

1° *Trouver le lieu du second point d'intersection* P *des cercles* (C) *et* (γ).

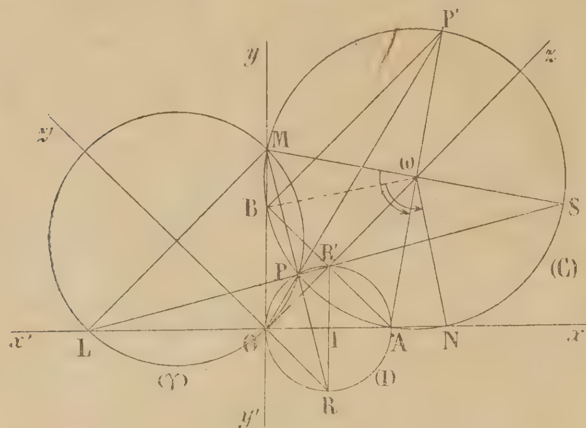
2° *Montrer que l'axe radical des cercles* (C) *et* (γ) *passe par un point fixe.*

Le cercle (C), qui passe en A et B, a pour centre un point ω de la droite perpendiculaire à AB en son milieu, droite qui coïncide avec Oz, bissectrice intérieure de l'angle AOB. Cette droite étant un axe de symétrie de la figure formée par le cercle (C) et par les deux axes Ox et Oy, ces axes coupent le cercle en des points deux à deux symétriques, A et B, M et N. Les arcs symétriques MB et NA sont égaux et de sens opposés, MB et AN sont égaux et de même sens, ainsi que les angles $M\omega A$ et $B\omega N$: leur valeur commune est un droit, car l'angle dont il faut faire tourner autour de ω la corde MB pour l'amener sur AN est égal à celui des axes.

Le cercle (γ) coupe Ox en L, son centre est sur la droite Oz' perpendiculaire à Oz, puisqu'il touche Oz; le point L est donc symétrique de M par rapport à Oz' et diamétralement opposé à M sur le cercle (γ), puisque LOM est un angle droit. La droite LM étant parallèle à la tangente en O, O est le milieu du demi-

cercle LOM; il résulte de ces remarques que LP est perpendiculaire sur MP et que PO est une bissectrice de l'angle LPM.

La droite LP, prolongée au besoin, coupe le cercle (C) en S, qui est diamétralement opposé à M sur le cercle (C), de plus le point A est le milieu de l'arc MS, puisque l'arc MA est le quart de la circonférence. PA est donc une bissectrice de l'angle de PM avec PL. D'ailleurs, il est évident que O, P et A ne sont pas en ligne droite, et que les deux droites PO et PA sont les deux bissectrices de l'angle de PL et PM : PO et PA sont donc rectangulaires, P est un point du cercle (I) décrit sur OA comme diamètre.



Réciproque. — Considérons sur le cercle (I) le point R' où il est coupé par la droite BA, et le point diamétralement opposé R : la droite RR' est perpendiculaire à OA en son milieu.

Soit P un point quelconque du cercle (I); prenons-le d'abord sur le quart de cercle OR', les droites RP et R'P, qui sont rectangulaires, coupent respectivement les axes yy' et xx' en M et L. Si P est sur le quadrant OR', OM a même sens que OB et OL a le sens opposé à OA, mais OM et OL changent de sens simultanément, en s'annulant ou en devenant infinis, quand P passe en O, en R' ou en R. Donc les bissectrices *intérieures* des angles (OM, OL) et (OA, OB) sont toujours perpendiculaires.

Ceci posé, considérons le cercle qui a LM pour diamètre; il passe en O et en P, puisque les angles LOM et LPM sont droits; de plus, comme PO et PA sont les bissectrices de l'angle des cordes PR et PR', le point O est le milieu du demi-cercle LM. La tangente en O à ce cercle est donc parallèle à LM; c'est la bissectrice Oz de l'angle de OB et OA.

Considérons maintenant le cercle APM, de centre ω; il coupe LP au point S, diamétralement opposé à M, puisque l'angle LPM est droit. PA est bissectrice de l'angle MPS, donc A est le milieu du demi-cercle MS, l'angle MωA est droit.

Cela prouve que les quatre points O, M, ω, A sont sur un cercle dont MA est un diamètre; ω est le milieu du demi-cercle MωA, puisque ωM = ωA. ω est donc un point de la bissectrice de l'angle AOB; le cercle (C) coupe OM en B, symétrique de A par rapport à Oω.

On voit ainsi que tout point P pris sur le cercle (I) est un point commun à deux cercles définis comme l'ont été (C) et (γ). De même, toute droite RP est l'axe radical d'un cercle (C) et d'un cercle (γ). Toutefois, quand P passe en O, en R ou en R', les rayons de ces cercles peuvent devenir nuls ou infinis.

Application de l'inversion. — Si l'on transforme par inversion la figure formée par les cercles (C) et (γ), en prenant O pour pôle d'inversion et pour puissance le produit OB × OM = OA × ON, le cercle (C) se change en lui-même; le cercle (γ), qui passe en O, se change en une droite parallèle à la tangente en O, c'est-à-dire parallèle à Oz et passant par le point B, qui est l'inverse de M. L'inverse de P est donc le point P' où le cercle (C) coupe la parallèle à Oz menée par B; ce point est diamétralement opposé à A, car l'angle ABP' est droit; il en résulte que ANP' est aussi un angle droit. La droite NP', perpendiculaire à Ox, a pour inverse le cercle décrit sur OA comme diamètre, car A est l'inverse de N. Le point P est donc un point de ce cercle (I), décrit sur OA pour diamètre.

[Bonnes solutions de MM. F. Baujard; A. Cieutat, au Havre; J. Dougados, à Castres; A. F., à Saint-Pons; M. Forcade, à Lyon; G. Knoll, à Clermont-Ferrand; P. Louon, athénée d'Ixelles; M., à Guéret; J. Millour, à la Forêt; Mouillade, à l'Isle-sur-Sorgues.]

4126. — *Si* AB *est le plus petit côté d'un quadrilatère convexe* ABCD, *et si l'on mène par* A *et* B *deux droites parallèles* AK, BL, *coupant* CD, *entre* C *et* D, *en* K *et* L, *et rencontrant les diagonales* BOD *et* AOC *en* M *et* N *le pentagone* OMKLN *est équivalent à la somme des triangles* AMD, AOB *et* BNC *dans deux cas, et dans ces deux cas seulement :*

1° *Quand* AB *est parallèle à* DC;

2° *Quand le milieu de* KL *coïncide avec le milieu de* DC.

Aux deux membres de l'équation qui doit avoir lieu entre les surfaces

$$\text{DMA} + \text{AOB} + \text{BNC} = \text{KMONL},$$

ajoutons la somme des aires des triangles

$$\text{AMO} + \text{AOB} + \text{BON};$$

dans le premier membre apparaît la somme des deux triangles ADB + ACB, et dans le second, l'aire du trapèze AKLB. Soit I le milieu de DC et J celui de KL, soient D', I', J', C' les projections de D, I, J et C sur la droite AB; on a

$$\text{ADB} + \text{ACB} = \frac{1}{2}\text{AB}.\text{DD}' + \frac{1}{2}\text{AB}.\text{CC}' = \frac{1}{2}\text{AB}(\text{DD}' + \text{CC}') = \text{AB}.\text{II}'$$

et

$$\text{surface AKLB} = \text{AKB} + \text{ALB} = \text{AB}.\text{JJ}'.$$

L'égalité proposée équivaut donc à II' = JJ'. Nous sommes donc conduits à examiner deux hypothèses :

1° AB est parallèle à DC; dans ce cas, deux points quelconques de DC sont équidistants de AB; la direction AK peut être choisie arbitrairement.

2° AB et DC ne sont pas parallèles; dans ce cas, il n'existe pas sur la droite DC, d'un même côté de AB, deux points dont les distances à AB soient égales. L'égalité II' = JJ' entraîne donc que I et J coïncident; alors AK et BL sont parallèles à la droite qui joint le point I au milieu de AB.

(Robert LECAS.)

N. B. — Plusieurs correspondants ont bien démontré que l'égalité considérée a lieu dans les deux cas indiqués, mais ils n'ont pas prouvé nettement qu'elle n'a lieu dans aucun autre cas.

Remarque. — Les triangles ANM, ABM sont équivalents, car BN est parallèle à AM; en retranchant une partie commune AOM, il ne reste que AOB et MON, qui par suite sont équivalents.

On est ramené alors à chercher dans quels cas la somme DMA + CNB est équivalente au trapèze KMNL, ou, en ajoutant DMK et CNL aux deux membres, dans quels cas le triangle *fixe* DOC est équivalent à la somme DAK + CBL.

Or le trapèze MKLN se décompose en deux triangles, MKN et LKN, respectivement équivalents à MKB et ANL.

Il s'agit donc de chercher les cas où la quantité

$$\text{AKD} - \text{DKB} + \text{BLC} - \text{ALC}$$

est nulle; or cette somme algébrique vaut

$$\frac{1}{2}(\mathrm{DK.A}a - \mathrm{DK.B}b + \mathrm{LC.B}b - \mathrm{LC.A}a)$$
$$= \frac{1}{2}(\mathrm{DK} - \mathrm{LC})(\mathrm{A}a - \mathrm{B}b).$$

Cette dernière expression est un produit de deux facteurs, qui n'est nul que si un des facteurs est nul.

Or, si $\mathrm{A}a = \mathrm{B}b$, AB est parallèle à DC
et si DK = LC, DI — DK = IJ — LC,
donc le milieu I de DC est aussi celui de KL.

(Jean Millour, à la Forêt, Finistère.)

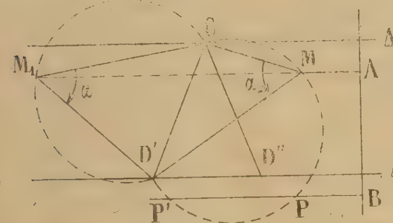
[Bonnes solutions de MM. Ch. Andrei; F. Baujard; E. Garandel, à Pénestin (Morbihan); V. Herbiet, à Marneffe (Belgique); M., à Guéret.
Assez bonnes solutions de MM. A. Berry; L. Chapelon; P. Delacour; P. Dujoux; R. Laporte; Le Jan-Geffroy; Ménéchal; M. Petit.]

SOLUTIONS D'EXERCICES

4061. — *Étant données deux parallèles Δ et Δ', construire une sécante de longueur donnée, l, vue d'un point donné A sous un angle donné α.*

Remarquons d'abord qu'à toute sécante satisfaisant aux conditions imposées en correspond une autre, symétrique par rapport à la perpendiculaire menée de A sur les deux parallèles.

Si la longueur l est supérieure à la distance des parallèles, on peut mener par un point C pris arbitrairement sur Δ deux droites sécantes dont la longueur est égale à l; soit CD' l'une d'elles : construisons sur cette sécante comme corde les segments capables de l'angle α et menons par le point donné A une parallèle aux droites Δ et Δ'. Cette parallèle peut couper un des segments en un ou deux points M et M_1. Faisons glisser maintenant la sécante CD', ses extrémités restant sur Δ et Δ', de façon à amener M ou M_1 en A; nous aurons ainsi une ou deux solutions du problème.



Sur la figure, on voit que si le point donné est A, chacun des segments fournira une solution : il y a une différence entre ces solutions, l'une donne un angle CMD égal à α, l'autre un angle $\mathrm{CM_1D}$ égal en valeur absolue mais de *sens opposé*.

Si le point donné est en B, le premier segment donne deux solutions; on placera les sécantes par la translation PB, ou par la translation P'B; l'autre segment n'en donne pas.

En faisant les mêmes constructions sur la sécante CD'', on obtiendrait les solutions symétriques des premières.

4095. — *a, b et c étant en progression arithmétique, vérifier qu'il en est de même pour*

$$a^2 + ab + b^2, \qquad b^2 + bc + c^2, \qquad c^2 + ca + a^2.$$

Trouver le rapport des deux raisons.

Si a, b et c sont en progression arithmétique, de raison r,

$$a = b - r, \qquad c = b + r;$$

il faut prouver que l'un des trois autres nombres est la somme des deux autres; montrons en effet que

$$2(c^2 + ca + a^2) = a^2 + ab + b^2 + b^2 + bc + c^2;$$

remplaçons a et c par leurs valeurs en fonction de b et de r; le premier membre de l'égalité à démontrer devient

$$2[(b+r)^2 + b^2 - r^2 + (b-r)^2] = 2(3b^2 + r^2);$$

le second membre est

$$a^2 + c^2 + 2b^2 + b(a+c) = (b-r)^2 + (b+r)^2 + 2b^2 + b(2b)$$
$$= 6b^2 + 2r^2.$$

L'égalité proposée est donc bien vérifiée. La raison R de la nouvelle progression est la moitié de la différence entre les termes extrêmes :

$$\begin{aligned} 2\mathrm{R} &= (b^2 + bc + c^2) - (a^2 + ab + b^2) \\ &= c^2 - a^2 + b(c-a) \\ &= (c-a)(a+b+c) \\ &= 2r \times 3b; \end{aligned}$$

le rapport des deux raisons est $3b$.

EXAMENS ET CONCOURS DE 1920 (*Suite.*)

EXAMENS ORAUX des ÉCOLES NATIONALES D'ARTS ET MÉTIERS (*)

Arithmétique et Algèbre (*Suite*).

84. — [**4173**(**)]. Trouver x tel que $\mathrm{AB} + x^2$ soit carré parfait, A et B étant premiers absolus. Application numérique.

85. — Valeur numérique d'un polynome entier en x,

$$\mathrm{A}_0x^m + \mathrm{A}_1x^{m-1} + \ldots + \mathrm{A}_m,$$

pour $x = \infty$. Valeur numérique d'une fraction dont les termes sont des polynomes entiers en x pour $x = \infty$.

86. — Résoudre l'équation

$$\sqrt{x+a} + \sqrt[3]{x-a} = \sqrt[3]{2x}.$$

---

87. — Énoncer les théorèmes relatifs à la théorie du plus grand commun diviseur de deux nombres.

88. — Effectuer

$$\frac{\dfrac{a^2+b^2}{a} - b}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}} : \frac{b^3 + a^3}{b^2 - a^2}.$$

89. — [**4174**]. Résoudre l'équation

$$x^2 - 6x + 9 = 4\sqrt{x^2 - 6x + 6}.$$

---

90. — Établir les formules : 1° de l'intérêt, en fonction du capital, du taux et du temps; 2° du capital placé, en fonction de la valeur acquise, du taux et du temps; 3° de l'intérêt simple, en fonction de la valeur acquise, du taux et du temps.

91. — Effectuer les calculs

$$\frac{a^2 - a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}},$$

x étant une variable; par un changement de variable, peut-on faire en sorte que l'expression soit rationnelle?

92. — Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit. Maximum. — Trouver deux nombres connaissant leur différence, supposée positive, et leur produit.

---

93. — Quel est le plus petit nombre entier qui, multiplié par les fractions $\frac{100}{182}$, $\frac{100}{240}$, $\frac{33}{84}$, rend ces fractions entières?

94. — Chercher les valeurs de x qui font prendre à la fonction

$$m = \sqrt{\frac{2x^2 - 5x + 1}{x + 1}}$$

une valeur réelle.

95. — Calcul logarithmique. — Calculer $x = 27{,}642^{\frac{3}{2}}$.

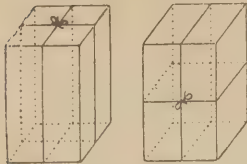
(*A suivre.*)

(*) Les questions posées à un même candidat sont comprises entre deux traits.
(**) Ce second numérotage ne porte que sur les questions dont nous avons l'intention de donner ici une solution. Ces questions seront résolues comme exercices; les abonnés ne devront pas en envoyer de solutions.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES BEAUX-ARTS ET ÉCOLES RÉGIONALES D'ARCHITECTURE

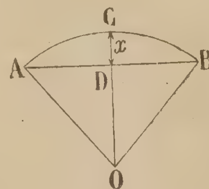
Mathématiques.

I. — **4175**. Un paquet a la forme d'un parallélépipède à base carrée. Pour l'entourer d'une ficelle qui passe par les milieux des côtés des carrés, il faut $2^m,20$ de ficelle. Si la ficelle passe par les milieux des côtés de deux rectangles opposés, il en faut 2^m. Dans chacun des cas, on a compté 20^{cm} pour le nœud.



Calculer les dimensions du parallélépipède.

II. — **4176**. Une toupie a la forme d'un secteur sphérique OACB. Le rayon AD du cercle limitant la calotte a une longueur donnée a et la hauteur CD de la calotte est désignée par x.



Calculer en fonction de a et de x le volume de la toupie et étudier les variations de ce volume lorsque x prend toutes les valeurs possibles.

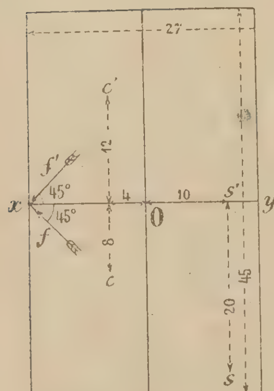
III. — **4177**. Calculer la somme qu'il faut placer pendant trente ans à intérêts composés, au taux de 4 %, pour obtenir $125\,000^f$.

On fera le calcul à l'aide de tables de logarithmes à 5 décimales, mais on prendra

$$\log 1,04 = 0,0170333.$$

(28 *juin* 1920. — *Durée : 2 heures.*)

Géométrie descriptive.



ÉPURE. — Une sphère de 6^{cm} de rayon a pour centre le point c, c'. Un cône, de sommet s, s', circonscrit à la sphère, est limité à son sommet et au cercle de contact avec la sphère.

On considère le solide formé par le cône ainsi limité et par le segment sphérique extérieur à ce cône, ayant comme base unique le cercle de contact.

Représenter ce solide éclairé par des rayons lumineux parallèles à la direction f, f'.

Les données du croquis sont exprimées en centimètres. Le cadre est de 27 sur 45; la ligne de terre est parallèle aux petits côtés du cadre et au milieu; le point O est le centre du cadre.

(29 *juin* 1920. — *Durée : 2 heures.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4178. — Trouver un nombre de deux chiffres, sachant que la somme de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique de ses chiffres est divisible par 9.

(Francis DUPIRE.)

4179. — Simplifier et calculer l'expression

$$(\sqrt{3}-1)^3\sqrt[3]{9+5\sqrt[2]{3}}+(\sqrt{3}+1)^3\sqrt[3]{9-5\sqrt[2]{3}}.$$

(André BAL.)

4180. — Simplifier et calculer l'expression

$$(3-\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}}+(3+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

(André BAL.)

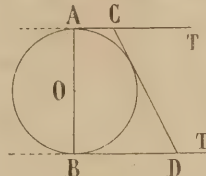
4181. — Calculer la valeur que prend la fonction

$$y = x\sqrt{\frac{(1-x)}{(1+x)}}$$

quand on y remplace x par la racine positive de l'équation

$$x^2+x-1=0.$$

4182. — Trouver sur le prolongement de la petite base BC d'un trapèze ABCD isocèle un point P tel que l'angle BPA soit double de l'angle CPD.

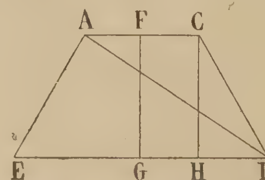


4183. — Par les extrémités A et B d'un diamètre d'un cercle O de rayon R, on mène les tangentes AT et BT'. Déterminer sur AT un point C tel qu'en menant CD tangente au cercle O, l'aire du trapèze ACDB ait une valeur donnée k^2. Discuter.

(*B. S., Haute-Loire, aspirants, mars* 1920.)

4184. — On donne un trapèze isocèle ACDE dans lequel on a :

AC (petite base) $= b$, DE (grande base) $=$ B, $\hat{D} = 60°$.



1° Calculer CD.

2° Calculer la hauteur CH.

3° Calculer l'aire du trapèze ACDE et interpréter le résultat s'il a été obtenu par le procédé habituel.

4° Que devient l'expression de cette surface dans le cas particulier où $B=2b$? Interpréter géométriquement la nouvelle expression.

5° Dans l'hypothèse $B = 2b$, calculer :

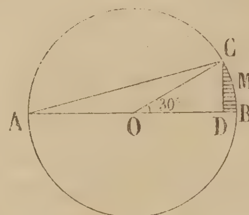
a) le rapport $\dfrac{\text{aire ACD}}{\text{aire ACDE}}$,

b) le côté du triangle équilatéral équivalent au trapèze.

6° On imprime au trapèze une rotation de 180° autour de la droite FG qui joint les milieux des bases. Exprimer le volume engendré.

(*B. S., Orne, aspirants, mars* 1920.)

II. — **4185**. Le diamètre AB d'une circonférence O est mesuré par $2a$ et le rayon OC, incliné de 30° sur le diamètre AB, se projette en OD sur AB.



Calculer, en fonction de a :

1° la longueur de CD;

2° la surface DCMB;

3° le volume du cône engendré par le triangle rectangle ACD faisant un tour complet autour de AB.

(*B. S., Sarthe, aspirants, mars* 1920.)

4186. — Avec trois canons placés aux points B, D et C sur la ligne droite BE, un chef de batterie doit battre un poste de commandement ennemi situé en A.

La longueur du segment de droite BC est de 112^m et le point D est au milieu de BC. Les droites AB et AC font avec la droite BE les angles ABE $= 45°$ et ACE $= 60°$.

On demande de calculer à 1^m près, la distance à laquelle le chef de batterie doit faire tirer chacun des trois canons pour que les projectiles convergent sur le poste de commandement.

(*B. S., Lille, aspirants, mars* 1920.)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie PAUL BRODARD.

23e Année. 1er Janvier 1921. No 7.

L'Éducation Mathématique

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

PRIX DU NUMÉRO : France et Colonies, 0 fr. 60. Étranger, 0 fr. 70.
ABONNEMENT ANNUEL : France et Colonies, 10 fr. Étranger, 12 fr.

Tous les abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, l'on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction : Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Abonnements : Librairie **Vuibert**, Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ÉCOLE SUPÉRIEURE DES POSTES ET TÉLÉGRAPHES

(Section des rédacteurs élèves.)

Concours de 1920.

4134. — *Soit le système*

$$\begin{cases} 3x+(1+m)y+1-2m=0, \\ 2x+(1-m)y+1+2m=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Entre quelles limites doit être compris m pour que ce système admette une solution composée de deux nombres négatifs?

Pour résoudre ce système d'équations du premier degré, multiplions la première équation par 2, la seconde par 3 et faisons la différence; x est éliminé, et l'on trouve

$$y(5m-1)=10m+1. \qquad (2)$$

Pour calculer x, ajoutons les équations membre à membre; il vient

$$5x+2y+2=0, \qquad (3)$$

d'où

$$x=-\frac{2}{5}(y+1)=-\frac{2}{5}\cdot\frac{15m}{5m-1}.$$

y est négatif quand

$$(10m+1)(5m-1)<0,$$

donc quand

$$\frac{1}{5}>m>-\frac{1}{10}; \qquad (4)$$

x est négatif quand

$$15m(5m-1)>0,$$

donc quand

$$m<0 \quad \text{ou quand} \quad m>\frac{1}{5}; \qquad (5)$$

la seconde condition contredit l'une des conditions (4) et n'est pas acceptable, il reste alors

$$0>m>-\frac{1}{10};$$

ces deux inégalités sont compatibles.

(G. DÉMARET, école militaire de Montreuil-sur-Mer.)

Remarque. — Si $m=0$, $\quad x=0, \quad y=-1$;

si $\quad m=-\frac{1}{10}, \quad x=-\frac{2}{5}, \quad y=0$;

si m est compris entre 0 et $-\frac{1}{10}$, x est compris entre 0 et $-\frac{2}{5}$, y entre 0 et -1.

On peut en effet vérifier que

$$x=-\frac{2}{5}(y+1) \quad \text{et} \quad x+\frac{2}{5}=-\frac{2}{5}y=-\frac{2}{5}\cdot\frac{10m+1}{5m-1},$$

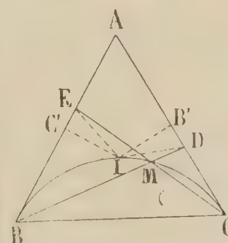
donc

$$\frac{4}{25}y(y+1)=x\left(x+\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{25}\,\frac{(10m+1).15m}{(5m-1)^2}=\frac{12}{5}\cdot\frac{m(10m+1)}{(5m-1)^2}.$$

Ces égalités montrent bien que pour toute valeur de m comprise entre $-\frac{1}{10}$ et 0, $y(y+1)$ et $x\left(x+\frac{2}{5}\right)$ sont négatifs, donc $-1<y<0$, et $-\frac{2}{5}<x<0$.

[Bonnes solutions de MM. Arbey; A. Authier; P. Baylac; J. Calaviq; G. Capus; G. Clément; M. Courboulay; Ch. Caussin; M. Chatelier; R. Collomb; A. Dubuc; A. F., à Saint-Pons; R. Godard; Y. Guézelle; G. Houadet; G. Knoll; G. Laspougeas; M. Le Pinois; A. Lhôtelier; P. Louon; R. Lugan; M., à Guéret; R. Marchant; Y. Maurice; M. Maury; J. Moirez; R. Morel; J. Morin; G. Mouzon; R. P.; Pautras; J.-H. Périchon; J. Périn; G. Pichon; P. Pigeot; G. Ponceau; A. Ricoux; H. Sebban; L. Soulier; A. T., à Blanzy; N. Vedie; I. Dougados; A. Duval; L. P. C.; L. Linemann; J. Mazeau; E. Paté; Mlle M. Marignac.]

4135. — *On considère un triangle équilatéral* ABC, *puis l'arc* BIC *du cercle tangent en* B *et* C *aux côtés* AB *et* AC. *Soit* I *le milieu de cet arc, on mène* BM *et* CM *qui coupent respectivement* AC *et* AB *en* D *et* E.



1° *Montrer que* CD = AE.

2° B' *et* C' *étant les milieux de* AC *et* AB *démontrer que les triangles* IEC' *et* IB'D *sont égaux.*

3° *Quelle est en degrés la valeur de l'angle* EID ?

4° *Lieu géométrique du centre du cercle circonscrit au quadrilatère* ADME.

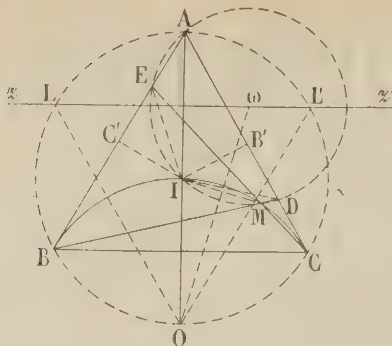
1° Les deux triangles CEA et BDC sont égaux; en effet, BC = CA, par hypothèse, les angles CAE et BCD sont égaux à 60° et les angles ACE et CBD ont même mesure sur la circonférence BMC, savoir la moitié de l'arc MC.

Donc AE = CD.

2° I est le centre du cercle circonscrit au triangle BAC; par conséquent, si l'on fait tourner la figure BC'EA de 120° autour de I, B vient en A, A en C, donc E vient sur D (puisque EA = DC) et C' sur B'; il s'ensuit que les deux triangles C'IE et B'ID, qui peuvent coïncider l'un avec l'autre, sont égaux.

3° L'angle EID est celui de la rotation qui amène E sur D B sur A, A sur C; il vaut 120°.

4° Le quadrilatère AEMD est circonscriptible, car l'angle EMD, égal à 120°, est supplémentaire de $\widehat{EAD}$. Le cercle circonscrit AEMD passe au point I, puisque $\widehat{EID} = 120°$. (On peut même remarquer que I est le milieu de l'arc ED, car IE = ID.)



Le centre ω de ce cercle est donc sur la perpendiculaire zz' élevée à AI en son milieu; ω est aussi sur la perpendiculaire au milieu de la corde IM, et cette perpendiculaire passe au centre O du cercle auquel appartient l'arc BIMC. Cette remarque indique les limites du lieu décrit par ω quand M va de B en C sur l'arc BIC; ces limites sont L et L', où zz' rencontre les perpendiculaires menées de O sur BI et CI; la ligne LL' est égale à BC, les points L et L' sont ceux où zz' coupe le cercle de centre I circonscrit au triangle ABC.

(PAUTRAS, à Paris.)

[Bonnes solutions de Mlle S. David; de MM. Andrei; A. Authier; F. Baujard; P. Baylac; J. Bruneteau; G. Bruniquel; J. Bugnard; R. Cachia; J. Calaviq; G. Capus; B. Charles; Chauvalon; C. Crépeau; G. Démaret; A. F., à Saint-Pons; Fages; R. Godard; Y. Guezelle; E. Guicheney; V. Herbiet; G. Houalet; G. Knoll; R. Laporte; M. Le Pinois; L'Hôtelier; P. Louon; J. Martin; M. Maury; Y. Maurice; R. Morel; G. Mouzon; G. N., à Bruxelles; R. P.; L. G. Papon; Pautras; J. H. Perichon; J. Périn; G. Pichon; P. Pigeot; G. Ponceau; F. Richard; L. Roquet; A. Roussel; H. Sebban; M. Supernant; A. T., à Blanzy; A. Cieutat; A. Pope.]

ARITHMÉTIQUE

4105. — *Trouver un nombre entier qui n'admet que les facteurs premiers 2, 3 et 5 sachant que la somme de tous ses diviseurs y compris 1 et le nombre lui-même est 168. Calculer la somme des inverses de ces diviseurs.*

Le nombre N cherché est de la forme $2^p3^q5^r$; la somme de tous ses diviseurs, y compris le nombre lui-même et l'unité, est donnée par la formule

$$S = (1+2+2^2+\ldots+2^p)(1+3+3^2\ldots+3^q)(1+5+5^2\ldots+5^r);$$

c'est donc un produit de trois facteurs, abc, qui sont respectivement de la forme

$$a = 2m+1, \qquad b = 3n+1, \qquad c = 5t+1;$$

comme p, q et r sont supérieurs ou égaux à 1, on a

$$a \geqslant 3, \qquad b \geqslant 4, \qquad c \geqslant 6.$$

D'autre part, le nombre 168 est égal au produit $2^3 \times 3 \times 7$. Le produit ab étant supérieur ou égal à 12, le troisième facteur c est au plus égal au quotient $168 : 12 = 14$. Or, de 6 à 14 il n'y a que deux nombres qui soient des multiples de 5 augmentés de 1; ce sont 6 et 11. Le second ne peut convenir, car il ne divise pas 168. Il faut donc $c = 6 = 1 + 5$, ce qui donne $r = 1$.

On a ensuite $168 : 6 = 28 = 2^2.7$. On ne peut décomposer 28 en un produit de facteurs, dont l'un est plus grand que 2 et l'autre plus grand que 3 que d'une façon : $28 = 4 \times 7$.

4 n'est pas multiple de 2 + 1. Il faut donc prendre $a = 7$ et $b = 4$; cette solution est possible, car $7 = 1 + 2 + 2^2$ et $4 = 1 + 3$. Donc $p = 2$ et $q = 1$.

Le nombre est $2^2 \times 3 \times 5 = 60$.

Soit d un diviseur de N et d' le quotient de N par d, on a

$$dd' = N, \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{d} = \frac{d'}{N};$$

quand on donne à d successivement toutes les valeurs 1, 2, 3, jusqu'à N, on trouve pour d' les mêmes valeurs, dans l'ordre inverse. La somme des inverses des diviseurs est donc le quotient par N de la somme des diviseurs. Dans le cas traité, cette somme est $168 : 60 = \frac{14}{5}$.

(M., à Guéret.)

Remarque I. — Le nombre cherché est divisible par le produit 2.3.5, qui est égal à 30 et dont la somme des diviseurs est

$$(1+2)(1+3)(1+5) = 72;$$

il est donc supérieur à 30. Considérons un nombre de la forme $2^p3^q5^r$, pour lequel la somme des exposants est 6; le plus petit de ces nombres est $2^4 \times 3 \times 5$, qui est 240. Or ce nombre est supérieur à 168, la somme de ses diviseurs est donc supérieure à 168. Le nombre cherché est donc de la forme $2^p3^q5^r$, la somme $p + q + r$ des exposants étant égale à 4 ou à 5, puisqu'elle est supérieure à 3 et inférieure à 6.

La somme des diviseurs de 30 est 72; si l'on augmente d'une unité l'exposant de 2, la somme des diviseurs augmente de

$$4(1+3)(1+5) = 96,$$

si c'est 3 dont l'exposant est augmenté d'une unité, la somme des diviseurs augmente de

$$9(1+2)(1+5) = 162,$$

enfin, si l'exposant qui croît d'une unité est celui de 5, la somme des diviseurs augmente de

$$25(1+2)(1+3) = 300.$$

Il est évident que le seul nombre qui puisse répondre à la question est $2^2 \times 3 \times 5 = 60$, pour lequel la somme des diviseurs, 72 + 96, est précisément 168.

Remarque II. — On peut observer que le nombre cherché est un multiple de 30, inférieur à 240. Il ne peut être cherché que parmi 60, 90, 120, ... 210. L'essai de 60 réussissant, prouve que les nombres suivants sont trop grands.

(R. MARCHANT, athénée d'Anvers.)

[Bonnes solutions de Mlle A. Levifve; de MM. Arnavon; Arbey; Aureille; P. Baylac; A. Bordes; G. Bruniquel; Ch. Caussin; A. Chatelier; J. Clamens; A. Daoudal; Dauriac; E. Delmas; M. Ducros; M. Didier; J. Dupaquier; A. F., à Saint-Pons; A. Grall; A. Heurtaux; M. Lascour; R. Lecas; Le Jan-Geffroy; H. Le Lan; Le Pinois; L. Linemann; Ménéchal; J. Millour; L. G. Papon; E. Paté; E. Pinlong; A. Renault; F. Richard; A. Ricoux; H. Sebban; L. Thaon; F. Torchet.

Assez bonnes solutions de Mlle M. Marignac; de MM. J. Calavicq; Chauvalon; Camus; A. Cieutat; J. Contour; P. Delacour; J. Devisme; P. Louon; Pautras; J. Périn; J. Régitano.]

ALGÈBRE

4086. — *On évaluait, il y a 12 ans, le cube de bois d'une forêt à 300 000^{m3}; on l'évalue actuellement à 420 000^{m3}. A partir de ce jour, pendant 18 ans, on abattra par an 14 000^{m3} de bois. Au bout de ces 18 ans, la forêt est vendue. A quel cube doit-on estimer le bois sur pied?* (*Examen allemand*, 1900.)

Nous admettrons que le cube de bois de la forêt augmente en progression géométrique : chaque volume V de bois produisant au cours d'une année, un volume v proportionnel à V, $v = aV$; il en résulte qu'au bout d'une année, le volume V est devenu $V(1+a)$ et que, par conséquent, quand n années se sont écoulées, il est devenu $V(1+a)^n$ (*).

(*) Il est évident que cette loi peut être à peu près exacte pour un nombre d'années compris entre certaines limites, 1 et 50 par exemple; elle ne peut être indéfiniment vraie, car le cube d'une forêt vierge, où aucune coupe n'a jamais été pratiquée, serait infiniment grand. Il faut donc qu'il se produise un ralentissement de l'accroissement et qu'au bout d'un temps plus ou moins long, il s'établisse un équilibre, une saturation pour ainsi dire. Il vient un moment, en effet, où des arbres vieillis, qui ne s'accroissent plus ou même qui sont morts, empêchent les jeunes de pousser.

Soit a le taux annuel d'accroissement, la première condition nous apprend que

$$300\,000 \times (1+a)^{12} = 420\,000,$$

d'où l'on tire

$$(1+a)^{12} = \frac{42}{30} = \frac{7}{5},$$

et

$$12 \log(1+a) = \log 7 - \log 5.$$

Calcul :

$$\begin{aligned} \log 7 &= 0{,}84510 \\ \log 5 &= 0{,}69897 \\ 12 \log(1+a) &= 0{,}14613 \\ \log(1+a) &= 0{,}01218 \\ \log 1{,}0280 &= 0{,}01199 \qquad \Delta = 43 \\ 4 \qquad & \qquad 19 \end{aligned}$$

donc $1+a = 1{,}0284$.

Le taux a de l'accroissement est 0,0284, soit à peu près 3 centièmes.

Soit alors A_0 le cube au moment de l'évaluation,

$$A_0 = 420\,000; \qquad \text{posons } b = 14\,000.$$

Le cube est devenu :

après un an $A_1 = A_0(1+a) - b$;

après deux ans $A_2 = A_1(1+a) - b$
$= A_0(1+a)^2 - b(1+a) - b$;

après trois ans $A_3 = A_2(1+a) - b$
$= A_0(1+a)^3 - b(1+a)^2 - b(1+a) - b$.

On reconnaît une loi identique à celle de l'amortissement par annuités égales, donc

$$A_n = A_0(1+a)^n - b[(1+a)^{n-1} + (1+a)^{n-2} + \ldots + (1+a) + 1].$$

La somme entre crochets est celle de termes en progression géométrique, de raison $1+a$; en l'évaluant par la formule connue et en appliquant au cas où $n = 18$, on a

$$A_{18} = A_0(1+a)^{18} - b\frac{(1+a)^{18} - 1}{1+a-1}$$

$$= \frac{(A_0 a - b)(1+a)^{18} + b}{a}.$$

On avait

$$12 \log(1+a) = 0{,}14613,$$

donc

$$18 \log(1+a) = \frac{3}{2} 0{,}14613 = 0{,}21919,$$

$$\log 1{,}6560 = 0{,}21906$$
$$5 \qquad 13 \qquad \delta = 26$$

donc

$$(1+a)^{18} = 1{,}6565.$$

Le calcul donne alors

$$\begin{aligned} Aa &= 420\,000 \times 0{,}0284 \\ &= 42 \times 284 = 11\,928, \end{aligned}$$

et

$$Aa - b = 11\,928 - 14\,000 = -2\,072.$$

Ainsi le cube de la forêt décroît, car on abat chaque année plus de bois qu'il ne s'en forme.

$$2\,072 \times 1{,}6565 = 3\,432{,}268,$$

donc

$$(Aa - b)(1+a)^{18} + b = 14\,000 - 3\,432{,}268 = 10\,567{,}732;$$

enfin le quotient

$$10\,567{,}732 : 0{,}0284 = 372\,103.$$

A la fin de la 18e année, le cube de la forêt peut donc être évalué à 372 000$^{m^3}$ en chiffres ronds.

(Georges KNOLL, à Clermont-Ferrand.)

Remarque. — Le calcul a été fait en défalquant la quantité de bois abattu annuellement, comme si la coupe en était faite à la fin de l'année. Si l'on suppose la coupe faite au commencement de l'année (le nombre total des coupes restant égal à 18), le calcul se fait comme le précédent, en remplaçant b par $b \times 1{,}0284$; il donne un résultat évidemment plus faible, qui est 363 000 m³ environ. En réalité, la coupe est faite pendant l'année et dure un certain temps; les deux nombres calculés fournissent des limites entre lesquelles doit se tenir l'évaluation.

Il est bien évident que ces évaluations ne peuvent donner que l'ordre de grandeur de la quantité cherchée; il ne faut pas attendre plus de précision que la question n'en comporte. Le cube de bois d'une forêt n'est pas une grandeur qui puisse être définie à quelques mètres cubes près; d'autre part, le calcul repose sur une hypothèse, — parce que tout calcul doit exprimer une loi, certaine ou hypothétique, — et on ne peut se dissimuler que cette loi est une supposition quelque peu arbitraire.

Cependant elle correspond à la vérité mieux que la loi d'accroissement en progression arithmétique, que plusieurs de nos correspondants ont appliquée, et qui, inacceptable pour de longues durées, est en défaut aussi pour des durées assez courtes : l'accroissement, au début, va en s'accélérant; il n'est certainement pas constant.

[Bonnes solutions de MM. Gros; Lhôtelier, à Évreux.
Solutions passables de MM. G. Bruniquel; F. Dupire.]

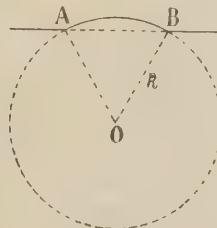
4120. — *Une route, dont la direction générale est rectiligne, fait entre deux points A et B, pour éviter de creuser une tranchée coûteuse, un détour, qui a la forme d'un arc de circonférence dont l'angle au centre est 60°.*

Une colonne d'infanterie, de longueur l, marchant à la vitesse de 4km,5 à l'heure, suit la route : un fantassin isolé prend le raccourci, suivant la droite AB. Parti de A au moment où la dernière file de la colonne y passe, il arrive en B en même temps que la première file, sa vitesse étant égale à celle de la colonne.

Mais si la colonne avait fait entre A et B la halte horaire de dix minutes, le fantassin isolé serait arrivé en B au moment où la tête de colonne y passe, en faisant seulement 3km à l'heure.

Calculer la longueur l de la colonne et le rayon R de l'arc de cercle.

Nous prenons le kilomètre et l'heure pour unités. Soit R le rayon du cercle, la corde AB et l'arc AB ont respectivement pour mesures R et $\frac{R\pi}{3}$.



Si l est la longueur de la colonne, dans le premier cas, le fantassin a parcouru la longueur AB, pendant que la colonne avançait à la même vitesse, d'une longueur égale à arc AB $- l$.

On a donc

$$AB = \text{arc}\,AB - l, \tag{1}$$

mais quand la colonne s'arrête pendant $\frac{1}{6}$ d'heure, on a

$$\frac{AB}{3} = \frac{\text{arc}\,AB - l}{4{,}5} + \frac{1}{6}. \tag{2}$$

Si dans cette dernière équation on remplace arc AB $- l$ par AB, on a, après avoir tout multiplié par 6,

$$2AB = \frac{4}{3}AB + 1,$$

d'où

$$AB = \frac{3}{2} = 1^{km},5.$$

On calcule alors l au moyen de l'équation (1)

$$l = AB\left(\frac{\pi}{3} - 1\right) = 1{,}500\left(\frac{0{,}1416}{3}\right)$$

$$= 0{,}5 \times 0{,}1416 = 0{,}0708,$$

ce qui donne 70m,80, en chiffres ronds 70 ou 71 mètres.

(Constantin GRARD, à Haubourdin.)

Remarque. — Cette solution est en réalité une solution algébrique : les deux inconnues sont l et R, et l'on a $AB = R$, $\text{arc}\,AB = \frac{\pi}{3}R$.

L'énoncé fournit les deux équations

$$R = R\frac{\pi}{3} - l, \qquad \frac{R}{3} = \frac{1}{4{,}5}\left(R\frac{\pi}{3} - l\right) + \frac{1}{16};$$

on peut donner une solution arithmétique du problème.

Solution arithmétique. — La longueur de la colonne est la différence entre celles de l'arc AB et de la corde. En parcourant AB à la vitesse de 3^{km} à l'heure, au lieu de celle de $4^{km},5$, le fantassin perd le même temps que la colonne, qui s'est arrêtée 10 minutes. Quand la vitesse est réduite dans le rapport de 3 à 2, les temps employés au parcours sont entre eux comme 2 à 3, donc le temps augmente de la moitié de sa valeur initiale. Il a donc fallu au fantassin 20 minutes pour parcourir AB à la vitesse de $4^{km},5$ à l'heure, ou 30 minutes pour faire le même chemin à la vitesse de 3^{km} à l'heure : la corde AB a donc 1 500 mètres et la longueur de la colonne est $1\,500\frac{(\pi - 3)}{3} = 70^m,8$.

(E. Paté.)

[Bonnes solutions de Mme G. Clot; de MM. Alamasset; Ch. Andrei; M. Castelain; A. Chatelier; M. Chatelier; A. Cieutat; J. Clamens; P. Cornuéjols; E. Delmas; G. Démaret; P. Dujoux; F. Dupire; A. Duval; Forceville; E. Garandel; R. Godard; A. Grall; A. Haudrechy; V. Herbiet; R. Laporte; P. Lavoine; Le Jan-Geffroy; M. Le Pinois; J. Maulini; G. Meynaud; H. Micard; Ch. Norgelet; M. Pellé; G. Poline; F. Puget; A. Renault; A. Ricoux; P. Salvagnac; H. Sebban; M. Supernant; A. F.; A. T; Adelle; Aureille; A. Authier; Bovet; G. Bruniquel; J. Bugnard; Chapelier; J. Devisme; Chauvalon; M. Didier; R. Gaborit; X. Lacreuse; Le Bleis; Le Gall; L. Linemann; P. Louon; P. Ménéchal; R. Lugan; F. Maitre; A. Masse; J. Moirez; A. Monjallon; G. Mouzon; L. G. Papon; J. Périn; M. Pichereau; G. Ponceau; M. Robineau; L. Thaon; A. Tilloy.]

4125. — *Résoudre le système*

$$(x - y)(x^2 - y^2) = 160,$$
$$(x + y)(x^2 + y^2) = 580.$$

Écrivons les équations proposées

$$(x - y)^2(x + y) = 160 \qquad (1)$$

et

$$(x + y)(x^2 + y^2) = 580. \qquad (2)$$

Posons $x + y = u$ et $x - y = v$; le système devient

$$v^2u = 160, \qquad u(v^2 + u^2) = 2 \times 580 = 1\,160;$$

on élimine le terme v^2u en retranchant la première équation de la seconde; il reste

$$u^3 = 1\,160 - 160 = 1\,000,$$

d'où

$$u = 10 \quad \text{et} \quad v^2 = 16.$$

Si l'on prend $u = 10$ avec $v = +4$, on a $x = 7$ et $y = 3$; si l'on prend $u = 10$ avec $v = -4$, on trouve $x = 3$ et $y = 7$, c'est-à-dire les mêmes valeurs permutées. La seconde forme du système, qui ne change pas si l'on échange x avec y, montrait qu'à toute solution $x = a$, $y = b$, correspond la solution $x = b$, $y = a$.

(G. Gozard, école normale de Moulins.)

Autre solution. — En effectuant les produits indiqués, on trouve

$$x^3 + y^3 - yx^2 - xy^2 = 160,$$
$$x^3 + y^3 + yx^2 + xy^2 = 580;$$

d'où l'on déduit, en ajoutant et en retranchant les deux équations, puis divisant par 2,

$$x^3 + y^3 = \frac{740}{2} = 370,$$

$$xy(x + y) = 210.$$

Or on sait que $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$,

on a donc $(x + y)^3 = 370 + 3 \times 210 = 1\,000$,

donc $x + y = 10$ et $xy = 21$;

x et y sont alors les racines de l'équation

$$X^2 - 10X + 21 = 0,$$

ce qui donne 3 et 7 pour valeurs des deux inconnues.

(Georges Pichon, au Mans.)

[Bonnes solutions de Mlle M. Pinot; de MM. Arbey; H. Aubert; F. Baujard; A. Boyer; W. Burniat; P. Carpentier; J. Cartouzou; G. Cellier; U. Cerisier; M. Chatelier; A. Cieutat; J. Clamens; G. Clement; P. Cornuéjols; M. Courboulay; P. Delacour; E. Delmas; G. Démaret; M. Didier; J. Dirand; F. Dupire; A. Eparvier; G. Fouché; E. Garandel; R. Godard; A. Grall; E. Grimaldi-d'Esdra; J. Griscelli; R. Hacquin; A. Haudrechy; V. Herbiet; A. Heurtaux; G. Houalet; L. P. C.: P. Lagache; R. Lecas; F. Leherre; Le Jan-Geffroy; M. Le Pinois; J. Libière; M., à Guéret; F. Maitre; Y. Maurice; Ménéchal; G. Meynaud; J. Millour; G. N., à Bruxelles; J. Navel; E. Paté; M. Pellé; M. Pommerolle; A. Popu; Y. Quézelle; A. Ricoux; L. Roquet; D. Roullet; M. Rouny; V. Roux; Sambussy; M. Supernant; N. Vedie; A. F.; M. Belin; M. Bousquet; J. Bruneteau; G. Bruniquel; J. Bugnard; R. Chanat; Chapelier; Chauvallon; J. Devismo; H. C. Lotard-Doazan; P. Louon; R. Lugan; M. Maury; J. Mazeau; J. Moirez; L. G. Papon; J. Périn; Pierdet; E. Pinlong; R. P.; J. Régitano; F. Richard; L. Soulier; M. Stévenard; Mlle A. Levifve.]

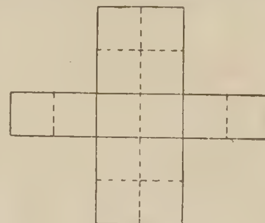
4129. — *Trouver la capacité et les dimensions d'une boîte en fer-blanc sans couvercle, sachant :*

1° Que le fond de cette boîte est un rectangle dont un côté est double de l'autre, et que sa profondeur est égale au plus grand côté du rectangle de base;

2° Que le fer-blanc dont la boîte est faite pèse 20^g par dm^2 et que la boîte vide pèse $100^g,8$.

(*B. S., Seine-Inférieure, aspirantes, mars* 1920.)

Soit x la mesure, en décimètres, du plus petit côté du fond : la boîte a deux faces latérales égales, qui sont des rectangles égaux au fond, ayant pour côtés x et $2x$ et deux grandes faces, qui sont des carrés, de côté $2x$. La somme des surfaces de ces cinq faces est $3(2x.x) + 2(2x)^2 = 14x^2$.



Chaque dm^2 pesant 20^g, le poids en grammes de la boîte est $20 \times 14x^2$; par hypothèse, il est égal à $100^g,8$; on en tire

$$x^2 = 100{,}8 : 280 = 0{,}36;$$

par conséquent $x = 0^{dm},6$.

Les dimensions du fond sont 6^{cm} de largeur, 12^{cm} de longueur.

La capacité de la boîte est $0^{dm^3},864$.

(Pierre Cornuéjols, stagiaire au C. I. R. P. à Metz.)

Remarque. — L'énoncé n'indique pas d'une façon explicite la forme de la boîte; mais nos correspondants lui ont attribué la forme la plus simple, celle d'un parallélépipède rectangle.

[Bonnes solutions de Mme G. Clot; de Mlle M. Bourreau; de MM. H. Aubert; G. Bertrand; L. Bordron; Breton; J. Briquet; P. Carpentier; J. Cartouzou; M. Castelain; U. Cerisier; B. Charles; L. Chapelon; A. Châtelier; A. Cieutat; J. Clamans; G. Clément; M. Courboulay; E. Delmas; P. Dujoux; J. Dupaquier; F. Dupire; A. Éparvier; L. Fixe; Forceville; G. Fouché; R. Godard; Guitton; M. Hambert; V. Herbiet; G. Houalet; P. Lagache; R. Laporte; P. Lavoine; R. Lecas; Le Jan-Geffroy; M. Le Pinois; J. Libier; J. Magnani; M. Maurel; Y. Maurice; Ménéchal; H. Micard; R. Morel; J. Morin; Ch. Norgelet; R. Paris; E. Paté; E. Peton; G. Pichon; M. Pommerolle; A. Popu; F. Puget; Kohn; Rabelle; Ch. Raimond; A. Ricoux; Roquet; M. Roumy; M. Saint-Juvin; P. Salvagnac; J. Sambussy; M. Supernant; J. Torrès; N. Vedie; Mlle S. David; MM. A. F.; A. T.; A. Authier; J. Barbot; A. Bordes; J. Bugnard; R. Cachia; Chauvalon; R. Combaz; R. Contamine; Delerive; J. Devisme; P. Édouard; Ph. Fond; R. Grégoire; R. Guilbert; G. Knoll; L. Linémann; P. Louon; A. Magdinier; F. Maitre; R. Marchant; P. Ménéchal; G. Mouzon; L. G. Papon; J. H. Périchon; J. Périgault; M. Pichereau; Pierdet; E. Pinlong; A. Pouches; G. Rian; M. Robineau; Rosenstock; Roset; H. Sebban; G. Thiébaux; R. Trabet; V. Vasilesco; M. Verlet; M. Veller; Ch. Vouilloux.

Assez bonnes solutions de MM. Alamendin; M. Chatelier; R. Collomb; Y. Guézelle; A. Renault; P. Renaud; A. Robba.]

GÉOMÉTRIE

4127. — *Soient b et c les côtés, a l'hypoténuse d'un triangle rectangle, h sa hauteur.*

Établir la relation $\sqrt{\dfrac{a + 2h}{a - 2h}} = \dfrac{b + c}{b - c}$.

On peut écrire

$$\frac{a + 2h}{a - 2h} = \frac{a^2 + 2ha}{a^2 - 2ha},$$

or, le triangle étant rectangle,

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad \text{et} \qquad 2ha = 2bc.$$

L'expression considérée est donc égale à

$$\frac{b^2 + c^2 + 2bc}{b^2 + c^2 - 2bc} = \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2,$$

et sa racine carrée est $\frac{b+c}{b-c}$ (si l'on suppose $b > c$).

(Charles CADAERT, école professionnelle de Fournes.)

[Bonnes solutions de Mlle E. Cortes; de MM. Arbey; H. Aubert; F. Baujard; A. Berry; A. Boyer; W. Burniat; P. Carpentier; Ch. Caussin; B. Charles; A. Cioutat; J. Clamens; G. Clément; P. Cornuéjols; M. Courboulay; A. Deforge; E. Dolmas; G. Démaret; I. Dougados; F. Dupire; A. Duval; A. Eparvier; G. Février; E. Garandel; R. Godard; A. Grall; J. Griscelli; Y. Guezelle; R. Hacquin; M. Hambert; Herbiet; A. Heurtaux; Kohn; G. Houalet; L.-P.-C.; E. Laborde; Lecas; F. Leherre; Le Jan-Geffroy; M. Le Pinois; M., à Guérot F. Maître; Y. Maurice; Ménéchal; G. Meynaud; J. Millour; R. Morel; J. Morin: Mortaigne; E. N., à Chaumont; G. N., à Bruxelles; J. Navel; Ch. Norgelet; R. Paris; E. Peton: G. Pichon; J. Pinelli; M. Pinot; M. Pommerolle; A. Popu; A. Renault; R. Reynard; A. Ricoux; D. Roullet; M. Roumy; V. Boux; M. Saint-Juvin; J. Sambussy; M. Supernant; N. Vedie; Ed. Yvroud; Mlle Levifve; MM. A. F., à St-Pons; Aureille; A. Authier; Baylac; M. Bousquet; G. Bruniquel; J. Bugnard; R. Cachia; G. Capus; R. Carlier; Chapelier; Chauvalon; R. Combaz; J. Devisme: Ph. Fond; G. Knoll; X. Lacreuse; G. Laspougeas; L. Linemann; H. C. Lotard-Doazan; P. Louon; Lugan; R. Marchant; Ph. Marchesseau; A. Masse; M. Maury; J. Bazeau: J. Moirez; A. Monjallon; A. Moreau; G. Mouzon: L. G. Papon; J. H. Périchon; J. Périguault; J. Périn; M. Pichereau; Pierdet; E. Pinlong; J. Régitano; E. Reynaud; E. Richard; F. Richard; M. Robineau; P. Salvagnac; H. Sebban; L. Soulier; A. Terrier; L. Thaon; V. Vassilescu; P. Vidal.

Assez bonnes solutions de MM. A. Boyer; J. Cartouzou: G. Cellier; A. Chatelier; M. Chatelier; M. Didier; G. Fouché; H. Micard; M. Pellé.]

4144. — *On découpe dans une feuille de carton un secteur circulaire* AOB, *dont le rayon* R *est donné et dont l'angle au centre* AOB $= \alpha$. *En courbant la feuille de façon à rapprocher les rayons* OA *et* OB, *on forme la surface d'un cône de révolution; déterminer l'angle* α *de façon que le volume de ce cône soit le plus grand possible.*

Soit α l'angle au centre et R le rayon du secteur, la longueur de l'arc AB est $R\alpha$. Soit r le rayon et h la hauteur du cône formé en enroulant en cornet la feuille; l'arc AB sera devenu la circonférence de base et R sera l'apothème du cône. On aura donc

$$2\pi r = \alpha R \quad \text{et} \quad h^2 + r^2 = R^2,$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{\alpha}{2\pi} R$$

et

$$h = R\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}};$$

le volume V a pour expression

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{\alpha^2}{4\pi^2} R^3 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}.$$

$\frac{\alpha^2}{4\pi^2}$ est une quantité qui varie de zéro à 1, nous l'appellerons x; il en résulte que V est la fonction de x :

$$V = \frac{1}{3}\pi R^3 x \sqrt{1 - x}.$$

La quantité $x^2(1 - x)$, nulle quand $x = 1$ et quand $x = 0$, a des valeurs positives quand x est compris entre 0 et 1, et varie dans le même sens que sa racine. On est donc ramené à étudier la variation de $x^2(1 - x)$.

Remarque. — Quand $x = 1$, le cône a pour base un cercle de rayon R, mais sa hauteur est réduite à zéro; dans le second cas, où $x = 0$, c'est la hauteur du cône qui est R, mais le cercle de base a un rayon nul; entre ces deux valeurs extrêmes, le volume du cône doit passer par un maximum.

Première méthode. — Le produit $x^2(1 - x)$ est formé des facteurs $1 - x$ et x, dont la somme est constante; il est maximum quand chacun des facteurs est proportionnel à l'exposant qu'il a dans ce produit, ce qui donne

$$\frac{x}{2} = \frac{1-x}{1} = \frac{1}{3},$$

donc $\qquad x = \frac{2}{3} \qquad$ et $\qquad \frac{\alpha}{2\pi} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0{,}816496.$

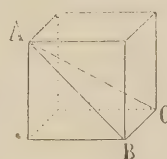
(G. BRUNIQUEL, école normale de Toulouse.)

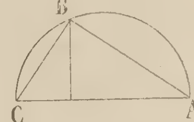
Deuxième méthode. — La dérivée de $x^2(1 - x)$ est $2x - 3x^2$. Lorsque x varie de 0 à 1, elle s'annule, en passant du signe + au signe —, quand x passe par la valeur $\frac{2}{3}$.

Le produit est donc maximum pour cette valeur de x et ce maximum est $\frac{4}{9}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$, ce qui donne pour le maximum du volume $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} R^3$.

(Jacques DEVISME, à Paris.)

Les dimensions du cône de volume maximum sont dans un rapport remarquable, $r = \sqrt{\frac{2}{3}} R$, $h = \sqrt{\frac{1}{3}} R$, donc $r = h\sqrt{2}$. Le triangle rectangle que forment R, h et r a des côtés proportionnels à $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ et 1. La hauteur tombe au tiers de l'hypoténuse, ce qui donne un moyen simple de le construire. Il est semblable à celui que forment un côté BC d'un cube, la diagonale BA d'une face et la diagonale AC du cube.





L'angle du secteur est donné par

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

donc

$$\alpha = 360^\circ \frac{\sqrt{6}}{3} = 120^\circ \times \sqrt{6} = 432\,000'' \times 2{,}449489$$

$$= 1\,058\,179'',25 = 293^\circ\,56'\,19''25;$$

cet angle est plus grand que trois droits.

(G. DÉMARET, école militaire de Montreuil-sur-Mer.)

Remarque. — Pour donner la valeur de l'angle α au centième de seconde près, il fallait prendre une valeur de $\sqrt{6}$ exacte à $\frac{1}{10^7}$ près.

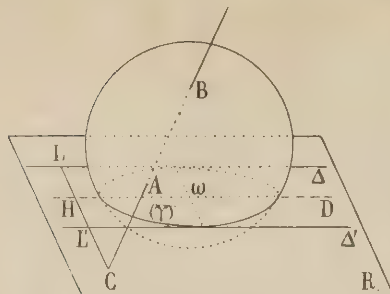
[Bonnes solutions de MM. A. Authier; Barbot; F. Baujard; P. Baylac; G. Bitaine; Ch. Caussin; E. Clavet; C. Crépeau; P. Dujoux; G. Février; G. Knoll; F. Lefèvre; P. Louon; R. Marchant; J. Moirez; G. Mouzon; G. N., à Bruxelles; J.-H. Périchon; R. Reynard; H. Sebban; A. T., à Blanzy; R. Weinzaepfel.]

4145. — *Déterminer une sphère qui passe par deux points donnés de l'espace et qui touche deux droites parallèles, dont le plan ne contient aucun des deux points.*

La droite AB, qui joint les deux points donnés, rencontre le plan R des deux parallèles Δ et Δ' en C; la sphère le coupe suivant un cercle (γ) tangent aux deux droites Δ, Δ' et dont le diamètre est par conséquent égal à la distance $2d$ de ces droites. Le centre ω de ce cercle est un point de la droite D, équidistante des deux parallèles. La puissance de C par rapport à ce cercle est connue; elle est la même que par rapport à la sphère; c'est $\overline{CA} \times \overline{CB}$; on a donc

$$\overline{C\omega}^2 - d^2 = \overline{CA} \times \overline{CB}.$$

Soient L, L' et H les points où la perpendiculaire menée par C aux parallèles coupe Δ, Δ' et D; la distance $H\omega$ est donnée par



$$\overline{H\omega}^2 = d^2 + \overline{CA}.\overline{CB} - h^2$$
$$= + \overline{CA}.\overline{CB} - \overline{CL}.\overline{CL'},$$

en posant $CH = h$. Le problème a donc deux solutions si la quantité $\overline{CA}.\overline{CB} - \overline{CL}.\overline{CL'}$ est positive; en effet, le point ω étant porté sur D, le cercle (γ), de centre ω et de rayon d, est tangent aux deux parallèles; toute sphère qui contient ce cercle touche les droites Δ et Δ'. Il existe une sphère et une seule qui contient (γ) et qui passe par le point A; cette sphère passe aussi par le point B, puisque le produit $\overline{CA}.\overline{CB}$ est égal à la puissance de C par rapport au cercle (γ).

Si C est entre les parallèles et si A et B sont du même côté du plan, le problème est *toujours possible*, car $\overline{CA}.\overline{CB} > 0$ et $\overline{CL}.\overline{CL'} < 0$.

Si C est extérieur à la région comprise entre les parallèles et si A et B sont de part et d'autre du plan, le problème est *toujours impossible*.

Dans les deux autres cas : A et B du même côté du plan, C extérieur, ou A et B de part et d'autre, C intérieur, il y a une condition, qui peut être remplie ou non.

(M., à Guéret.)

Remarque. — Le problème peut être résolu par l'intersection de surfaces.

Un premier lieu du centre I de la sphère est le plan Q, perpendiculaire à R suivant la ligne D, car ce plan est le lieu des points équidistants de Δ et de Δ'.

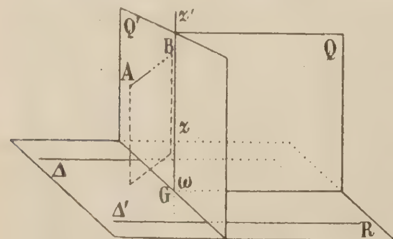
Un second lieu est le plan Q', perpendiculaire à AB en son milieu, qui est le lieu des points équidistants de A et de B.

Ces deux plans se coupent suivant une droite zz'.

Enfin la sphère et le plan R ont en commun un cercle (γ) dont le centre est ω et le rayon d (demi-distance des parallèles). La distance de C à ω est connue, car $\overline{C\omega}^2 - d^2 = \overline{CA}.\overline{CB}$, donc $\overline{C\omega}^2 = d^2 + \overline{CA}.\overline{CB}$; ω, qui est la projection du centre I de la sphère sur R, appartient donc à un cercle (X) décrit de C comme centre avec le rayon $\sqrt{d^2 + \overline{CA}.\overline{CB}}$.

Un troisième lieu de I est par conséquent le cylindre de révolution dont la courbe de base est le cercle (X) et dont les génératrices sont perpendiculaires au plan R. Ce cylindre peut couper la droite zz' en deux points, qui sont les positions du centre de la sphère cherchée; le rayon est la distance du centre à l'un des points A ou B.

Cas particuliers. — Si AB est parallèle au plan R, la première solution ne s'applique plus, mais la précédente donne une construction simple si la ligne AB n'est pas perpendiculaire à la direction des parallèles; les plans Q et Q', l'un et l'autre perpendiculaires au plan R, se coupent suivant une droite perpendiculaire à ce plan, qu'elle rencontre en un point G; le centre cherché se projette donc en G, qui coïncide avec ω; la sphère est alors déterminée par le point A et le cercle (γ), de centre ω, de rayon d : il n'y a plus dans ce cas qu'une solution.



Enfin, si la droite AB est perpendiculaire à Δ et Δ', les plans Q et Q' sont parallèles ou confondus. S'ils sont parallèles, le problème est impossible; s'ils sont confondus, il y a une infinité de solutions. Pour qu'ils soient confondus, il faut et il suffit que le milieu de AB soit dans le plan Q.

[Bonnes solutions de Mlle A. Levifve; de MM. J. Devisme, à Paris; Herbiet. Assez bonnes solutions de MM. R. Marchant, athénée d'Anvers; F. Richard, à Nancy.]

VARIÉTÉ

Sur le nombre π.

Depuis Archimède on désigne par la lettre grecque π le rapport de la longueur du périmètre d'une circonférence à son diamètre : cet hommage est bien dû au premier géomètre, qui, ayant conçu ce qu'il faut entendre par longueur d'un arc de circonférence, a déduit de sa définition un procédé par lequel la valeur numérique de ce rapport peut être calculée avec une approximation aussi grande qu'on le veut. A la vérité, ce procédé est d'une application pénible et longue, mais ceci importe peu, en théorie.

Le nombre π est défini comme la limite du périmètre d'un polygone régulier convexe, inscrit ou circonscrit à une circonférence dont le diamètre est l'unité, lorsque le nombre des côtés de ce polygone augmente indéfiniment.

Archimède s'était arrêté au polygone de $3 \times 2^5 = 96$ côtés, trouvant ainsi que π est compris entre $3 + \frac{10}{70}$ et $3 + \frac{10}{71}$, ce qui donne deux décimales exactes. Longtemps après le mathématicien grec, d'autres géomètres appliquèrent son procédé; disposant de plus de temps, et surtout des facilités de calcul que donne la numération décimale, ils ont successivement poussé l'approximation jusqu'à la 35me décimale.

Archimède a donné le premier résultat 250 ans avant J.-C.; 780 ans plus tard, Aryabhatta, en calculant le périmètre du polygone de $3 \times 2^7 = 384$ côtés obtenait 4 décimales exactes. En 1585, Viète, par le polygone de $3 \times 2^{16} = 393\,216$ côtés, en obtenait 9; en 1597, Adrien van Roomen (Adrianus Romanus) en trouvait 15 par le polygone de $3 \times 5 \times 2^{24}$ côtés. Enfin le dernier qui ait employé cette méthode (à laquelle l'analyse moderne en a substitué de bien plus expéditives), Ludolph van Ceulen, en 1615 et en 1621, par le calcul des polygones de $3 \times 5 \times 2^{35}$ et de 2^{65} côtés, a donné d'abord 20, puis 35 décimales. Ce n'est pas une raison pour appeler π le « nombre de Ludolph », comme on le fait en Allemagne.

Depuis on a poussé le calcul, plutôt par curiosité, et pour éprouver la puissance des méthodes modernes, jusqu'à la 707me décimale. La connaissance d'un aussi grand nombre de chiffres n'a aucun intérêt pratique, et n'en a pas beaucoup non plus au point de vue purement théorique, car on sait d'avance que le nombre n'est pas périodique. Cependant aucune connaissance n'est jamais absolument stérile, et il peut se faire qu'il soit utile un jour, pour la vérification d'une théorie, de posséder la suite des chiffres décimaux du nombre π jusqu'à des termes aussi éloignés.

La valeur d'Archimède, $\frac{22}{7}$ ou 3,14, suffit pour beaucoup d'applications pratiques; son erreur est inférieure à $\frac{2}{1000}$, et l'erreur relative est plus petite qu'un millième. La valeur 3,1416, qui est en excès de moins de 8 millionièmes, convient à presque tous les cas.

Il n'est pas très difficile de la retenir par cœur : cependant on a cherché des moyens mnémotechniques pour retrouver ces décimales et même un nombre plus grand. On a proposé la phrase suivante : « 3 et 1 font 4 et 1 font 5 » qui donne les cinq premiers chiffres, à laquelle on peut adjoindre la suivante : « un 4 et un 5 font 9 », qui rappelle les cinq premiers chiffres décimaux.

Ce moyen est, pour ainsi dire, international : la phrase traduite dans une langue quelconque, conserve son application; mais il n'est pas très bon, en ce sens que le plus facile est peut-être de retrouver la phrase, connaissant le nombre π.

Il a paru plus commode de composer des vers, — les vers passent pour se fixer dans la mémoire plus aisément que la prose, — de façon que le nombre de lettres de chaque mot donne, dans l'ordre, la succession des chiffres décimaux. L'inspiration des poètes a été coupée par la rencontre d'un zéro au 32me rang. Les vers coulés dans ce moule ne comptent pas parmi les meilleurs et les plus harmonieux

qu'on ait écrits en français; autant qu'on en peut juger, les poètes qui ont employé d'autres langues n'ont pas été plus heureusement inspirés.

Quoi qu'il en soit, nous donnons ici, d'après la revue néerlandaise *Wiskundige Tijdschrift*, des vers français, anglais, allemands et hollandais. Nous n'avons pas eu connaissance de vers latins, italiens ou espagnols, s'il en existe. Peut-être un de nos lecteurs pourrait-il combler cette lacune.

Voici d'abord les vers français :

31415926535	Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages! (*)
8979	Immortel Archimède, artiste, ingénieur,
32384626	Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
43383279	Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Ces vers donnent les 30 premières décimales. Le premier est d'un tour assez heureux, et même jusqu'à la onzième. Mais les derniers sont très lourds. Un rimeur a remplacé le troisième par

Toi de qui Syracuse aime encore la mémoire.

Mais ce vers a treize pieds, parce qu'il faut *encore*, le chiffre à cette place étant 6.

Il faut donc préférer, malgré leur tour pénible, les premiers vers, qu'on attribue à Lucas.

En anglais on trouve d'abord un couplet très bien tourné, qui donne les 11 premiers chiffres :

How I wish I could recollect of circle round
The exact relation Archimede unwound !

Notons aussi les strophes suivantes :

Sir, I send a rhyme excelling
In sacred truth and rigid spelling;
Numerical sprites elucidate
For me the lexicon's dull weight. (**)
If Nature gain
Not you complain
Tho' Dr. Johnson fulminate.

et celle-ci, qui, comme la précédente, fut envoyée au journal « Nature » :

Now I know a spell unfailing
An artfull charm, for tasks availing,
Intricate results entailing,
Not in too exacting mood,
(Poetry is pretty good),
Try the talisman. — Let be
Adverse ingenuity.

Pour obtenir le même résultat en allemand, une difficulté se rencontre, c'est qu'il n'existe pas de mot d'une seule lettre, sinon l'exclamation o!, qu'il faut donc faire revenir, à moins d'un subterfuge ingénieux, qui consiste à se servir de la lettre π elle-même. C'est ce qu'a fait l'auteur d'un de ces triolets :

Wie, o dies π macht ernstlich so vielen viele Müh ?
Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein
Wie so zum Beispiel dies möchte zu merken sein.

Les vers suivants, plus ambitieux, sont moins naturels et moins réussis :

Dir, o Held, o alter Philosoph, Du Riesen-Genie !
Wie viel Tausende bewundern Geister himmlisch wie Du und göttlich !
Noch reiner in Aeonen wird das uns strahlen wie im lichten Morgenrot !

En hollandais on a composé le distique suivant, qui, paraît-il, n'est pas fort bon :

Wie U kent, o getal, belangrijk en gepast,
Bezit ook rijker waarheen ankervast (***).

On a souvent besoin de diviser par π, ou de multiplier par l'inverse de π. Le nombre $\frac{1}{\pi}$ est égal à 0,31830988. Un moyen facile de retenir les premiers chiffres est de penser aux trois journées de 1830. Mais ces trois journées, les « glorieuses », seront bientôt à un siècle de nous; bien d'autres journées inoubliables se sont imprimées depuis dans la mémoire des générations : il est à craindre que cette date symbolique ne rappelle bientôt plus grand'chose aux jeunes gens. Ceux qui savent encore que ces trois jours de combat (que commémore la colonne de Juillet à Paris), ont amené l'exil de Charles X, et renversé un ministère à tendances aveuglément réactionnaires, comprendront le sens de cette phrase mnémotechnique, qui donne les neuf premiers chiffres :

« Les 3 journées de 1830 ont empêché le renversement de 89 » (le renversement de 89, c'est 98).

(*) Notez bien le pluriel : aux sages.
(**) Compter l's avec le mot lexicon.
(***) En hollandais, *ij* compte pour une seule lettre, dans *rijk* et dans *rijker*.

SOLUTIONS D'EXERCICES

4096. — *Résoudre l'équation*

$$(x^4 + x^2 + 1)^2 - 38(x^4 + x^2 + 1) + 105 = 0.$$

Prenons pour inconnue auxiliaire $x^4 + x^2 + 1 = z$, l'équation devient

$$z^2 - 38z + 105 = 0,$$

dont les racines sont

$$19 \mp \sqrt{361 - 105} = 19 \mp \sqrt{256} = 19 \mp 16;$$

l'une des racines est + 3, l'autre + 35.

Les valeurs de l'inconnue x sont alors racines de l'une ou de l'autre des équations :

$$x^4 + x^2 + 1 = 3 \quad \text{et} \quad x^4 + x^2 + 1 = 35,$$

ou

$$x^4 + x^2 - 2 = 0 \quad \text{et} \quad x^4 + x^2 - 34 = 0.$$

Chacune de ces deux équations fournit pour x^2 une valeur positive et une valeur négative, à laquelle ne correspond aucune valeur de x.

La première donne $x^2 = + 1$, d'où $x = \pm 1$; la seconde

$$x^2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 136}) = \frac{1}{2}(\sqrt{137} - 1) = 5{,}3524,$$

et

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{137} - 1}{2}} = \pm 2{,}1352.$$

4097. — *Résoudre l'équation*

$$(x + 2)^2 + 2(x + 2)\sqrt{x} - 3\sqrt{x} = 46 + 2x,$$

en utilisant une inconnue auxiliaire.

Si l'on considère les deux premiers termes de l'équation, il vient l'idée de compléter le carré de $(x + 2) + \sqrt{x}$, en ajoutant x aux deux membres; on peut écrire l'équation

$$(x + 2 + \sqrt{x})^2 = 46 + 3x + 3\sqrt{x}$$
$$= 40 + 3(x + \sqrt{x} + 2).$$

On prendra comme inconnue auxiliaire $x + \sqrt{x} + 2 = y$; l'équation à résoudre deviendra alors

$$y^2 - 3y - 40 = 0;$$

elle a pour racines

$$\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{9 + 160}) = \frac{1}{2}(3 \pm 13);$$

cette formule donne les deux nombres 8 et — 5. Les valeurs de $\sqrt{x}$ sont alors racines de l'une ou de l'autre des équations

$$t^2 + t + 2 = 8 \quad \text{et} \quad t^2 + t + 2 = -5$$

ou

$$t^2 + t - 6 = 0 \quad \text{et} \quad t^2 + t + 7 = 0.$$

La seconde n'a pas de racines; la première donne

$$t = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{25});$$

les solutions sont donc

$$\sqrt{x} = 2 \quad \text{et} \quad \sqrt{x} = -3;$$

la seconde est négative et ne convient à l'équation proposée que si l'on prend le signe — devant le radical $\sqrt{x}$.

La valeur $x = 4$, $\sqrt{x} = + 2$ vérifie bien l'équation, car

$$(4 + 2)^2 + 2(4 + 2)2 - 3.2 = 46 + 2.4,$$
$$36 + 24 - 6 = 54;$$

la racine $x = 9$, avec $\sqrt{x} = -3$, vérifie l'équation

$$(x + 2)^2 - 2(x + 2)\sqrt{x} + 3\sqrt{x} = 46 + 2x;$$

on a bien

$$11^2 - 2.11.3 + 3.3 = 46 + 2.9$$

ou

$$121 - 66 + 9 = 64.$$

EXAMENS ET CONCOURS DE 1920 (*Suite.*)

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES

Mathématiques.

ARITHMÉTIQUE.

Question de cours et calcul numérique. — Réduction d'une fraction ordinaire en fraction décimale; condition de possibilité.

Application : On donne la fraction $\frac{885\,768}{1\,060\,800}$; on demande :

1° de la réduire à sa plus simple expression;

2° de reconnaître ensuite s'il existe une fraction décimale égale à la fraction irréductible ainsi obtenue.

4187. — Quatre associés ont engagé dans une entreprise, le premier 28 000ᶠ pendant une année entière, le second 16 000ᶠ pendant 9 mois, le troisième 12 000ᶠ pendant 6 mois et le quatrième 6 000ᶠ pendant 4 mois. — En outre, deux employés sont intéressés, le premier à 2 % et le second à 1 % dans les bénéfices. — Sachant que les bénéfices se sont élevés à 25 000ᶠ, combien revient-il à chacun des deux employés et des quatre associés?

ALGÈBRE.

4188. — 1° Étudier les variations de la fonction $y = \frac{x+5}{x+1}$ et représenter graphiquement les variations de cette fonction.

2° Chercher dans quel intervalle il faut faire varier x pour que la différence $y - 2$ soit, *en valeur absolue*, inférieure à $\frac{1}{10}$.

Chimie.

I. — Action de l'acide sulfurique sur les corps simples : métalloïdes et métaux.

II. — Divers modes d'action de l'acide sulfurique en chimie organique.

(2 *octobre, de* 8 *h. à* 12 *h.*)

Cours spécial de haut enseignement commercial pour les mobilisés de la guerre.

I. — *Mathématiques.*

I. — *Arithmétique.* — **4189.** On place à intérêts simples pendant 15 mois un capital A et on reçoit au bout de ce temps, capital et intérêts réunis, une somme de 13 062ᶠ,50; puis on place un capital double du précédent (soit 2A) pendant 18 mois et on reçoit au bout de ce temps, capital et intérêts réunis, une somme de 26 350ᶠ.

Quels ont été les capitaux placés et le taux *commun* des deux placements?

II. — *Algèbre.* — 1° Dans une progression arithmétique, on désigne par a le premier terme et par r la raison. — Trouver l'expression du n^e terme l, en fonction de a, n et r; calculer ensuite la somme S des n premiers termes.

2° *Application.* — Calculer le nombre n des termes d'une progression arithmétique, connaissant le premier terme a, la raison r et la somme S de ces termes; on donne $a = 5$, $r = 4$, $S = 21\,527$.

S, A, D, B, C

III. — *Géométrie.* — **4190.** Une pyramide SABCD a pour base un rectangle ABCD dont les côtés ont respectivement pour longueurs AB = 1ᵐ et BC = 2ᵐ. Les longueurs des arêtes latérales SA, SB, SC, SD sont égales entre elles et égales à la longueur commune des deux diagonales AC et BD du rectangle.

On demande de calculer à 1$^{dm^2}$ près l'aire de la surface totale de la pyramide.

II. — *Chimie.*

Définitions et propriétés des fonctions : acides, alcools, aldéhydes, cétones, éthers oxydes et éthers sels.

Citer quelques exemples. (6 *octobre, de* 14 *h. à* 18 *h.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4191. — Quel est le plus petit multiple de 17 qui ait la propriété que la racine carrée à l'unité près par défaut soit inférieure de 29 unités au reste?

(V. Thébault, à Ernée, Mayenne.)

4192. — Trouver un nombre de deux chiffres égal au double du produit de ses chiffres. Existe-t-il un nombre de trois chiffres qui soit égal au double du produit de ses chiffres?

4193. — Démontrer, par des théorèmes du premier et du second livre, qu'un triangle dont les côtés sont mesurés par les nombres 3, 4 et 5 est rectangle.

(J. Schilling, à Alger.)

4194. — Une colonne d'infanterie s'avance le long d'une route à la vitesse de 4ᵏᵐ en 50 minutes; le chef de l'avant-garde envoie à 8ʰ,30 un bicycliste porter un pli au chef du gros de la colonne, qui marche à 5ᵏᵐ,300 en arrière de lui. Le bicycliste marche à raison de 15ᵏᵐ à l'heure à l'aller et de 12ᵏᵐ au retour. Il remet son pli au destinataire, qui le retient immobile pendant 5 minutes. A quelle heure sera-t-il de retour près du chef de l'avant-garde, sachant que la colonne s'est arrêtée de 8ʰ,50 à 9 heures?

(*B. S., Toulouse, aspirants, mars* 1920.)

4195. — Une personne possède un terrain triangulaire ABC dont la base BC a 60ᵐ de long et la hauteur AH, 48ᵐ. On trace une route de 12ᵐ de large qui doit passer sur ce terrain, l'un des côtés de la route coïncidant avec la base BC. La personne vend à la commune le terrain nécessaire à raison de 8ᶠ le mètre carré, puis elle cède le reste à un particulier à raison de 6ᶠ le mètre carré. Avec le total des sommes reçues, elle souscrit à l'emprunt 5 % 1920 émis au pair. Quel revenu touchera-t-elle?

A, D, E, B, H, C

(*B. S., Gironde, aspirants, mars* 1920.)

4196. — Un terrain a la forme d'un trapèze ABCD. Les angles C et D valent respectivement 60° et 45°. On donne $AC = 2a$ et $CD = 4a$.

1° Calculer en fonction de a : la hauteur, la base AB et la surface du trapèze.

A, B, 2a, 60°, 45°, C, M, 4a, D

2° On désire partager ce trapèze en deux parties équivalentes par une droite issue d'un point M pris sur CD de telle manière que $CM = \frac{3a}{2}$. A quelle distance de B cette droite rencontrera-t-elle la base AB?

3° Faire les calculs pour $a = 20^m$. (Les longueurs seront évaluées à 1ᶜᵐ près et la surface sera exprimée en ares.)

(*B. S., Lot-et-Garonne, aspirants, mars* 1920.)

4197. — On donne un cercle O de rayon R et un point A situé à une distance du centre égale au double du rayon (OA = 2R). De A on mène les tangentes AB et AC au cercle.

B, D, O, A, C

1° Calculer en fonction de R la longueur des tangentes AB et AC.

2° Déterminer la valeur de l'angle BAC des deux tangentes.

3° On joint les points de contact B et C. Calculer BC.

4° BC n'est-il pas le côté d'un polygone régulier inscriptible dans le cercle O?

5° Calculer la surface de la figure ABDCA.

(*B. S., Vendée, aspirants, mars* 1920.)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie Paul BRODARD.

23e Année. 15 Janvier 1921. N° 8.

L'Éducation Mathématique

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

PRIX DU NUMÉRO : France et Colonies, **0 fr. 60**. Étranger, **0 fr. 70**.
ABONNEMENT ANNUEL : France et Colonies, **10 fr.** Étranger, **12 fr.**

Tous les abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, l'on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction : Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Abonnements : Librairie **Vuibert**, Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

SUR LA RELATION D'EULER

par M. J. Coissard, professeur au lycée Voltaire.

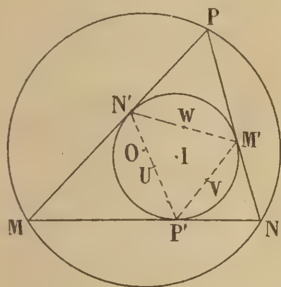
On appelle relation d'Euler l'équation que vérifient les rayons de deux cercles, l'un inscrit, l'autre circonscrit à un triangle, et la distance de leurs centres. Nous nous proposons d'établir cette relation, comme application de l'inversion. Nous nous servirons pour cela de la proposition suivante :

Si I *est un centre d'inversion (ou d'homothétie) de deux cercles* (C) *et* (C′), λ *la puissance d'inversion,* ρ *la puissance de* I *par rapport à* (C), *le rapport d'homothétie de* (C′) *à* (C) *est, en grandeur et en signe,* $\frac{\lambda}{\rho}$.

Théorème. — *Si* R *est le rayon du cercle* (C) *circonscrit à un triangle* MNP, r *le rayon du cercle* (C′) *inscrit au même triangle,* d *la distance de leurs centres, les trois longueurs* R, r *et* d *sont liées par la relation*

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Soient M′, N′, P′ les points de contact des côtés du triangle MNP avec (C′), U, V, W les milieux des côtés du triangle M′N′P′, I le centre du cercle (C′); prenons comme centre d'inversion le point I, comme puissance le carré r^2 du rayon de (C′). Les sommets M, N et P ont pour inverses les points U, V et W, par conséquent le cercle (C″), inverse de (C), n'est autre que le cercle des neuf points du triangle M′N′P′, dont le rayon est $\frac{1}{2}r$.



La puissance de I par rapport à (C) est d'ailleurs négative. L'application de la proposition rappelée ci-dessus donne

$$\frac{r^2}{d^2 - R^2} = \frac{-\frac{1}{2}r}{R},$$

ou

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Remarque. — Si (C′) est un cercle exinscrit de centre I′, de rayon r', la puissance de I′ par rapport à (C) est positive, et l'application du même procédé donne, en appelant d' la distance OI′,

$$d'^2 = R^2 + 2Rr'.$$

Réciproque. — *Si entre la distance* d *des centres de deux cercles* (C) *et* (C′) *et leurs rayons respectifs* R *et* r *existe la relation*

$$d^2 = R^2 - 2Rr,$$

il y a une infinité de triangles inscrits dans le cercle de rayon R *et circonscrits au cercle de rayon* r.

Tout d'abord, la relation $d^2 = R^2 - 2Rr$ s'écrit $d^2 = R(R - 2r)$, elle entraîne donc que $R > 2r$ et $d^2 < (R - r)^2$, d'où, en extrayant les racines positives, $d < R - r$; il en résulte que le cercle (C′) est intérieur au cercle (C).

Soit alors M′ un point quelconque de (C′), la tangente à (C′) en M′ coupe (C) en N et P. Par ces points on peut mener les tangentes à (C′) autres que NP; ces tangentes se coupent en M; il s'agit de démontrer que M est un point de (C).

Conservons les mêmes notations que dans la démonstration précédente. Si l'on prend I comme pôle d'inversion et r^2 comme puissance, l'inverse de (C) est un cercle (C″) qui passe par V et W. L'application de la proposition préliminaire prouve, en tenant compte de la relation $d^2 - R^2 = -2Rr$, que le rayon du cercle (C″) est $\frac{1}{2}r$. Le cercle (C″) ne peut donc être que le cercle circonscrit au triangle M′VW ou le cercle circonscrit au triangle UVW. La première hypothèse est à rejeter, car (C′) étant intérieur à (C), (C″) est intérieur à (C′); et d'ailleurs, le cercle circonscrit au triangle VWM′ est l'inverse de la tangente NP. Donc (C″) passe par U et par conséquent M, inverse de U, est un point de (C).

Remarque. — Si les rayons et la distance des centres de deux cercles (C) et (C′) *qui se coupent* satisfont à la relation

$$d^2 = R^2 + 2Rr',$$

un procédé analogue prouve qu'il y a une infinité de triangles inscrits dans (C) et dont les côtés touchent (C′).

On voit aisément que (C) et (C′) se coupent si $r' \leqslant 4R$; si $r' > 4R$, (C) est intérieur à (C′).

Un cas particulier intéressant est celui où $R = r'$, les deux cercles égaux se coupent, l'angle des rayons aboutissant en un point d'intersection est 120°. On en déduit des propriétés de ce système particulier de cercles.

ÉCOLES NATIONALES D'ARTS ET MÉTIERS

Concours de 1920.

4098. *n étant un nombre entier, prouver que le nombre entier*

$$N = n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)$$

est toujours divisible par 30.

Le nombre N est toujours divisible par 2, car le produit de deux entiers consécutifs, n et $n + 1$, est pair.

Le facteur $n(n + 1)$ est divisible par 3 dans deux cas : si $n = m.3$ et si $n = m.3 - 1$. Le dernier facteur, $6n^3 + 9n^2 + n - 1$,

est divisible par 3 quand $n = m.3 + 1$. En effet, dans cette hypothèse

$$n = 3m + 1, \qquad n^2 = 3m + 1, \qquad n^3 = 3m + 1,$$

($3m$ ou $m.3$ signifiant : multiple de 3), donc

$$6n^3 + 9n^2 + n - 1 = m.3 + 6 + 9 + 1 - 1 = m.3.$$

De même, le facteur $n(n+1)$ est $m.5$ dans deux cas : $n = m.5$ et $n = m.5 - 1$. Le dernier facteur, $6n^3 + 9n^2 + n - 1$, est multiple de 5 dans les autres cas, qui sont $n = m.5 + 1$ et $n = m.5 \pm 2$.

$$n = m.5 + 1, \qquad n^2 = m.5 + 1, \qquad n^3 = m.5 + 1,$$
$$6n^3 + 9n^2 + n - 1 = m.5 + 6 + 9 + 1 - 1 = m.5 + 15 = m.5;$$
$$n = m.5 + 2, \qquad n^2 = m.5 + 4, \qquad n^3 = m.5 + 8,$$
$$6n^3 + 9n^2 + n - 1 = m.5 + 48 + 36 + 2 - 1 = m.5 + 85 = m.5;$$
$$n = m.5 - 2, \qquad n^2 = m.5 + 4, \qquad n^3 = m.5 - 8,$$
$$6n^3 + 9n^2 + n - 1 = m.5 - 48 + 36 - 2 - 1 = m.5 - 15 = m.5.$$

Des trois facteurs dont se compose le nombre N, il y en a toujours un qui est divisible par 2, un par 3, un par 5. Ces trois diviseurs étant premiers, N est divisible par leur produit, qui est 30.

(Pascal MANDROU, à Essonnes, Seine-et-Oise.)

Autre solution. — On peut écrire le polynome $6n^3 + 9n^2 + n - 1$ sous la forme $3n^2(2n+3) + (n-1)$; cela montre qu'il est divisible par 3 si $n - 1$ est $m.3$. De même, on peut former le produit $(n-2)(n+2)(n-1) = (n^2-4)(n-1) = n^3 - n^2 - 4n + 4$, et établir l'identité

$$6n^3 + 9n^2 + n - 1 = 5(n^3 + 2n^2 + n - 1) + (n^2 - 4)(n - 1),$$

qui montre que le polynome $6n^3 + 9n^2 + n - 1$ est $m.5$ si $(n^2-4)(n-1)$ est nul ou multiple de 5, c'est-à-dire si n est de l'une des trois formes

$$m.5 + 1, \qquad m.5 \pm 2.$$

N. B. — Nous avons relevé, dans les solutions reçues, plusieurs transformations intéressantes du polynome N.

Quelques correspondants ont remarqué que ce polynome s'annule pour $n = -\frac{1}{2}$, il est donc divisible par le facteur $2n + 1$.

Remarques. — I. On vérifie facilement l'identité

$$N = n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1);$$

cette forme montre que N est divisible par 6, car le produit des trois premiers facteurs est divisible par 6. On en a une preuve en se rappelant que $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ est la somme des carrés des entiers de 1 à n compris; c'est donc un entier.

On peut écrire

$$N = n(n+1)[3n^2(2n+3) + (n-1)]$$
$$= \text{mult. } 3 + (n-1)n(n+1);$$

le second facteur étant divisible par 3, il est évident que N est divisible par 3.

D'une façon générale, le produit de p entiers consécutifs est divisible par p (et même par le produit $1.2.3 \ldots p$).

On peut faire apparaître le produit de 5 nombres consécutifs dans N, en écrivant

$$N = n(n+1)[5(n^3 + 2n^2 + n - 1) + (n-1)(n^2 - 4)]$$
$$= \text{mult. } 5 + (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).$$

Le second membre est multiple de 5.

(M., à Guéret.)

II. On peut écrire

$$N = n(n+1)[5n^2(n+2) + (n-1)(n^2+1)]$$
$$= \text{mult. } 5 + n(n^4 - 1).$$

Or toute quatrième puissance d'un nombre qui n'est pas multiple de 5 est terminée par le même chiffre que le nombre, donc $n(n^4 - 1)$ est multiple de 5 si n est multiple de 5, et multiple de 10 si n n'est pas multiple de 5.

Enfin, pour éviter d'examiner successivement plusieurs hypothèses et pour démontrer la propriété par un seul raisonnement, plusieurs correspondants ont employé la méthode *de récurrence* : pour $n = 1$, le nombre N est $2 \times 3 \times 5 = 30$. Nous allons démontrer que si un nombre $N = f(n)$ est multiple de 30, le nombre suivant, $f(n+1)$ est aussi multiple de 30.

On a

$$f(n+1) - f(n) = (n+1)(n+2)[6(n+1)^3 + 9(n+1)^2 + n]$$
$$- n(n+1)[6n^3 + 9n^2 + n - 1]$$
$$= (n+1)[30n^3 + 90n^2 + 90n + 30]$$
$$= 30(n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1)$$
$$= 30(n+1)^4.$$

La différence $f(n+1) - f(n)$ est donc un multiple de 30; $f(1)$ est divisible par 30, $f(2)$ l'est donc aussi, et ainsi de suite.

(F. BAUJARD.)

Le calcul précédent montre que

$$f(2) - f(1) = 30.2^4,$$
$$f(3) - f(2) = 30.3^4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f(n) - f(n-1) = 30.n^4;$$

en ajoutant toutes ces égalités et en notant que $f(1) = 30$, on trouve

$$f(n) = 30(1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4).$$

Le nombre N étudié est donc égal à 30 fois la somme des quatrièmes puissances des entiers de 1 à n.

(Joseph MAUHIN, école du Génie civil, à Gand.)

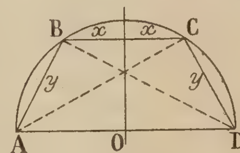
[Bonnes solutions de Mlle Marignac; de MM. A. Authier; P. Baylac; J. Bugnard; Cadaert; J. Camus; G. Capus; Ch. Caussin; G. Cellier; B. Charles; Chapelier; M. Chatelier; A. Cieutat; G. Clément; P. Cornuéjols; M. Courboulay; P. Delacour; A. Daoudal; E. Delmas; F. Dupire; E. Faurès; A.-F., à Saint-Pons; G. Février; M. Forcade; E. Garandel; Geffroy-Le Jan; A. Heurtaux; G. Knoll; H. Le Lan; M. Le Pinois; Lhôtelier; L. Linemann; Lotard-Doazan; P. Louon; F. Maitre; Y. Maurice; J. Mazeau; Ménéchal; J. Millour; R. Morel; G. Mouzon; J. Navel; R. Panchaud; Pautras; L. G. Papon; J. Périn; Philizot; G. Pichon; E. Pinlong; A. Popu; R. Reynard; P. Richard; J. Sambussy; Saliceti; H. Sebban; M. Stévenard; L. Thaon; P. Vidal; N. Vedie.

Assez bonnes solutions de MM. G. Houalet; E. Paté; L. Soulier; Ch. Vouilloux.]

4099. — *Calculer les quatre côtés d'un trapèze isocèle convexe, connaissant le rayon* R *du cercle circonscrit, le périmètre* $2p$, *et sachant en outre que les côtés non parallèles sont perpendiculaires aux diagonales. Discussion. En particulier, construire géométriquement le côté autre que les bases dans le cas où* $p = R(\sqrt{2} + 1)$.

Trouver le minimum et le maximum du périmètre.

De ce que la diagonale BD est perpendiculaire sur AB, on déduit que la grande base AD est un diamètre du cercle circonscrit.



Posons $AB = CD = y$ et $BC = 2x$, on aura d'abord, puisque $AD = 2R$,

$$2R + 2y + 2x = 2p,$$

ou

$$x + y = p - R. \qquad (1)$$

En appliquant au quadrilatère inscrit ABCD le théorème de Ptolémée,

$$\overline{BD}^2 = AD \times BC + \overline{AB}^2,$$

ou

$$4R^2 - y^2 = 4Rx + y^2,$$

ce qui donne, après réductions,

$$y^2 + 2Rx = 2R^2. \qquad (2)$$

En remplaçant dans cette équation x par sa valeur tirée de la première, on forme l'équation résolvante en y :

$$f(y) = y^2 + 2R(p - R - y) - 2R^2$$
$$= y^2 - 2Ry + 2R(p - 2R) = 0,$$

ou

$$f(y) = (y - R)^2 - R(5R - 2p) = 0. \qquad (3)$$

Pour qu'une valeur de l'inconnue y, racine de cette équation, donne une solution du problème (tel qu'il est posé), il faut que cette valeur soit positive ainsi que la valeur de x qui lui est associée par l'équation (1); il faut donc que y soit positif et inférieur à $p - R$ (ce qui entraîne comme condition nécessaire que $p - R$ soit positif). Formons donc $f(0)$ et $f(p - R)$. On trouve

$$f(0) = R(2p - 4R)$$
$$f(p - R) = (p - R)^2 - 2R^2 = (p - R + R\sqrt{2})(p - R - R\sqrt{2});$$

le premier facteur est positif, $f(p-\mathrm{R})$ a donc le signe du second.

Enfin la quantité sous le radical est positive si $2p \leqslant 5\mathrm{R}$.

On a donc le tableau des valeurs remarquables de $2p$.

Valeurs de $2p$	$2\mathrm{R}$	$4\mathrm{R}$	$2\mathrm{R}(1+\sqrt{2})$	$5\mathrm{R}$	
$f(0)$	$-$	0 $+$	$+$		pas de racines.
$f(p-\mathrm{R})$	$-$	$-$	0 $+$		
Ordre des racines	$y'<0<p-\mathrm{R}<y''$	$0<y'<p-\mathrm{R}<y''$	$0<y'<y''<p-\mathrm{R}$		
		$y=0$	$y''=p-\mathrm{R}=\mathrm{R}\sqrt{2}$	$y'=y''=\mathrm{R}$	

En examinant les signes des substitutions de 0 et de $p-\mathrm{R}$, on reconnaît immédiatement la façon dont les racines sont classées, dans les deux premiers cas; dans le troisième, celui où $2p$ est compris entre $2\mathrm{R}(1+\sqrt{2})$ et $5\mathrm{R}$, les deux résultats de substitution étant de même signe que le coefficient du carré, il faut avoir recours à la demi-somme, R, qui est positive et inférieure à $p-\mathrm{R}$, dans cet intervalle où $p>\mathrm{R}(1+\sqrt{2})$ et *a fortiori*

$$p-\mathrm{R}>\mathrm{R}.$$

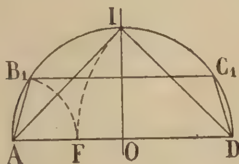
Le problème admet donc deux solutions si $2p$ est compris entre $2\mathrm{R}(1+\sqrt{2})$ et $5\mathrm{R}$; il en admet une seule si $2p$ est compris entre

$$4\mathrm{R} \quad \text{et} \quad 2\mathrm{R}(1+\sqrt{2}).$$

Le maximum de $2p$ est $5\mathrm{R}$; pour cette valeur de $2p$, les racines y' et y'' se confondent, leur commune valeur est R; le trapèze est la moitié de l'hexagone régulier inscrit.

Le minimum de $2p$ est $4\mathrm{R}$, alors la seule racine y' acceptable devient nulle, la petite base BC se confond avec la grande, la hauteur du trapèze est nulle.

Quand $2p=2\mathrm{R}(1+\sqrt{2})$, il y a deux valeurs acceptables de y, mais l'une d'elles est $p-\mathrm{R}$ et donne $x=0$. Le trapèze a une petite base nulle, il se réduit en réalité au triangle AID; d'ailleurs, la valeur de y correspondante, $p-\mathrm{R}$, devient $\mathrm{R}\sqrt{2}$, qui est bien le côté du carré inscrit.



L'autre racine, y'', est $2\mathrm{R}-\mathrm{R}\sqrt{2}$; c'est la différence entre le diamètre et le côté du carré inscrit; on la construit bien facilement en rabattant DI sur DA, en DF, la valeur de y'' est AF, et le trapèze correspondant $\mathrm{AB_1C_1D}$.

(Pierre CORNUÉJOLS, stagiaire au C. R. I. P., Metz.)

Généralisation. — Quand $2p>5\mathrm{R}$, l'équation résolvante en y n'a pas de racine. Mais quand $p<\mathrm{R}(1+\sqrt{2})$ elle en a deux, dont une seule fournit une solution du problème si $2p>4\mathrm{R}$, dont aucune ne fournit de solution si $2p<4\mathrm{R}$.

Une racine est écartée, soit quand elle est supérieure à $p-\mathrm{R}$, ce qui conduit à une valeur négative de x, soit quand elle est elle-même négative.

Si y' est négatif, en désignant par l sa valeur absolue, on voit que l vérifie l'équation (2), où ne figure que y^2, mais l'équation (1) devient

$$x-l+\mathrm{R}=p.$$

Une telle racine fournit donc une solution du problème suivant, analogue au problème proposé :

Trouver un trapèze inscrit ABCD, dont la grande base est le diamètre AD, connaissant *la différence* entre la somme des bases et celle des côtés non parallèles.

Une racine supérieure à $p-\mathrm{R}$ donne une valeur négative de x: soit m la valeur absolue de x; m vérifie les équations

$$y-m+\mathrm{R}=p, \qquad (1')$$
$$4\mathrm{R}^2-y^2=-4\mathrm{R}m+y^2; \qquad (2')$$

cette dernière équation pouvant s'écrire

$$4\mathrm{R}^2-2y^2=-4\mathrm{R}m,$$

on reconnaît que y est supérieur à $\mathrm{R}\sqrt{2}$, c'est-à-dire à AI; le trapèze ABCD est donc *de seconde espèce*, ou *croisé*, et la quantité $2p$ est égale à $\mathrm{AB}+\mathrm{CD}+\mathrm{AD}-\mathrm{BC}$.

Donc une racine y'', supérieure à $p-\mathrm{R}$, est en même temps supérieure à $\mathrm{R}\sqrt{2}$; elle permet de construire un trapèze de seconde espèce, ABCD; entre les longueurs des côtés de ce trapèze existe la relation

$$2\mathrm{AB}+\mathrm{AD}-\mathrm{BC}=2p.$$

Les limites entre lesquelles y peut être compris sont donc $-2\mathrm{R}$ et $+2\mathrm{R}$. En substituant ces valeurs dans l'équation en y, on trouve

$$f(2\mathrm{R})=2\mathrm{R}(p-2\mathrm{R}),$$
$$f(-2\mathrm{R})=2\mathrm{R}(p+2\mathrm{R}).$$

Si $p<-2\mathrm{R}$, ces deux résultats sont négatifs, le classement des racines est $y'<-2\mathrm{R}<+2\mathrm{R}<y''$; aucune racine ne fournit de solution.

Si $-2\mathrm{R}<p<+2\mathrm{R}$, le classement est

$$-2\mathrm{R}<y'<+2\mathrm{R}<y'';$$

la racine y' fournit une solution.

Enfin, si $p<2\mathrm{R}$, on est ramené au cas précédemment discuté.

[Bonnes solutions de MM. Authier; F. Baujard; P. Baylac; J. Bugnard; Ch. Cadaert; Ch. Caussin; A. Cieutat; E. Delmas; M. Descotte; A. F., à Saint-Pons; E. Faurès; G. Knoll; M. Le Pinois; A. Lhôtelier; L. Linemann; P. Louon; F. Maitre; J. Mazeau; Ménéchal; J. Millour; Pautras; A. Popu; R. Reynard; H. Sebban; M. Stévenard; L. Thaon; Ch. Vouilloux.

Assez bonnes solutions de MM. G. Cellier; B. Charles; G. Clément; M. Courboulay; M. Forcade; G. Houalet; Y. Maurice; R. Morel; J. Morin; G. Pichon; N. Vedie.]

4100. — *Les trois côtés d'un triangle sont*

$$a=678^{\mathrm{m}},23; \qquad b=542^{\mathrm{m}},51; \qquad c=448^{\mathrm{m}},46.$$

Calculer les rayons R *et* r *des cercles circonscrit et inscrit.*

Formules :

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c), \qquad r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$
$$\mathrm{S}=pr, \qquad \mathrm{R}=\frac{abc}{4\mathrm{S}}.$$

Calculs préliminaires.

$$p=834,60$$
$$p-a=156,37$$
$$p-b=292,09$$
$$p-c=386,14$$
$$\text{Vérification : } p=834,60$$

$\log 834,60=2,92148$
$\log 156,30=2,19396$
$\quad 7 \qquad 19,6 \quad (\delta=28)$
$\log(p-a)=2,19416$
$\log 292,00=2,46538$
$\quad 9 \qquad 13,5 \quad (\delta=15)$
$\log(p-b)=2,46552$
$\log 386,10=2,58670$
$\quad 4 \qquad 4,4 \quad (\delta=11)$
$\log(p-c)=2,58674$

$\log 678,20=2,83136$
$\quad 3 \qquad 1,8 \quad (\delta=6)$
$\log a=2,83138$
$\log 542,50=2,73440$
$\quad 1 \qquad 0,8 \quad (\delta=8)$
$\log b=2,73441$
$\log 448,40=2,65167$
$\quad 6 \qquad 5,4 \quad (\delta=9)$
$\log c=2,65172$

Calculs définitifs.

Calcul de r.

$\operatorname{colog} p=\bar{3},07852$
$\log(p-a)=2,19416$
$\log(p-b)=2,46552$
$\log(p-c)=2,58674$
$2\log r=4,32494$
$\log r=2,16247$
$\log 145,30=2,16227 \quad (\delta=29)$
$\quad 7 \qquad 20$
$r=145,37$

$r=145,37.$

Calcul de R.

$\log p=2,92148$
$\log(p-a)=2,19416$
$\log(p-b)=2,46552$
$\log(p-c)=2,58674$
$2\log \mathrm{S}=10,16790$
$\log \mathrm{S}=5,08395$
$\operatorname{colog} \mathrm{S}=\bar{6},91605$
$\operatorname{colog} 4=\bar{1},39794$
$\log a=2,83138$
$\log b=2,73441$
$\log c=2,65172$
$\log \mathrm{R}=2,53150$
$\log 340,00=2,53148$
$\quad 2 \qquad 2 \quad (\delta=13)$
$\mathrm{R}=340,02$

$\mathrm{R}=340,02.$

(MONNEZ, instituteur à Saint-Saulve, Nord.)

Remarque. — Le calcul a été en général très correctement fait. Quelques abonnés cependant n'interpolent pas d'une façon très régulière, ce qui entraîne des différences portant sur le 5e et même sur le 4e chiffre.

[Bonnes solutions de MM. A. Authier; P. Baylac; J. Bugnard; Chapelier; P. Faucheux; M. Forcade; E. Faurès; Geffroy-Le Jan; H. Le Lan; Lhôtelier; P. Louon; F. Maître; Ch. Norgelet; A. Popu; J. Sambussy; H. Sebban; M. Stévenard; M. Supernant; J. Tarnus; Ch. Vouilloux.
Assez bonnes solutions de MM. Ch. Cadaert; J. Camus; P. Cornuéjols; A. Daoudal; A. Deforge; G. Février; G. Mouzon; M. Le Pinois; J. Périn; Ed. Yvroud.]

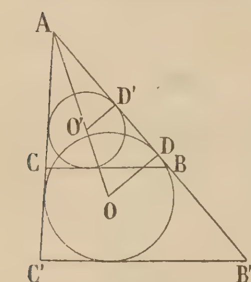
4101. — 1° *Démontrer que le rapport des rayons des cercles inscrits dans deux triangles semblables est égal au rapport de similitude.*

2° *On considère les trois cercles* O, O′, O″ *inscrits dans un triangle rectangle* ABC *et dans ceux déterminés par la hauteur* AD *relative à l'hypoténuse. Soient* E, F *les points de contact du premier avec les deux côtés de l'angle droit* AB, AC; G′, G″ *les points de contact des deux autres avec l'hypoténuse* BC. *Démontrer que les quatre points* A, C, E, G′ *sont sur une même circonférence, ainsi que les quatre points* A, B, F, G″.

3° *Prouver que les rayons* O′G′, O″G″ *des cercles* O′ *et* O″, *passent par les points* E, F, *si on les prolonge au delà des centres.*

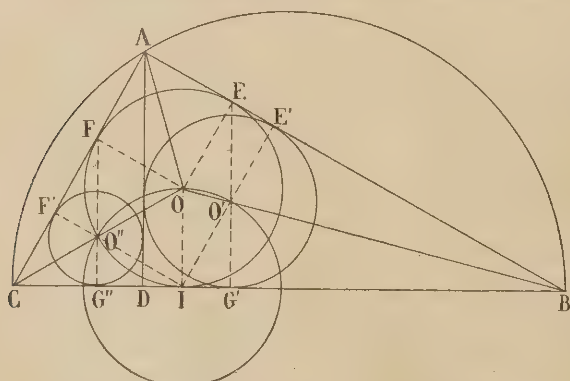
4° *Trouver le centre du cercle circonscrit au triangle* OO′O″.

1° Deux triangles semblables peuvent être placés de façon que deux angles égaux coïncident et que les côtés opposés à ces angles soient parallèles. Soient ABC, AB′C′ les deux triangles ainsi placés; les centres O et O′ des cercles inscrits sont sur la bissectrice intérieure de l'angle BAC, les rayons OD et O′D′, perpendiculaires à AB, sont parallèles. Les triangles BAC, B′AC′ et les cercles inscrits forment deux figures homothétiques par rapport à A, la raison étant le rapport $\frac{AB'}{AB}$.



On peut d'ailleurs observer que si deux triangles ABC et A′B′C′ sont semblables, le rapport de deux lignes homologues quelconques des deux triangles est égal à celui de deux côtés homologues.

2° L'angle CAE étant droit, CE est un diamètre du cercle ACE;



pour que ce cercle passe en G′, il faut et il suffit que l'angle CG′E soit droit et par suite que EG′ soit parallèle à la hauteur AD.

Le rapport de similitude des cercles O et O′ est

$$\frac{BC}{BA}=\frac{a}{c}; \quad \text{donc} \quad \frac{BE}{BG'}=\frac{a}{c}. \qquad (1)$$

Mais $\overline{BA}^2 = BD \times BC$, ce que l'on peut écrire

$$\frac{BA}{BD}=\frac{BC}{BA}=\frac{a}{c};$$

la proportion (1) devient donc

$$\frac{BE}{BG'}=\frac{BA}{BD}. \qquad (2)$$

Sous cette forme elle exprime que G′E est parallèle à AD.

On montrerait de même que G″F est parallèle à AD.

Le cercle décrit sur CE comme diamètre passe donc en A et en G′; le cercle décrit sur BF comme diamètre passe en G″ et en A.

3° La troisième partie se trouve démontrée par ce qui précède, car O′ est sur la perpendiculaire G′E élevée à BC en G′, de même que O″ est sur G″F.

4° Les centres O et O′ sont sur la bissectrice intérieure de l'angle B; les cercles (O) et (O′), ainsi que les côtés BE′E et BG′I, forment une figure dont BOO′ est l'axe de symétrie. Donc, puisque G′, O′, E sont en ligne droite, E′, O′, I sont sur la droite symétrique par rapport à OO′, il en résulte que la figure OEO′I est un parallélogramme, ses côtés opposés étant deux à deux parallèles, et même un losange, puisque E et I sont symétriques par rapport à OO′. Par conséquent, la perpendiculaire élevée à OO′ en son milieu passe en I.

Le centre du cercle OO′O″ est donc le point de contact I du cercle (O) avec l'hypoténuse BC; son rayon est égal à OI, c'est-à-dire à celui du cercle inscrit. OI étant égal à OE, ce rayon est

$$\frac{1}{2}(c+b-a).$$

(Paul Vidal, école primaire supérieure de Saint-Céré, Lot.)

Remarque. — La somme des trois rayons, OI + O′G′ + O″G″, est égale à la hauteur AD = h.

On a d'abord

$$O'G' = OI \times \frac{h}{b},$$

$$O''G'' = OI \times \frac{h}{c},$$

et la surface est

$$S=\frac{1}{2}OI \times (a+b+c)=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}bc.$$

Donc

$$OI + O'G' + O''G'' = OI\left(1+\frac{h}{b}+\frac{h}{c}\right)$$
$$= OI\left(1+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}\right)$$
$$= \frac{OI}{a}(a+b+c) = h.$$

On peut démontrer autrement cette propriété simple :

$$OI = OF = AF = AC - CF = AC - CI$$

et $OI = AB - BI$;

en ajoutant $2OI = AC + AB - BC$;

de même, $2O'G' = AD + DB - AB$

et $2O''G'' = AD + DC - AC$.

En ajoutant ces égalités,

$$2(OI + O'G' + O''G'') = 2AD.$$

(Joseph Mauhin, école du génie civil, à Gand.)

[Bonnes solutions de MM. J. Briquet; G. Capus; A. Cieutat; A. Daoudal; P. Delacour; M. Forcade; G. Knoll; Geffroy-Le Jan; Linemann; P. Louon; R. Lugan; M., à Guéret; J. Millour; R. Panchaud; J. Périn; F. Richard; M. Robineau; J. Saliceti; M. Supernant; L. Thaon.
Assez bonnes solutions de MM. Ch. Cadaert; G. Février; F. Maitre; R. Reynard; H. Sebban.]

4102. — *Soient* x′Ox, y′Oy *deux droites rectangulaires se coupant au centre* O *d'un cercle de rayon* R. — M *étant un point de la circonférence, on mène la tangente en* M, *laquelle coupe* x′x *au point* S, *ainsi que le rayon* OM, *et la perpendiculaire* MP *sur* x′x. *Soit enfin* A

celui des points de la circonférence situés sur x'x qui se trouve entre O *et* S.

1° *En supposant que le point* M *soit tel que le secteur circulaire* OAM *et le triangle mixtiligne* AMS *soient équivalents, trouver la relation qui existe alors entre les longueurs de l'arc* AM *et du segment de droite* MS.

2° *Déterminer la position du point* M *pour laquelle les volumes engendrés par le secteur* OAM *et le triangle mixtiligne* AMS, *en tournant autour de x'x, sont équivalents.*

3° *Déterminer la position du point* M *pour laquelle les volumes engendrés par le même secteur et le même triangle mixtiligne en tournant autour de y'y sont équivalents.*

L'aire du secteur AOM est $\frac{1}{2}R \times$ arc AM; celle du triangle OMS est $\frac{1}{2}R \times MS$. Si le triangle AMS est équivalent au secteur, l'un et l'autre sont la moitié du triangle OMS; on a donc

$$\frac{1}{2}\text{arc AM} \times R = \frac{1}{4}MS \times R,$$

d'où

$$\text{arc AM} = \frac{1}{2}MS.$$

Remarque. — La détermination de l'angle au centre correspondant à l'arc AM est un problème qui n'est pas élémentaire, car il s'agit de trouver un angle dont la mesure (en radian) est la moitié de la tangente :

$$2x = \operatorname{tg} x;$$

nous verrons cependant plus loin que par l'emploi de la table des logarithmes des lignes trigonométriques, on peut facilement en calculer une valeur approchée.

2° Le volume engendré par le secteur AOM en tournant autour de xx' a pour mesure

$$\frac{1}{3}\pi R \times \overline{MA}^2;$$

celui qu'engendre le triangle OMS est la somme de deux cônes de même base, sa mesure est

$$\frac{1}{3}\pi OS \times \overline{MP}^2.$$

Si le triangle mixtiligne MAS et le secteur de cercle MAO engendrent des volumes égaux, chacun de ces volumes est la moitié de celui qu'engendre le triangle OMS. On doit donc vérifier l'équation

$$OS.\overline{MP}^2 = 2R.\overline{MA}^2;$$

si l'on prend pour inconnue $AP = x$, on a

$$\overline{AM}^2 = 2R.AP = 2Rx,$$
$$\overline{MP}^2 = AP.(2R - AP) = x(2R - x),$$
$$OS = \frac{R^2}{OP} = \frac{R^2}{R - x}.$$

L'équation ci-dessus devient, en remplaçant les segments par les valeurs calculées en fonction de l'inconnue x,

$$\frac{R^2x}{R - x}.(2R - x) = 2R.2Rx.$$

On aperçoit la solution $x = 0$, qui n'offre pas d'intérêt, les deux volumes considérés étant nuls. En rendant l'équation entière et en divisant les deux membres par R^2x, on trouve

$$3x = 2R.$$

La position du point M est donc facile à construire, le segment OP étant le tiers de OA.

3° Prolongeons la tangente SM jusqu'au point T où elle rencontre Oy; soit B le point où Oy coupe le cercle et Q la projection de M sur Oy. Nous évaluerons le volume engendré par le triangle OMS en tournant autour de Oy comme la différence entre le tronc de cône qu'engendre le trapèze OQMS et le cône qu'engendre le triangle OQM; or, le volume du tronc de cône est la somme de trois cônes, dont l'un est précisément le cône OQM; les deux autres ont pour hauteur commune OQ, leurs bases respectives sont les cercles décrits, l'un avec le rayon OS, l'autre avec un rayon égal à la moyenne géométrique de OS et de QM (qui est égal à OP). La moyenne géométrique de OS et de OP est le rayon R. Si l'on pose $OP = y$, on a $OS = \frac{R^2}{y}$, le volume engendré par le triangle OMS est

$$\frac{\pi}{3}R^2PM\left(\frac{R^2}{y^2} + 1\right).$$

Quant au volume engendré par le secteur OMA, nous le regarderons comme la différence entre la demi-sphère engendrée par OBA, et le secteur sphérique engendré par OBM, ce qui donne

$$\frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi\overline{MB}^2.R = \frac{2}{3}\pi R^2(R - BQ) = \frac{2}{3}\pi R^2.PM;$$

en écrivant que le second volume est la moitié du premier, on obtient, après suppression du facteur $\frac{1}{3}\pi R^2$, l'équation

$$PM\left(\frac{R^2}{y^2} + 1\right) = 4PM.$$

Il faut écarter la solution $PM = 0$, qui donne deux volumes nuls. Il reste donc

$$\frac{R^2}{y^2} + 1 = 4, \qquad \text{d'où} \qquad y = R\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(Joseph MAUHIN, école du génie civil, à Gand.)

Remarque. — La solution de l'équation que l'on a rencontrée dans la première partie n'était pas demandée : la question, comme nous l'avons dit, n'est pas théoriquement élémentaire, cependant on peut trouver la valeur de l'angle avec une très grande exactitude, en se servant des tables trigonométriques, par des calculs qui ne présentent aucune difficulté. Tout d'abord, remarquons que l'équation $2x = \operatorname{tg} x$ a une solution entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$; en effet, si nous traçons la courbe, de forme bien connue, qui représente la variation de la tangente, entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$, cette courbe est formée d'un arc qui, partant de l'origine avec une tangente inclinée à 45°, s'élève de plus en plus rapidement, en se rapprochant de la droite $x = \frac{1}{2}\pi$, qui est ce qu'on appelle une asymptote; la droite $y = 2x$, qui part de l'origine, du côté de la concavité de la courbe, la coupe donc avant de rencontrer l'asymptote en P. La valeur de l'angle x correspondant au point d'intersection M est facile à calculer par des approximations successives.

Soit a la mesure, en minutes, de l'angle dont x est la mesure en radians; on a

$$\frac{a}{10\,800} = \frac{x}{\pi},$$

car la demi-circonférence contient $180 \times 60 = 10\,800$ minutes; l'équation $\operatorname{tg} x = 2x$ devient donc

$$\operatorname{tg} a = \frac{2\pi}{10\,800}a$$

ou, en passant aux logarithmes,

$$\log \operatorname{tg} a = \log a + \log \pi + \operatorname{colog} 5\,400,$$

ou enfin

$$\log a - \log \operatorname{tg} a = \log 5\,400 + \operatorname{colog} \pi$$
$$= 3{,}73239 - 0{,}49715 = 3{,}23524.$$

Il est facile, après quelques essais, de trouver une valeur approchée si l'on prend

$a = 67° = 4\,020'$,		$a = 66° = 3\,960'$,	
$\log 4\,020 =$	3,60423	$\log 3\,960 =$	3,59770
$\log \operatorname{tg} 67° =$	0,37215	$\log \operatorname{tg} 66° =$	0,35142
différence	3,23208	différence	3,24628
en moins	316	en trop	1 104

On voit donc que l'angle cherché doit être compris entre 66° et 67° et probablement plus près de 67° que de 66°. En consultant la table, on remarque d'ailleurs que si l'angle augmente d'une minute à partir de 66°, le logarithme de a croît de la différence tabulaire, qui est entre 10 et 11; le logarithme de la tangente croît aussi de la différence tabulaire, qui pour 66° est de 34; la différence $\log a - \log \operatorname{tg} a$ diminue de 24 unités; pour qu'elle diminue de 1 104 unités, en admettant la proportionnalité (ce qui n'est pas absolument exact, mais sans s'écarter beaucoup de la vérité) il faudrait augmenter l'arc de $1\,104 : 24 = 46$ minutes. On est donc conduit à essayer l'angle de 66° 46'.

$66°\,46' = 4\,006'$		$66°\,47' = 4\,007'$	
$\log 4\,006 =$	3,60271	$\log 4\,007 =$	3,60282
$\log \operatorname{tg} 66°\,46' =$	0,36725	$\log \operatorname{tg} 66°\,47' =$	0,36760
différence	3,23546	différence	3,23522
	22 en trop		2 en moins.

L'angle est donc déjà connu à une minute près; il est très voisin de 66° 47' (un peu inférieur). Si l'on dispose de tables à 7 décimales, on peut déterminer les secondes et les fractions de seconde; la quantité $\log a - \log \operatorname{tg} a$ varie de 24 unités du 5e ordre décimal quand a varie de 60", ce qui fait 2 unités pour 5". L'angle cherché diffère donc très peu de 66° 46' 55". On pourra essayer cet angle et les angles qui n'en diffèrent que d'une seconde; on trouvera ainsi le nombre de secondes exact.

Cela suffit pour faire comprendre la méthode, et pour prouver que l'on peut résoudre numériquement des équations dont on ne sait pas donner la formule de résolution.

[Bonnes solutions de MM. A. Authier; J. Bugnard; J. Calaviq; P. Delacour; A. Daoudal; J. Dinand; E. Faurès; G. Février; M. Forcade; G. Knoll; M. Le Pinois; Lhôtelier; P. Louon; R. Lugan; F. Maitre; J. Millour; R. Reynard; F. Richard; H. Sebban; M. Supernant.

Assez bonnes solutions de MM. Ch. Cadaert; M. Chatelier; F. Dupire; A. Monjallon; M. Robineau; L. Thaon; Ch. Vouilloux.]

4103. — 1. *Une machine pneumatique à piston* A *est en relation avec un ballon* B, *sur lequel est branché un manomètre à air libre, à mercure*, C.

Le piston D, *de surface* s, *est au point le plus bas de sa course. Entre lui et le fond du cylindre existe un espace nuisible, de volume* u, *rempli d'air à la pression atmosphérique.*

Le ballon B *contient de l'air, qui, à la température de l'opération, occupe un volume* V *sous une pression* H'.

Le piston est levé d'une hauteur z, *puis ramené à sa position initiale; on recommence l'opération, en arrêtant toutefois le piston au même point haut de la course précédente.*

Expression de la pression finale de l'air du ballon après ces deux levées du piston.

Les volumes a *et* b *compris entre le ballon et la pompe, et entre le ballon et le mercure sont négligés.*

Application : $V = 2^{dm^3}$; $u = 5^{cm^3}$; $s = 30^{cm^2}$; $z = 20^{cm}$; $H' = 900^{mm}$ *de* Hg; *pression atmosphérique*, $H = 760^{mm}$ *de* Hg; *densité du mercure*, 13,596; $g = 9{,}81^{m}$.

a) *Expression de la pression finale : 1° en mm. de* Hg; *2° en unités du système* M. T. S.

b) *Expression, en unités* M. T. S., *de la force nécessaire pour maintenir le piston au haut de sa course, après la seconde levée, le poids de ce piston et le frottement étant négligés.*

c) *Figures, avec différences de niveaux cotées, du manomètre, au début et à la fin de la manœuvre.*

2. *Les robinets* r_1 *et* r_2 *du ballon précédent sont ensuite fermés.*

A quelle température faut-il porter le ballon ainsi isolé pour que le gaz reprenne la pression initiale H'?

Température pour laquelle $V = 2^{dm^3}$, $t = 20°$.

Coefficient de dilatation de l'enveloppe, $\frac{1}{38\,700}$.

Coefficients de dilatation et de variation de pression de l'air, $\frac{1}{273}$.

1. Soient H' la pression initiale de l'air du ballon B, de volume V, H_1, H_2 les valeurs de cette pression après le premier et après le deuxième coup de piston, u le volume de l'espace nuisible, C la capacité du corps de pompe, enfin H la pression atmosphérique. Lorsque le piston est au bas de sa course, on a :

un volume d'air V à la pression H'

et — u — H.

Lorsque le piston est soulevé à la hauteur z, la masse d'air précédente prend le volume $(V + C + u)$ à la pression H_1. Par conséquent,

$$H_1(V + C + u) = H'V + Hu,$$

d'où

$$H_1 = \frac{V}{V + C + u} H' + \frac{u}{V + C + u} H.$$

La pression H_2 dans le ballon après le second coup de piston est de même donnée par la relation

$$H_2(V + C + u) = H_1 V + Hu,$$

d'où

$$H_2 = \frac{V}{V + C + u} H_1 + \frac{u}{V + C + u} H = H' \left(\frac{V}{V + C + u}\right)^2 + H \frac{u}{V + C + u}\left(\frac{V}{V + C + u} + 1\right).$$

Application numérique : a) 1° Nous avons

$$C = sz = (30 \times 20)^{cm^3} = 600^{cm^3}, \qquad C + u = 605^{cm^3},$$

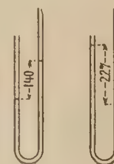
$$H_2 = 900 \left(\frac{2\,000}{2\,605}\right)^2 + 760 \times \frac{5}{2\,605} \times \left(\frac{2\,000}{2\,605} + 1\right) = 533^{mm} \text{ de Hg}.$$

2° Dans le système M. T. S., l'unité de force est le sthène, force qui en une seconde communique à une masse d'une tonne un accroissement de vitesse d'un mètre par seconde; l'unité de pression est la pièze, pression qui, s'exerçant uniformément sur une surface d'un mètre carré, produit un effort total d'un sthène. La pression H_2 est donc de

$$13{,}596 \times 9{,}81 \times 0{,}533 = 71{,}0897 \text{ pièzes}.$$

b) La force nécessaire pour maintenir le piston en haut de sa course, après la seconde levée, est, en négligeant le poids du piston et le frottement,

$$13{,}596 \times 9{,}81 \times 0{,}003 \times (0{,}76 - 0{,}533) = 0^{\text{sthène}},0908.$$



c) La pression initiale dans le ballon étant de 900^{mm} de Hg, et la pression après le deuxième coup de piston de 533^{mm}, les différences de niveaux présentées par le manomètre dans ces deux cas sont données par les figures ci-contre.

(F. MAITRE, école primaire supérieure de Moûtiers, Savoie.)

2. Soient V_0, V_t, H_0, H_t les volumes du ballon B et les pressions de l'air qu'il contient à 0° et à t°. Par hypothèse,

$$H_t = 900^{mm} \text{ de Hg}, \qquad V_{20} = 2\,000^{cm^3}, \qquad \text{et} \qquad H_{20} = 533^{mm} \text{ de Hg}.$$

La formule des gaz parfaits donne

$$V_0 H_0 = \frac{V H_t}{1+\alpha t} = \frac{V_{20} H_{20}}{1+20\alpha}.$$

D'autre part, si l'on désigne par k le coefficient de dilatation de l'enveloppe, on a

$$V_t = V_0(1+kt) = \frac{V_{20}(1+kt)}{1+20k}.$$

On en déduit

$$\frac{H_t}{1+\alpha t} \cdot \frac{1+kt}{1+20k} = \frac{H_{20}}{1+20\alpha},$$

d'où

$$\frac{H_t(1+20\alpha)}{1+\alpha t} = \frac{H_{20}(1+20k)}{1+kt},$$

c'est-à-dire, en remplaçant α par $\frac{1}{273}$, k par $\frac{1}{38\,700}$,

$$\frac{900 \times 293}{273+t} = \frac{533 \times 38\,720}{38\,700+t} = \frac{533 \times 38\,720 - 900 \times 293}{38\,700 - 273} = \frac{20\,374\,060}{38\,427},$$

On en déduit

$$273 + t = \frac{38\,427 \times 900 \times 293}{20\,374\,060} = 497,$$

d'où

$$t = 497 - 273 = 224°.$$

(Paul LOUON, athénée d'Ixelles, Belgique.)

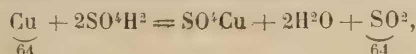
[Bonnes solutions de MM. G. Février, école professionnelle de Rambouillet; G. Knoll, à Clermont-Ferrand; J. Périn; A. Wehrung, à Paris.
Solutions partielles de MM. P. Baylac; J. Bugnard; J. Dirand; M. Forcade; H. Sebban.]

4104. — *On chauffe dans un ballon* 10^g *d'un alliage d'argent et de cuivre, avec un excès d'acide sulfurique concentré. Le gaz qui se dégage est recueilli dans une dissolution de soude en excès. Lorsque l'expérience est terminée, on constate que le vase qui contient la soude a subi une augmentation de masse de* $4^g,3$.

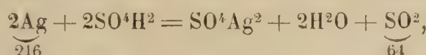
Calculer la composition de l'alliage.

On donne $S = 32$; $O = 16$; $Ag = 108$, *et, pour simplifier les calculs*, $Cu = 64$.

L'action de l'acide sulfurique sur le cuivre et l'argent chauffés donne du gaz sulfureux, selon les réactions suivantes :



$$\underbrace{Cu}_{64} + 2SO^4H^2 = SO^4Cu + 2H^2O + \underbrace{SO^2}_{64},$$



$$\underbrace{2Ag}_{216} + 2SO^4H^2 = SO^4Ag^2 + 2H^2O + \underbrace{SO^2}_{64},$$

qui montrent que x^g de cuivre donnent x^g de gaz sulfureux, et y^g d'argent, $\frac{64}{216}y = \frac{8}{27}y^g$ de gaz sulfureux. Ce gaz étant recueilli dans la dissolution de soude en excès, alors que l'eau est retenue par l'excès d'acide sulfurique concentré, on en conclut qu'il s'est dégagé durant l'expérience $4^g,3$ de ce gaz. Par conséquent, si x et y désignent respectivement les poids de cuivre et d'argent contenus dans l'alliage, on a

$$x + y = 10,$$

$$x + \frac{8}{27}y = 4,3,$$

d'où, par soustraction membre à membre,

$$\frac{19}{27}y = 10 - 4,3 = 5,7$$

et

$$y = \frac{27 \times 5,7}{19} = 8^g,1.$$

On a

$$x = 10 - 8,1 = 1^g,9.$$

Les 10^g d'alliage contenaient donc $8^g,1$ d'argent et $1^g,9$ de cuivre.

(Aimé AUTHIER, école primaire supérieure de Mirepoix.)

[Bonnes solutions de MM. P. Baylac, école professionnelle de Toulouse; J. Bugnard, école supérieure de Moutiers; G. Capus, école pratique de Béziers; Ch. Caussin, à Escarbotin; E. Delmas, à Nîmes; G. Février, école professionnelle de Rambouillet; M. Forcade, à Lyon; E. Garandel; J. Georges, lycée de Montluçon; Lhôtelier; L. Linemann; F. Maitre, école supérieure de Moutiers; P. Mandrou; J. Mazeau, lycée de Montluçon; J. Millour, à la Forêt; L. P. C.; R. Panchaud, école supérieure de Moutiers; E. Paté; A. Popu, à Fumel; H. Sebban, école supérieure de Batna; J. Sambussy, école supérieure Michelet; A. Wehrung, à Paris.]

SOLUTION D'EXERCICE

4113. — *Trouver un polynome entier en* x, *tel que si on le divise par* $x-1$, *par* $x+2$, *par* $x-4$, *on a comme reste* 10, *et qu'il s'annule pour* $x = -1$.

En divisant $f(x)$ par $x-1$, on doit trouver pour reste 10; posons donc

$$f(x) = (x-1)L(x) + 10,$$

$L(x)$ étant un polynome dont le degré est inférieur à celui de $f(x)$ d'une unité. Divisons $L(x)$ par $x+2$, nous aurons

$$L(x) = (x+2)M(x) + a;$$

portant cette valeur de $L(x)$ dans l'équation (1), nous trouvons

$$f(x) \equiv (x-1)(x+2)M(x) + a(x-1) + 10;$$

or $f(x)$ prend la valeur 10 quand on y substitue à x la valeur -2; cela donne $10 = -3a + 10$, d'où $a = 0$.

En raisonnant de même pour la valeur $x = 4$, on trouve que le polynome $f(x)$ doit avoir la forme

$$f(x) \equiv (x-1)(x+2)(x-4)Q(x) + 10.$$

Ce polynome doit être nul quand on y remplace x par -1; cela donne

$$0 = 10Q(-1) + 10, \qquad \text{d'où} \qquad Q(-1) = -1,$$

et

$$Q(x) = (x+1)S(x) - 1,$$

$S(x)$ désignant un polynome quelconque. La forme la plus générale du polynome demandé $f(x)$ est donc

$$f(x) \equiv (x-1)(x+2)(x-4)(x+1)S(x) - (x-1)(x+2)(x-4) + 10;$$

pour déterminer complètement le polynome $f(x)$, il faudrait d'autres conditions : si par exemple on demande que le polynome $f(x)$ soit du degré le plus bas possible, on voit qu'il est au moins du troisième degré et que pour qu'il en soit ainsi, $S(x)$ doit être identique à zéro.

On obtient un polynome du quatrième degré satisfaisant aux conditions imposées en prenant pour $S(x)$ une constante quelconque non nulle.

EXAMENS ET CONCOURS DE 1920 (*Suite.*)

EXAMENS ORAUX des ÉCOLES NATIONALES D'ARTS ET MÉTIERS (*).

Arithmétique et Algèbre (*Suite*).

96. — Le plus grand commun diviseur de deux nombres est le même que celui de leur produit et de leur plus petit commun multiple.

97. — Trouver le capital primitif qui, placé à 4,25 % à intérêts composés pendant 8 ans, a donné 20 258^f.

98. — Simplifier l'expression

$$\sqrt{a^2\sqrt[3]{a^4b^2}} + \sqrt{b^2\sqrt[3]{a^2b^4}},$$

en employant les exposants fractionnaires.

(*) Les questions posées à un même candidat sont comprises entre deux traits.

99. — La somme des carrés des n premiers nombres est 33 511. Déterminer n.

100. — Chercher la position du nombre -3 par rapport aux racines de l'équation bicarrée

$$3x^4 - 5x^2 + 1 = 0.$$

101. — *Calcul logarithmique.* — Calculer $x = A^3B^{-2}$. — Application : $A = -(2,6734)$, $B = 6,528$.

---

102. — Que devient le plus petit commun multiple de deux nombres quand on multiplie ces deux nombres par un troisième?

103. — Déterminer λ pour que l'équation

$$(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda - 2 = 0$$

ait ses racines égales. Calculer les racines.

104. — [**4198** (*)]. Transformer l'expression

$$\sqrt{x^2 + x + 1 - \sqrt{2x^3 + x^2 + 2x}}$$

en une somme de deux radicaux simples. L'opération est-elle possible? La justifier.

(*A suivre.*)

ÉCOLE D'ARTS ET MÉTIERS D'ERQUELINNES

Arithmétique.

I. — **4199.** Démontrer qu'aucun nombre entier composé d'un seul chiffre répété plusieurs fois ne peut être un carré parfait.

II. — **4200.** Trouver deux nombres de trois chiffres, entiers et consécutifs, sachant que chacun d'eux est égal à la somme des cubes de ses chiffres.

III. — **4201.** Un billet A est escompté en dedans, pour 3 mois, au taux de 3 % l'an, et un billet B est escompté en dehors, pour 4 mois, au taux de 4 %. Dans ces conditions les deux billets ont même valeur actuelle.

Si le billet A est escompté en dedans, pour 3 mois, au taux de 4 %, et le billet B, en dehors, pour 4 mois, au taux de 3 %, la différence des valeurs actuelles est 7^f. Quelle est la valeur nominale du billet B?

Algèbre.

I. — **4202.** Quelle est, pour $x = 1$, la valeur limite de

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x\sqrt{x} - x - \sqrt{x} + 1}} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x\sqrt{x} - \sqrt{x}}}?$$

II. — **4203.** Le polynome

$$3x^4 - 11x^2 + kx - 3$$

où k est un coefficient numérique positif, est égal à la différence des carrés de deux trinomes du second degré à coefficients entiers.

1° Déterminer ces deux trinomes et la valeur de k;

2° Résoudre avec cette valeur de k

$$3x^4 - 11x^2 + kx - 3 = 0.$$

III. — **4204.** Sur le côté AB d'un carré ABCD, on prend entre A et B un point M tel que les deux droites MC et MD divisent la surface du carré en trois triangles, dont l'un a pour surface la demi-somme des surfaces des deux autres.

Calculer, en fonction du côté a du carré, les distances du point M ainsi déterminé, aux quatre points où les droites MC et MD rencontrent le cercle inscrit dans le carré.

Géométrie.

I. — **4205.** On donne, dans le plan, deux points fixes O et O′ dont la distance est $2a$. On considère un point A mobile sur toute la longueur de la droite OO′, et les deux cercles de centres O et O′ tangents entre eux au point A. On mène par A une sécante BC, de longueur $BC = b$ donnée et inférieure à $4a$, qui rencontre le cercle O au point B, le cercle O′ au point C.

(*) Ce second numérotage ne porte que sur les questions dont nous avons l'intention de donner ici une solution. Ces questions seront résolues comme exercices les abonnés ne devront pas en envoyer de solutions.

Il existe deux positions de cette sécante, symétriques par rapport à la droite OO′. Soient BC et B_1C_1 ces deux sécantes, et soient M et M_1 les milieux de BC et B_1C_1.

1° Montrer que si A se déplace, la longueur $BC = b$ de la corde restant constante, le centre K du cercle circonscrit au triangle AMM_1 est un point fixe.

2° Construire les deux positions particulières A′ et A″ du point A, pour lesquelles le triangle OMM_1 est équilatéral.

3° Montrer que si l'on pose

$$KA' = x, \qquad KA'' = y,$$

on a, quelle que soit la longueur b,

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{xy} = \frac{3}{a^2}.$$

(On supposera dans cette vérification que KA′ et KA″ sont deux segments orientés, en d'autres termes, x et y sont de même signe si A′ et A″ sont du même côté de K, et de signes contraires si A′ et A″ sont de part et d'autre de K.)

II. — **4206.** Construire un trapèze circonscrit à un cercle de rayon donné R, connaissant les deux diagonales d et d'.

III. — **4207.** Lieu des points M dont la somme des carrés des distances aux six faces d'un parallélépipède rectangle est égale à k^2, constante donnée.

Examiner les deux cas particuliers, où le parallélépipède considéré étant le cube d'arête a, on a

$$1° \quad k^2 = 2a^2, \qquad 2° \quad k^2 = 3a^2.$$

Sciences physiques.

PHYSIQUE.

I. — La fusion et ses lois. Détermination de la chaleur de fusion par le calorimètre à eau.

II. — **4208.** Deux récipients A et B communiquent entre eux par un corps de pompe C, aspirant en A et refoulant en B.

Au début, A de volume V, et C de volume v, sont remplis d'hydrogène à la pression H; B de volume V′ est rempli de gaz carbonique à la pression H′. Supposant le piston en haut de sa course à l'origine, on demande les pressions dans chaque récipient après 1, 2, 3, 4 courses complètes. Généraliser. — Application numérique : $V = 9^l$, $v = 1^l$, $V' = 10^l$, $H = 1$ atmosphère, $H' = 2$ atmosphères.

Que deviendrait la réponse en supposant $H = H'$ et $V = V'$, valeur maxima de la pression en B, en ne tenant pas compte de l'espace nuisible?

Déterminer la composition en poids après la 4e course dans le récipient B. On donne $O = 16$, $C = 12$, $H = 1$, et volume moléculaire à 0° et 760^mm, 22^l,30.

On est supposé opérer dans ces conditions normales.

CHIMIE.

I. — L'ammoniaque : préparation du gaz, préparation industrielle de la dissolution, solubilité et liquéfaction du gaz, caractères chimiques, usages.

II. — **4209.** On chauffe dans une cornue 0^g,585 de NaCl avec de l'acide SO^4H^2 et l'on envoie le gaz dégagé dans une éprouvette cylindrique pleine de mercure et dépassant de $h = 50^{cm}$ le niveau de mercure de la cuvette sur laquelle on l'a renversée.

La section de l'éprouvette $S = 6^{cm^2}$ et la pression de l'atmosphère est $H = 74^{cm}$ de mercure.

Calculer la hauteur x à laquelle restera soulevée la colonne de mercure en supposant la température $t° = 0°$.

$$Na = 23, \qquad Cl = 35,5.$$

Volume moléculaire du gaz : 22^l,30.

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie PAUL BRODARD.

23e Année. 1er Février 1921. N° 9.

L'Éducation Mathématique

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

PRIX DU NUMÉRO : France et Colonies, 0 fr. 60. Étranger, 0 fr. 70.
ABONNEMENT ANNUEL : France et Colonies, 10 fr. Étranger, 12 fr.

Tous les abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, l'on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction : Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Abonnements : Librairie **Vuibert**, Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

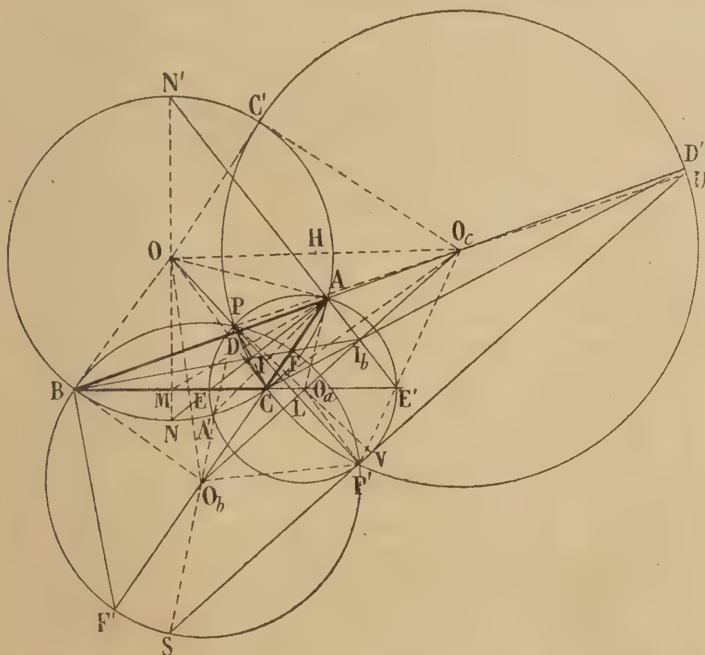
SUR LES CERCLES D'APOLLONIUS D'UN TRIANGLE (*)

par M. **A. Julou**,
Professeur à l'école primaire supérieure de Guingamp.

On appelle *cercle d'Apollonius* relatif à un côté d'un triangle, le cercle qui a pour diamètre le segment déterminé sur le côté considéré par les pieds des bissectrices de l'angle opposé.

Nous désignerons par O_a, O_b, O_c les centres des cercles d'Apollonius situés respectivement sur les côtés a, b, c et par R_a, R_b, R_c leurs rayons.

1° *Le cercle circonscrit au triangle* ABC *est orthogonal aux trois cercles d'Apollonius.* — Sur chacun des côtés, les pieds des bissec-



trices interne et externe déterminent avec les extrémités du côté une division harmonique. Ainsi E et E' sont conjugués par rapport à B et C, et tout cercle passant par B et C coupe orthogonalement le cercle de diamètre EE'.

Il en résulte que les rayons du cercle circonscrit aboutissant aux sommets du triangle sont perpendiculaires aux rayons des cercles d'Apollonius de ces mêmes sommets. C'est ainsi que l'angle OBO_b, en particulier, est droit.

Les rayons OA, OB, OC sont tangents en A, B, C à (O_a), (O_b), (O_c) et les rayons O_cC, O_bB, O_aA sont tangents au cercle circonscrit en C, B et A.

2° *Les cercles d'Apollonius ont même axe radical et leurs centres sont en ligne droite.* — Les circonférences (O_c) et (O_b) se coupent en P et P'. Montrons que ces points appartiennent aussi à la circonférence (O_a).

Le cercle d'Apollonius relatif à un côté d'un triangle est le lieu géométrique des points dont le rapport des distances aux extrémités de ce côté est égal au rapport des deux autres côtés.

Le point P appartenant à (O_c), on peut écrire $\frac{BP}{AP} = \frac{a}{b}$.

De même, P étant sur la circonférence (O_b), on peut poser

$$\frac{AP}{CP} = \frac{c}{a}.$$

Multipliant ces rapports membre à membre, on obtient $\frac{BP}{CP} = \frac{c}{b}$, ce qui montre que P appartient aussi à la circonférence (O_a).

On démontrerait de même que P' est commun aux trois circonférences. Elles admettent donc une corde commune PP'. Les centres O_b, O_a, O_c sont alignés, puisqu'ils se trouvent sur la perpendiculaire élevée au milieu de PP'. En prolongeant cette corde indéfiniment dans les deux sens, les points situés sur la corde commune PP' sont d'égale puissance par rapport aux trois cercles (O_a), (O_b), (O_c). Ils ont donc même axe radical. Les points P et P' ont été appelés *centres isodynamiques*.

Pour le point P, on a, en effet, cette égalité remarquable déduite des rapports précédents :

$$BP.b = AP.a = CP.c.$$

Pour P', on aurait de même

$$BP'.b = AP'.a = CP'.c.$$

Convenons d'appeler la corde PP', *corde d'Apollonius*.

3° *La corde d'Apollonius passe par le centre du cercle circonscrit.* — De la démonstration donnée pour la première propriété, il résulte que le point O est d'égale puissance par rapport aux trois cercles d'Apollonius. Il appartient donc à leur axe radical et se trouve par suite sur le prolongement de P'P.

4° *La polaire de l'un des centres isodynamiques P ou P' par rapport au cercle circonscrit passe par l'autre centre.* — En effet, R désignant le rayon du cercle circonscrit, on a $R^2 = OP.OP'$, ce qui montre que la polaire de P par rapport à (O) est la droite

(*) Cette note a été suggérée par la question n° 6313 du *Journal de Mathématiques élémentaires* (n° 5 du 1er décembre 1906, 31e année, p. 37), à laquelle je prie le lecteur de vouloir bien se reporter. Cependant, pour donner au développement de cette note toute son unité, nous donnerons une démonstration succincte et un peu différente des trois propriétés traitées dans le n° 6313.

perpendiculaire à OP′ en P′. Elle passe par les points diamétralement opposés à P sur chacun des cercles (O_a), (O_b), (O_c), c'est-à-dire par les points S, V et U. Cette polaire est tracée sur la figure; celle de P′ par rapport à (O) ne l'est pas. Ces deux polaires sont symétriques par rapport à la droite des centres des cercles d'Apollonius.

5° *Les axes radicaux des cercles d'Apollonius et du cercle circonscrit sont symétriques des médianes par rapport aux bissectrices intérieures.* — Ainsi, montrons que A′A, axe radical de (O) et (O_a), est tel que $\widehat{MAE} = \widehat{EAA'}$.

Or,

$$\widehat{MAE} = \widehat{O_aEA} - \widehat{O_aMA}$$

et, le quadrilatère OMO_aA étant inscriptible,

$$\widehat{O_aMA} = \widehat{O_aOA} = \widehat{A'AO_a}.$$

Le triangle isocèle O_aEA donne

$$\widehat{O_aEA} = \widehat{O_aAE}.$$

Donc,

$$\widehat{O_aEA} - \widehat{O_aMA} = \widehat{O_aAE} - \widehat{A'AO_a} = \widehat{EAA'}.$$

Par suite AA′ est la symédiane (*) issue de A.

6° *L'inverse du rayon du cercle d'Apollonius relatif au côté moyen d'un triangle est égal à la somme des inverses des deux autres rayons.* — Démontrons que si $c > a > b$, on a $\frac{1}{R_a} = \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}$.

Calculons R_a par exemple :

$$R_a = \frac{EC + CE'}{2}; \quad \text{or} \quad EC = \frac{ab}{c+b} \quad \text{et} \quad CE' = \frac{ab}{c-b},$$

d'où

$$EC + CE' = \frac{2abc}{c^2 - b^2} \quad \text{et} \quad R_a = \frac{abc}{c^2 - b^2}.$$

On trouve de même

$$R_b = \frac{abc}{c^2 - a^2} \quad \text{et} \quad R_c = \frac{abc}{a^2 - b^2}.$$

Les inverses de ces rayons sont

$$\frac{1}{R_a} = \frac{c^2 - b^2}{abc}, \quad \frac{1}{R_b} = \frac{c^2 - a^2}{abc}, \quad \frac{1}{R_c} = \frac{a^2 - b^2}{abc}.$$

On en déduit

$$\frac{1}{R_a} = \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}.$$

Donc, *quand on connaît les rayons de deux cercles d'Apollonius d'un triangle, on peut calculer ou construire celui du troisième.*

Nous justifierons plus loin géométriquement cette curieuse proposition en montrant que si deux des centres sont connus ainsi qu'un rayon, on peut en déduire le troisième centre ainsi que les deux autres rayons. Nous établirons préalablement la propriété suivante.

7° *La droite joignant le centre du cercle d'Apollonius relatif au côté moyen à l'un des centres isodynamiques est bissectrice de l'angle formé par les droites joignant ce point aux deux autres centres et ce dernier angle vaut 120°.* — Nous aurons démontré cette proposition si nous prouvons que l'un des angles $O_aP'O_c$ ou $O_aP'O_b$ vaut 60°.

En appliquant la relation du carré du côté opposé à un angle de 60° au triangle $O_aP'O_c$, il suffit d'établir que

$$\overline{O_aO_c}^2 = \overline{O_aP'}^2 + \overline{O_cP'}^2 - O_aP' \times O_cP'. \qquad (1)$$

O_aP' et O_cP' sont respectivement égaux à R_a et R_c.

Pour calculer O_aO_c, appliquons la relation de Stewart au triangle O_cBO_a et à la cévienne O_cC. Calculons d'abord O_aC, O_aB, puis O_cA et O_cB.

On trouve, par un calcul facile,

$$O_aC = \frac{ab^2}{c^2 - b^2}, \quad O_aB = \frac{ac^2}{c^2 - b^2}, \quad O_cA = \frac{cb^2}{a^2 - b^2}, \quad O_cB = \frac{ca^2}{a^2 - b^2}.$$

D'après la relation de Stewart, on peut écrire

$$\overline{O_cB}^2 . CO_a + \overline{O_cO}^2_a . BC = \overline{O_cC}^2 . BO_a + BC . CO_a . BO_a.$$

En remplaçant les longueurs par les valeurs trouvées plus haut et en simplifiant, on trouve

$$\overline{O_cO_a}^2 = \frac{a^2b^2c^2[a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2]}{[(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)]^2}.$$

Il reste donc à vérifier l'égalité (1). Le second membre est égal à

$$\frac{a^2b^2c^2}{(c^2 - b^2)^2} + \frac{a^2b^2c^2}{(a^2 - b^2)^2} - \frac{a^2b^2c^2}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)};$$

en mettant $a^2b^2c^2$ en facteur et réduisant au dénominateur $[(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)]^2$, on obtient

$$\frac{a^2b^2c^2}{[(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)]^2}[(a^2 - b^2)^2 + (c^2 - b^2)^2 - (c^2 - b^2)(a^2 - b^2)]$$

et, en remarquant que le crochet simplifié donne

$$a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2,$$

on trouve finalement l'expression de $\overline{O_cO_a}^2$ et l'égalité (1) est vérifiée.

Donc

$$\widehat{O_aP'O_c} = 60° = \widehat{O_aP'O} \qquad \text{et} \qquad \widehat{O_cP'O_b} = 120°.$$

On en conclut que *le cercle O_a coupe les cercles O_b et O_c sous des angles de 60° et que O_b et O_c se coupent sous un angle de 120°.*

Il en résulte également que si deux des centres O_c et O_a sont connus ainsi qu'un des rayons, R_c par exemple, on peut déterminer le troisième centre et les deux autres rayons. Les points P et P′ sont en effet connus par l'intersection de la circonférence (O_c, R_c) et des segments capables de 60° décrits de part et d'autre de O_cO_a comme corde. On mène ensuite $P'O_a$ et on construit avec ce dernier segment comme côté un angle de 60°, dont le second côté, $P'O_b$, rencontre O_cO_a prolongé en O_b, centre du troisième cercle d'Apollonius. Les rayons R_a et R_c sont ainsi déterminés, puisque les centres O_a et O_c sont connus ainsi que les centres isodynamiques.

(*A suivre.*)

ARITHMÉTIQUE

4138. — *Deux vases A et B de même poids contiennent des quantités d'eau différentes. Le poids total de A est les $\frac{4}{5}$ de celui de B. Si l'on verse le contenu de B dans A, ce dernier pèse alors 8 fois plus que B vide. Sachant que le poids de l'eau contenue dans B surpasse celui de l'eau contenue dans A de 50g, on demande le poids de chaque vase et le poids du liquide qu'il contenait primitivement.*

(*B. S., Dijon, aspirantes, mars* 1920.)

Solution arithmétique. — Le poids de A, plein, est les $\frac{4}{5}$ du poids de B, plein également; la différence de ces poids est donc $\frac{1}{5}$ de celui de B; or cette différence est égale à celle des contenus, puisque les vases ont même poids. D'autre part, la différence des contenus est une donnée de la question; elle est de 50g.

(*) Symétrique de la médiane par rapport aux bissectrices issues du même sommet.

Le poids de B, quand il est plein, est donc $5 \times 50 = 250^g$, et celui de A est les $\frac{4}{5}$ de 250, soit 200^g.

Le total de ces poids est 450^g; il ne varie pas, quand l'eau est transvasée. Lorsque tout le liquide est dans A, ce poids est partagé dans le rapport de 8 à 1; le vase A pèse alors $\frac{8}{9}$ de 450^g, soit 400^g, et B, vide, en pèse 50.

Donc le poids commun des vases, vides, est 50^g; A contenait 150 et B 200^g d'eau.

(GUICHENEY, à Yusuf, Constantine.)

Solution algébrique. — Soient x le poids commun des deux vases, y et z le nombre de grammes d'eau qu'ils contiennent respectivement; l'énoncé fournit immédiatement les équations suivantes :

$$x + y = \frac{4}{5}(x + z), \qquad (1)$$

puis, lorsque le poids d'eau z passe de B dans A :

$$x + y + z = 8x, \qquad (2)$$

enfin

$$z - y = 50. \qquad (3)$$

Ces équations forment un système linéaire à trois inconnues, qui, après simplification, prend la forme

$$\begin{cases} x + 5y - 4z = 0, & (1') \\ 7x - y - z = 0, & (2') \\ z - y = 50. & (3) \end{cases}$$

En tirant z de la troisième équation et en portant sa valeur dans les deux premières, on trouve

$$x + y = 200, \qquad 7x - 2y = 50,$$

équations qui livrent sans peine les valeurs

$$x = 50, \qquad y = 150, \qquad z = 200.$$

(JACQUES DEVISME, à Paris.)

[Bonnes solutions arithmétiques : Mlle Bourreau; MM. G. Alamasset; A. Authier; J. Barbot; A. Bordes; L. P. C.; M. Boulvert; R. Cachia; A. Chatelier; M. Chatelier; Delerive; E. Delmas; L. Dessapt; M. Didier; P. Dujoux; R. Godard; J. Magnani; G. Meynaud; F. Morvan; G. Mouzon; Olivier; E. Pinlong; E. Richard; L. Soulier; A. T., à Blanzy; X., à Mamers; A. Duval; Guitton; L. Linemann; Ménéchal; Ch. Norgelet.

Bonnes solutions algébriques : Mlles G. David; S. David; A. Levifve; MM. P. Arnavon; Baré; Beaufils; Bertrand; L. Bisqué; G. Bitaine; R. Bonhomme; G. Boulerne; G. Bovet; J. Bugnard; G. Capus; P. Charpentier; J. Cartazon; M. Castelain; Ch. Caussin; B. Charles; R. Chasselut; Chauvalon; J. Clamens; G. Clément; G. Colle; M. Courboulay; C. Crépeau; J. Danton; P. Davin; M. Ducros; P. Dujoux; A. Eparvier; A. F., à Saint-Pons; G. Fauché; R. Gaborit; R. Gaucher; R. Grégoire; Y. Guézelle; M. Hambert; P. Hasse; G. Houalet; M. Hutin; G. Jugain; G. Knoll; Lamendin; R. Laurin; M. Lépinois; M. Lhoumeau; L. Louis; P. Louon; A. Magdinier; F. Maitre; R. Marchant; J. Martin; P. Masbout; Y. Maurice; P. Mellot; H. Micard; R. Morel; G. N., à Bruxelles; L. G. Papon; G. Pichon; G. Piel; G. Ponceau; G. Remacle; G. Rian; E. Richard; F. Richard; Riedel; A. Ricoux; J. Schilling; H. Sebban; Tarrisse; G. Thiébaux; N. Vedie; M. Verlot; Ch. Vouilloux; M. Barny; A. Cieutat; A. Favard; Geffroy-Le Jan; L. Jéry; R. Locas; A. Marcaut; A. Robba.]

4139. — *Un canon envoie un obus à une distance de* $9\,180^m$. *La vitesse moyenne de l'obus est de* 540^m *par seconde et celle du son de* 340^m *par seconde. On demande à quelle distance du canon se trouve un soldat placé sur la ligne de tir dans chacun des cas suivants :*

1° *Il ne distingue pas le bruit du canon du bruit de l'éclatement de l'obus.*

2° *Le bruit du canon arrive à son oreille une seconde avant le bruit de l'éclatement.*

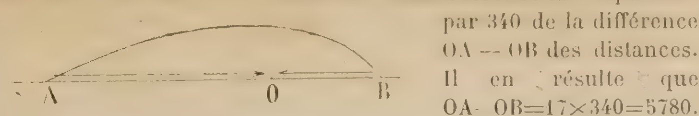
Vérifier les résultats.

(*B. S., Seine-et-Marne, aspirants, mars* 1920.)

Le temps qui s'écoule entre le départ de l'obus et sa chute, laquelle amène instantanément l'éclatement, est

$$9\,180 : 540 = 17 \text{ secondes.}$$

1° La différence entre le temps que met le son à parcourir AO et OB est donc 17 secondes : or cette différence est le quotient par 340 de la différence OA — OB des distances. Il en résulte que OA — OB = 17 × 340 = 5780.



On connaît donc la somme et la différence des distances OA et OB,

$$OA + OB = 9\,180, \qquad OA - OB = 5\,780;$$

par conséquent

$$OA = \frac{1}{2}(9\,180 + 5\,780) = 7\,480,$$

$$OB = \frac{1}{2}(9\,180 - 5\,780) = 1\,700.$$

L'observateur O est à $1\,700^m$ du point où l'obus éclate; le départ du coup est entendu après, 7 480 : 340 = 22 secondes.

2° Si le bruit du départ arrive à l'oreille du soldat une seconde avant celui de l'éclatement, c'est que le soldat s'est rapproché du point de départ de la moitié du chemin que le son parcourt en une seconde, soit de 170 mètres, car le coup de départ est entendu une demi-seconde plus tôt, l'éclatement une demi-seconde plus tard que dans le cas précédent. Donc OA = $7\,310^m$. Le départ du coup est entendu après $21^s,5$, l'éclatement $5^s,5$ après l'arrivée de l'obus, et $22^s,5$ après son départ.

(F. MAITRE, école primaire supérieure de Moutiers, Hte-Savoie.)

N. B. — Le bruit se propage en rasant le sol; la forme de la trajectoire n'influe pas sur le problème; toutefois, il faut supposer que ce qu'on appelle *vitesse moyenne* du projectile est la vitesse moyenne de sa projection sur le sol, ou, plus simplement encore, le quotient de la portée par la durée du trajet.

[Bonnes solutions de Mlles M. Bourreau; G. David; S. David; A. Levifve; MM. Alamasset; A. Authier; J. Barbot; J. Bertrand; L. Bisqué; G. Bitaine; R. Bonhomme; M. Boulvert; Bovet; J. Boyaval; R. Bruneteau; J. Bugnard; L. P. C.; R. Cachia; G. Capus; P. Carpentier; J. Cartouzou; Castelain; B. Charles; R. Chasselut; A. Chatelier; M. Chatelier; Ch. Caussin; J. Clamens; E. Clanet; G. Clément; G. Colle; M. Courboulay; J. Danton; G. Dautel; Delerive; L. Dessapt; J. Devisme; M. Didier; A. Doutau; A. Dubuc; M. Ducros; P. Dujoux; A. Eparvier; A.-F., à Saint-Pons; Farges; G. Fouché; R. Gaborit; R. Godard; A. Goëlo; Y. Guezelle; R. Henin; R. Henry; G. Houalet; G. Jugain; G. Knoll; R. Laporte; Le Bozec; P. Louon; R. Lugan; M. Magdinier; Magnani; R. Marchant; A. Marias; J. Martin; Y. Maurice; G. Meynaud; H. Micard; R. Morel; F. Morvan; J. Navel; J. N., à Bruxelles; Olivier; L. G. Papon; R. Passavey; G. Pichon; M. Plessy; G. Ponceau; G. Renacle; G. Rian; F. Richard; A. Ricoux; Saudemont; J. Schilling; H. Sebban; A. T., à Blanzy; Tarrisse; N. Vedie; H. Aubert; M. Barny; A. Bertrand; V. Bourden; L. Chapelon; A. Cieutat; A. Duval; A. Favard; Ph. Fond; L. Girardot; Guitton; Le Jan-Geffroy; L. Linémann; A. Marcaut; J. Mauhin; Ménéchal; Norgelet; E. Paté; M. Pichereau; A. Robba.

Assez bonnes solutions : MM. P. Arnavon; J. Briquet; M. Hambert; R. Sator; Ch. Vouilloux.]

ALGÈBRE

4047. — *Un train* T, *dont la vitesse est* v *et un train* T' *dont la vitesse est* V *quittent la gare* A, *pour aller à* B. *Le train* T' *part après le train* T; *la différence des heures de départ est calculée de façon qu'ils arrivent ensemble à* B. *Après avoir parcouru les* $\frac{2}{3}$ *du trajet, le train* T *est obligé de réduire sa vitesse de moitié, et de se garer en un point* C, *à une distance* d *du point d'arrivée, où il est aussitôt dépassé par le train* T'. *Calculer la longueur du parcours et la différence des heures de départ.*

Application numérique : $V = 100^{km}$ *à l'heure*; $v = 50^{km}$; $d = 20^{km}$.

Soient x la différence des heures de départ, comptée en heures, v et V les vitesses, en kilomètres à l'heure, y la distance des deux gares A et B, d la distance CB, mesurées l'une et l'autre en kilomètres.

La différence des heures de départ est calculée de façon que les deux trains arrivent simultanément en B; donc

$$\frac{y}{v} - \frac{y}{V} = x. \qquad (1)$$

Quand le train le moins rapide se gare au point C, il a parcouru $\frac{2y}{3}$ à la vitesse v et $\frac{y}{3} - d$ à la vitesse $\frac{1}{2}v$; la durée de ce trajet est

$$t = \frac{2y}{3v} + \frac{2y - 6d}{3v} = \frac{4y - 6d}{3v}; \qquad (2)$$

le train le plus rapide a parcouru la distance $y - d$ à la vitesse V, dans le temps

$$t' = \frac{y - d}{V};$$

puisqu'il arrive au point C en même temps que le train parti le premier, la différence de ces deux durées est égale à x, ce qui fournit l'équation

$$\frac{4y - 6d}{3v} - \frac{y - d}{V} = x. \qquad (3)$$

Les équations (1) et (3) forment un système à deux inconnues, entre lesquelles on élimine facilement x; il suffit pour cela d'égaler les deux valeurs trouvées pour cette inconnue. On obtient ainsi l'équation

$$\frac{4y - 6d}{3v} - \frac{y - d}{V} = \frac{y}{v} - \frac{y}{V}, \qquad (4)$$

ce qui donne, après une réduction facile,

$$\frac{y}{3v} = \frac{2d}{v} - \frac{d}{V} = d\frac{2V - v}{vV}.$$

On a donc

$$\left.\begin{aligned} y &= 3d\frac{2V - v}{V}, \\ x &= 3d\frac{2V - v}{V} \cdot \frac{V - v}{Vv}; \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

comme $V > v$, et *a fortiori* $2V > v$, ces formules donneront toujours des valeurs positives de x et de y.

Application : $d = 20^{km}$, $v = 50^{km}$, $V = 100^{km}$; ces valeurs des données portées dans les formules (5) fournissent

$$y = 90^{km}, \qquad x = \frac{9^h}{10} = 54 \text{ minutes.}$$

Vérification. — Pour parcourir 60^{km} à 50^{km} à l'heure, le premier train a mis $\frac{60}{50} = \frac{6}{5}$ d'heure, soit 72 minutes; pour parcourir 10^{km} à 25^{km} à l'heure, il a mis $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ d'heure = 24 minutes; en tout 96 minutes. Le train rapide a parcouru 70^{km} en $\frac{70}{100}$ d'heure, c'est-à-dire en 42 minutes. La différence des temps est 54 minutes. D'autre part, pour faire 90^{km} à 100^{km} à l'heure, il faut 54 minutes, et pour les parcourir à une vitesse moitié moindre de 50^{km} à l'heure, il faut 108 minutes; la différence des heures de départ est donc 54 minutes.

(G. DÉMARET, à Montreuil-sur-Mer.)

[Bonnes solutions de Mlle A. Levifve; MM. H. Arnaud; A. Bal; R. Bernard; Bourchanin; H. Cazes; J. Chabaud; M. Chatelier; E. Delmas; F. Dupire; A. F., à Saint-Pons; P. Faucheux; R. Fayet; M. Forcade; E. Gouyau; Grall; M. Gros; E. Guicheney; V. Herbiet; Hiriartborde; Lhôtelier; R. Journeau; P. Louon; E. Masdupuy; J. Mauhin; H. Micard; J. Millour; R. Reynard; A. Rimbert; L. Soulier; M. Stiévenard; J. Tarnus.]

4136. — *Vérifier l'identité*

$$\frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

En déduire la sommation des termes de la suite

$$\frac{1}{1\sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{4} + 4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}.$$

Quelle est la limite de cette somme quand n augmente indéfiniment?

On peut écrire

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}};$$

en multipliant les deux termes de ce rapport par $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, le numérateur se simplifie, et l'on trouve

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}};$$

l'identité est donc démontrée.

En appliquant l'identité successivement aux valeurs $n = 1$, $n = 2$, etc., on a

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

et si l'on ajoute ces égalités, il ne reste dans le second membre que le premier et le dernier terme, d'où la relation

$$S_n = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}};$$

il est visible que si le nombre de termes du premier membre augmente au delà de toute limite, c'est-à-dire si n grandit indéfiniment, le quotient $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ tend vers zéro, la somme S_n a donc pour limite l'unité; en termes plus précis, plus on prend de termes consécutifs, moins la somme diffère de l'unité : la différence entre S_n et l'unité est en effet $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, d'après l'identité précédente.

(G. MOUZON, à Chasseneuil.)

[Bonnes solutions de Mlle Levifve; de MM. Adéle; Ch. Andrei; P. Arnavon; A. Authier; J. Barbot; F. Baujard; Baylac; Beaufils; A. Boyer; J. Bruneteau; G. Bruniquel; J. Bugnard; Ch. Cadaert; J. Calaviq; G. Capus; B. Charles; R. Chasselut; A. Chatelier; M. Chatelier; Chauvalon; J. Clamens; G. Clément; M. Courboulay; J. Devisme; M. Didier; M. Ducros; A. F., à Saint-Pons; G. Février; G. Fouché; R. Godard; Y. Guézelle; E. Guicheney; M. Hambert; A. Haudrechy; G. Jugain; G. Knoll; Le Pinois; P. Louon; R. Lugay; M., à Guéret; F. Maitre; R. Marchant; Y. Maurice; M. Maury; Ch. Mazure; G. Meynaud; J. Moirez; R. Morel; G. N., à Bruxelles; Olivier; Pautras; J. Périn; G. Pichon; J. Pinelli; G. Ponceau; A. Ricoux; J. Schilling; H. Sebban; L. Soulier; A. T., à Blanzy; H. Aubert; A. Cieutat; J. Dougados; A. Duval; L. Girardot; L. P. C.; R. Lecas; Le Jan-Geffroy; Linemann; Ménéchal; J. Millour; A. Popu.]

4140. — *Trouver suivant les valeurs de m le nombre des racines de l'équation*

$$(m-1)x^4 - 2mx^2 + (m-2) = 0.$$

(*B. S., Jura, aspirants, mars* 1920.)

Pour discuter cette équation bicarrée, il faut chercher combien l'équation

$$(m-1)y^2 - 2my + (m-2) = 0 \qquad (2)$$

a de racines positives. Cette discussion porte sur le signe de la quantité sous le radical

$$m^2 - (m-1)(m-2) = 3m - 2,$$

sur celui du produit des racines, qui est le même que le signe de $(m-1)(m-2)$, enfin sur celui de leur somme, qui est le même que le signe de $m(m-1)$.

Cela conduit à considérer les valeurs remarquables de m, qui se classent dans l'ordre $0, \frac{2}{3}, 1, 2$.

a) Quand m est inférieur à $\frac{2}{3}$, l'équation (2) n'a pas de racines.

b) Quand m est compris entre $\frac{2}{3}$ et 1, l'équation en y a deux racines dont le produit est positif et la somme négative; donc elles sont toutes les deux négatives, l'équation en x n'a pas de racine.

c) m est compris entre 1 et 2; l'équation en y a deux racines dont le produit est négatif; l'une est négative et ne donne pas de valeur pour x, l'autre y' est positive et donne deux valeurs opposées : $x_1 = +\sqrt{y'}$, $x_2 = -\sqrt{y'}$.

d) m est supérieur à 2; l'équation en y a deux racines de même signe, leur somme est positive, donc elles sont positives et fournissent quatre valeurs pour x, deux à deux égales et de signes contraires, $x_1 = -x_2 = +\sqrt{y'}$, $x_3 = -x_4 = +\sqrt{y''}$.

Cas particuliers. — $m = \frac{2}{3}$; l'équation en y a une racine double $y = -4$, pas de valeur correspondante pour x;

$m = 1$; le coefficient de y^2 s'annule, l'équation en y a une racine infinie et une racine négative, $-\frac{1}{2}$, qui ne fournit aucune valeur de x : on peut dire que deux racines égales et de signes contraires de l'équation en x sont devenues infinies.

$m = 2$: l'équation en y a une racine nulle qui donne pour x deux valeurs nulles et une racine positive, $y = +4$, qui donne $x = +2$ et $x = -2$.

(A. MAGDINIER.)

N. B. — Une fois de plus, nous conseillons de ne pas discuter une équation bicarrée sur les formules des racines.

[Bonnes solutions de Mlles S. David; A. Levifve; MM. Arbey; P. Arnavon; A. Authier; P. Baylac; G. Bitaine; R. Bonhomme; A. Boyer; G. Bruniquel; J. Bugnard; L. P. C.; P. Carpentier; Ch. Caussin; R. Chanat; Chauvalon; J. Clamens; G. Démaret; A. F., à Saint-Pons; G. Février; R. Godard; Y. Guézelle; E. Guicheney; R. Henin; M. Lamarque; M. Le Pinois; P. Louon; R. Lugen; A. Magdinier; J. Magnani; R. Marchant; J. Martin; M. Maury; Ch. Mazure; G. Meynaud; G. Mouzon; G. Olivier; J. Périn; M. Pichereau; J. Pinelli; A. Ricoux; M. Saint-Juvin; J. Schilling; H. Sebban; L. Soulier; A. T., à Blanzy; G. Thiébaux; Truong-van-Cam; R. Weinzapfel; A. Cieutat; R. Delpont; Le Jan-Geffroy; Ménéchal; E. Paté; A. Popu; A. Robba.]

4141. — *Le tunnel du mont Cenis est plus long que celui de l'Arlberg de* 1 980m, *mais plus court que celui du Gothard de* 2 690m.

Le triple de la longueur du tunnel de l'Arlberg dépasse de 3 600m *la somme des longueurs des deux autres.*

Quelles sont les longueurs des trois tunnels?

(*Examen autrichien.*)

Si l'on désigne par a, c et g les longueurs des trois tunnels, comptées en mètres, les indications données par l'énoncé se traduisent immédiatement par les équations

$$c - a = 1\,980, \quad (1)$$

$$g - c = 2\,690, \quad (2)$$

$$3a - (c + g) = 3\,600. \quad (3)$$

En additionnant les deux dernières équations, on a

$$3a - 2c = 6\,290$$

ou

$$3(a - c) + c = 6\,290;$$

en remplaçant dans cette équation $a - c$ par sa valeur tirée de la première, on obtient

$$-3(1\,980) + c = 6\,290,$$

d'où

$$c = 12\,230;$$

les deux premières équations donnent alors

$$a = 12\,230 - 1\,980 = 10\,250,$$

$$g = 12\,230 + 2\,690 = 14\,920.$$

(TRUONG-VAN-CÂM, lycée de Montpellier.)

REMARQUE. — On peut conduire le calcul un peu différemment : en multipliant par 2 les deux membres de la première équation, on obtient

$$2c - 2a = 3\,960; \quad (1')$$

en faisant maintenant la somme des équations (1'), (2) et (3), on élimine c et g : il reste

$$a = 3\,960 + 2\,690 + 3\,600 = 10\,250.$$

Solution arithmétique. — La longueur du tunnel du mont Cenis dépasse de 1 980m celle du tunnel de l'Arlberg et celle du tunnel du Gothard la dépasse de 1 980 + 2 690 = 4 670m.

La somme des longueurs des deux plus grands tunnels est donc supérieure au double de la longueur de l'Arlberg de

4 670 + 1 980 = 6 650m.

Or elle est inférieure de 3 600m au triple de cette longueur; donc la longueur du tunnel de l'Arlberg est 6 650 + 3 600 = 10 250m.

N. B. — Les solutions de cette question que nous avons reçues sont en très grande majorité exactes : mais nous sommes surpris d'avoir reçu un nombre encore assez grand de réponses fausses, car la vérification était bien aisée et une erreur facile à reconnaître.

[Bonnes solutions de Mlles M. Bourreau; G. David; S. David; M. Marignac; de MM. P. Abbé; G. Alamasset; P. Arbey; P. Arnavon; H. Aubert; A. Authier; J. Barbot; M. Barny; H. Baumbach; S. Baylac; A. Bertrand; G. Bertrand; L. Besqué; A. Bonnet; L. Bordron; M. Boulvert; V. Bourden, G. Bovet; A. Boyer; R. Bruneteau; P. Buchon; J. Bugnard; R. Cachia; J. Calaviq; G. Capus; P. Carpentier, J. Cartouzou; M. Castelain; A. de Castries; Ch. Caussin; L. Chapelon; B. Charles; R. Chasselut; A. Chatelier; M. Chatelier; A. Cieutat; J. Clamens; E. Clanet; G. Clément; R. Collomb; C. Crépeau; Daix; G. Dautel; P. Davin; Delerive; E. Delmas; R. Delpont; G. Démaret; A. Derivey; L. Dessapt; J. Devisme; M. Didier; P. Dollin; J. Dougados; M. Ducros; P. Dujoux; A. Douteau; R. Drouaud; Dumesny; E. Epailly; A. Eparvier; A. F., à Saint-Pons; A. Favard; R. Gaborit; Geoffroy-Le Jan; L. Gimbert; G. Giudicelli; R. Godard; A. Goëlo; Guézelle; A. Guilhot; M. Hambert; P. Hasse; R. Hénin; R. Henry; G. Houalet; L. Jardonnet; L. Jéry; G. Jugain; G. Knoll; Lamendin; R. Laporte; R. Laurin; P. Le Berd; R. Lecas; M. Lecomte; Levrague; M. Le Pinois; M. Lhoumeau; L. Linemann; L. Louis; P. Louon; A. Magdinier; J. Magnani; F. Maître; A. Marcaud; R. Marchant; A. Maréchal; J. Martin; L. Martin; J. Mauhin; Y. Maurice; Ménéchal; G. Meynaud; R. Micard; Melleville; R. Morel; F. Morvan; G. N., à Bruxelles; J. Navel; G. Olivier; E. Ossieur; J. Paelinck; L.-G. Papon; R. Passavy; E. Paté; Petit; Pichereau; G. Pichon; G. Piel; Pierdet; J. Pinelli; P. Pigeot; G. Ponceau; A. Popu; G. Renacle; E. Richard; F. Richard; A. Ricoux; Riedel; A. Robba; Roquet; M. Sator; Saudemont; J. Schilling; H. Sebban; L. Simon; A. T.; Tarrisse; J. Tesquet; G. Thiébaux; Van Houche; N. Vedie; M. Verget; Ch. Vouilloux.]

GÉOMÉTRIE

4108. — *Un abat-jour en papier a la forme d'un tronc de cône : la petite ouverture a* 5cm *de diamètre et la grande* 30cm; *la génératrice du tronc est* 18cm.

On demande de calculer :

1° *La surface latérale de cet abat-jour;*

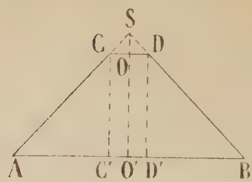
2° *Sa hauteur;*

3° *Les rayons des arcs qu'il a fallu décrire sur le papier pour le découper;*

4° *L'angle du secteur de développement du cône total.*

(*B. S., Caen, aspirants, mars 1920.*)

Soient S le sommet du cône, O et O' les centres des cercles de base, les hauteurs sont dans le rapport des rayons OC et O'A, donc



$$\frac{SO}{5} = \frac{SO'}{30} = \frac{OO'}{25},$$

donc $SO' = 6SO$, de même $SA = 6SC$, par conséquent

$$SC = \frac{1}{5}AC \qquad \text{et} \qquad SA = \frac{6}{5}AC;$$

on obtient ainsi les longueurs de SA et de SC

$$SC = 3{,}6 \qquad \text{et} \qquad SA = 21{,}6.$$

La surface latérale de l'abat-jour est le produit de la longueur AC par la demi-somme des circonférences que décrivent ses extrémités

$$A = \frac{1}{2}\pi 18(5 + 30) = 315\pi = 989^{\text{cm}^2},60.$$

2° Dans le triangle rectangle SCO, on a

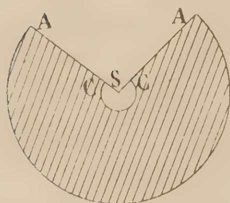
$$\overline{SO}^2 = \overline{SC}^2 - \overline{CO}^2 = (SC + CO)(SC - CO) = (3{,}6 + 2{,}5)(3{,}6 - 2{,}5) = 6{,}71,$$

d'où

$$SO = \sqrt{6{,}71} = 2^{\text{cm}},59, \qquad SO' = 6 \times SO = 15^{\text{cm}},54,$$
$$OO' = 5 \times SO = 12^{\text{cm}},95.$$

3° Les rayons des arcs qu'il a fallu décrire sur le papier sont les apothèmes des deux cônes SCD et SAB, donc $3^{\text{cm}},6$ et $21^{\text{cm}},6$.

4° L'angle de développement du cône sur le plan ayant pour mesure x radians, le bord supérieur de l'abat-jour est un cercle dont la longueur est 30π, il se développe suivant un arc de cercle dont le rayon est 21,6 et la longueur $21{,}6 \times x$; on a donc l'équation



$$x \times 21{,}6 = 30\pi,$$

d'où

$$x = \frac{30}{21{,}6}\pi = \frac{5}{3{,}6}\pi = \frac{10\pi}{7{,}2};$$

la mesure de cet angle en degrés est

$$\frac{10}{7{,}2}180 = \frac{10}{0{,}8}20 = \frac{200}{0{,}8};$$

c'est donc 250°.

(Maurice SUPERNANT, adjoint technique des Ponts et Chaussées, à Dijon.)

[Bonnes solutions : M[lles] A. Levifvo; A. Longuet; MM. Alamasset; P. Arnavon; H. Aubert; Aureille; A. Authier; G. B., à Valence; L. Bordron; J. Briquet; J. Bugnard; R. Cachia; J. Calavicq; J. Camus; M. Castelain; Ch. Caussin; G. Cellier; Cerisier; E. Chapellier; B. Charles; A. Chatelier; M. Chatelier; Chauvalon; A. Cieutat; J. Clamens; G. Clément; J. Contour; P. Cornuéjols; M. Courboulay; Derche; J. Devisme; M. Ducros; G. Dufréche; P. Dujoux; J. Dupaquier; F. Dupire; J. Dutheil; A. F., à Saint-Pons; Ph. Fond; G. Fouché; Goïcœchea; Y. Guézelle; L. Guillet; A. Haudrechy; G. Houalet; G. Knoll; A. Lamendin; Le Jan-Geffroy; Lhôtelier; L. Linemann; P. Louon; R. Marchant; R. Maricot; Y. Maurice; J. Mazeau; H. Micard; A. Monjallon; R. Morel; M. Mortaigne; G. Mouzon; G. N., à Bruxelles; Ch. Norgelet; R. Panchaud; L. G. Papon; E. Paté; J. Périn; G. Pichon; Pierdet; E. Pinlong; A. Popu; J. Régitano; P. Renaud; A. Renault; R. Rigollot; M. Robineau; M. Saint-Juvin; J. Sambussy; J. Schilling; M. Stévenard; J. Tarnus; O. Tarrisse; N. Vedie; A. Wehrung.

Assez bonnes solutions : M[lle] M. Marignac; MM. A. Beauclair; G. Bertrand; R. Collomb; E. Delmas; Guilbert; R. Henry; Landi; J. Le Dian; F. Maitre; J. Martin; J. Mauhin; Ménéchal; L. Messan; A. Moreau; J. Morin; F. Richard; V. Roux; H. Sebban; Siberchicot.]

4109. — *On donne une sphère de centre* O *et de rayon* R, *et un grand cercle de diamètre* AB *de cette sphère; ce cercle est la base d'un cône droit dont la hauteur* SO *est égale au côté du carré inscrit dans un grand cercle de la sphère.*

1° *Déterminer la hauteur et l'apothème de ce cône en fonction du rayon* R.

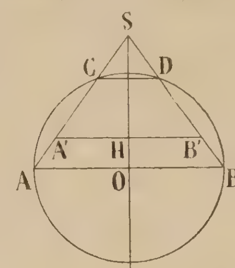
2° *Calculer sa surface totale et son volume.*

3° *A quelle distance de son sommet faut-il mener une parallèle à sa base pour réduire la surface latérale de 1/5?*

4° *La surface latérale du cône* SAB *coupe la surface de la sphère suivant un cercle de diamètre* CD. *Calculer le volume du tronc de cône déterminé dans le cône* SAB *par le cercle de diamètre* CD.

(*B. S., Aix, aspirants, mars* 1920.)

1° La hauteur, d'après l'énoncé, est $R\sqrt{2}$, l'apothème $a = \sqrt{\overline{SO}^2 + \overline{OA}^2}$, donc $a = R\sqrt{3} = R \times 1{,}7320$.



2° La surface latérale est

$$\pi OA . SA = \pi R^2\sqrt{3};$$

celle du cercle de base est πR^2; la surface totale a donc pour mesure

$$\pi R^2(1 + \sqrt{3}) = R^2 \times 8{,}5830.$$

Le volume a pour mesure

$$\frac{1}{3}\pi R^3\sqrt{2} = R^3 \times 1{,}4809.$$

3° Un plan perpendiculaire à SO au point H détermine une section A'B' : les cônes SAB et SA'B' sont homothétiques par rapport au sommet commun S. Le rapport des aires latérales est égal au carré du rapport de similitude, donc à $\left(\frac{SH}{SO}\right)^2$; pour que ce rapport soit celui de 4 à 5, il faut que

$$\frac{SO}{SH} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

ce qui donne

$$SH = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}R = \frac{2}{5}\sqrt{10}\,R = R \times 1{,}2649.$$

4° La puissance du point S par rapport au cercle O est

$$SC \times SA = \overline{SO}^2 - R^2 = 2R^2 - R^2 = R^2;$$

donc

$$\frac{SC}{SA} = \frac{R^2}{\overline{SA}^2} = \frac{1}{3}.$$

Le volume du cône SCD est donc la 27[e] partie de celui du cône SAB; le tronc de cône qu'on obtient en retranchant le premier cône du second a pour volume $\frac{26}{27}\pi R^3\frac{\sqrt{2}}{3} = R^3 \times 1{,}4261.$

(Émile PINLONG, école normale de Guéret.)

[Bonnes solutions de M[lle] A. Longuet; de MM. A. Authier; G. B., à Valence; G. Bertrand; L. Bordron; R. Cachia; J. Bugnard; M. Castelain; Ch. Caussin; G. Cellier; A. Cieutat; Chapellier; B. Charles; A. Chatelier; M. Chatelier; Chauvalon; G. Clément; J. Contour; P. Cornuéjols; M. Courboulay; J. Devisme; F. Dupire; A. F., à Saint-Pons; G. Houalet; G. Knoll; Lhôtelier; P. Louon; F. Maitre; R. Marchant; J. Mauhin; Y. Maurice; Ménéchal; A. Monjallon; R. Morel; G. Mouzon; M. Norgelet; E. Paté; J. Périn; G. Pichon; Pierdet; Rabelle; J. Régitano; F. Richard; M. Robineau; M. Saint-Juvin; J. Sambussy; J. Schilling; M. Stévenard; M. Supernant; J. Tarnus; N. Vedie.

Assez bonnes solutions de M[lle] A. Levifve; MM. L. P. C; J. Calaviq; Clamens; J. Dutheil; E. Epailly; L. Linemann; H. Micard; A. Moreau; H. Sebban; G. Trépaud.]

4128. — *La grande base* AB *d'un trapèze rectangle* ABCD *a une longueur égale à* 8^{dm}. *Sachant que la diagonale* AC *divise ce trapèze en deux triangles dont l'un* ACD *est rectangle en* D *et l'autre* ABC *est équilatéral, on demande de trouver :*

1° *Le périmètre du trapèze* ABCD;

2° *Sa surface;*

3° *La surface du triangle* SAB *obtenu en prolongeant les côtés non parallèles du trapèze jusqu'à leur rencontre en* S.

4° *Enfin, si l'on fait tourner la figure* SAB *autour de* SA *comme axe,*

quel est le rapport des volumes des deux cônes engendrés par les triangles rectangles SDC, SAB.

(*B. S., Marne, aspirants, mars* 1920.)

1° Le triangle ACB étant équilatéral, la perpendiculaire menée de C sur AB tombe au milieu H de AB; la figure ADCH est un rectangle, donc

$$DC = AH = 4$$

et

$$AD = HC = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} = 6{,}9282.$$

Le périmètre du trapèze ADCB est

$$8 + 8 + 4 + 4\sqrt{3} = 4(5 + \sqrt{3}) = 26{,}9282.$$

2° La surface est trois fois celle du triangle ADC, qui est $\frac{1}{2}4.4\sqrt{3}$, cela fait

$$24\sqrt{3} = 41{,}5692.$$

3° Si l'on prolonge BC jusqu'au point S où cette droite coupe AD, les deux triangles CDS et BHC sont égaux (côté $HB = DC$, adjacents à des angles égaux). Le triangle SAB est formé de quatre triangles égaux à ADC, sa surface est $32 \times \sqrt{3} = 55{,}4256$.

4° Les volumes engendrés par les triangles SDC et SAB en tournant autour de SA sont entre eux comme les cubes des dimensions linéaires homologues, donc comme 1 est à 8.

(Les longueurs sont comptées en décimètres, les aires en décimètres carrés.)

(VIRGILE VASILESCO, lycée de Ploesti, Roumanie.)

Remarque I. — Pour donner avec deux chiffres décimaux exacts les produits de $\sqrt{3}$ par 24 et par 32, il fallait prendre plus de deux chiffres décimaux de $\sqrt{3}$.

Remarque II. — Il n'était pas besoin de calculer, surtout numériquement, les volumes des deux cônes, comme l'ont fait plusieurs correspondants, pour trouver leur rapport. De ceux qui ont suivi ce procédé, beaucoup ne sont pas arrivés à la valeur simple $\frac{1}{8}$.

[Bonnes solutions : Mlle A. Levifve; MM. Alamasset; Ch. Andrei; Arbey; H. Aubert; M. Belin; A. Berry; G. Bertrand; J. Boisgontier; Bonnet; Breton; J. Briquet; R. Bruneteau; J. Bugnard; R. Cachia; G. Capus; R. Carlier; P. Carpentier; J. Cartouzou; M. Castelain; U. Cerisier; L. Chapelon; B. Charles; A. Chatelier; M. Chatelier; A. Cieutat; E. Clanet; G. Clément; R. Combaz; P. Cornuéjols; M. Courboulay; Delerive; E. Delmas; J. Devisme; M. Didier; I. Dougados; P. Dujoux; J. Dupaquier; F. Dupire; E. Epailly; A. F., à Saint-Pons; E. Faudou; E. Faurès; G. Févrior; L. Fixe; Forceville; G. Fouché; R. Gaboris; R. Godard; A. Grall; C. Grard; Ch. Grimaldi d'Esdra; Y. Guézelle; Guilhot; E. Grandame; Guitton; M. Hambert; V. Herbiet; G. Houalet; R. Laporte; N. Le Bozec; Le Jan-Geffroy; M. Le Pinois; J. Libiere; L. Lincmann; P. Louon; J. Magnani; F. Maitre; A. Masse; Y. Maurice; M. Maury; J. Mazeau; R. Morel; J. Morin-Chanteau; Mortaigne; G. Mouzon; G. N.; J. Navel; M. Norgelet; L. G. Papon; R. Paris; J. Périgault; G. Pichon; Pierdet; M. Pinot; M. Pommerolle; G. Ponceau; A. Popu; F. Puget; P. Renaud; A. Revault; E. Reynaud; A. Ricoux; A. Robba; M. Robineau; A. Roussel; J. Sambussy; Siberchicot; L. Simon; M. Supernant; M. Stévenard; A. T., à Blanzy; J. Tesquet; A. Tilloy; P. Vaudevelde; N. Vedie; M. Vetter; Yvroud.

Assez bonnes solutions : Mlle S. David; MM. A. Authier; J. Barbot; M. Barny; L. Bordron; A. Boyer; Chauvalon; J. Clamens; G. Clot; R. Collomb; L. Dessapt; A. Eparvier; L. Gajac; Ch. Girod; J. Griscelli; G. Knoll; G. Lapougeas; P. Lavoine; R. Lecas; M. Lhoumeau; R. Lugan; A. Magdinier; R. Marchant; R. Maricot; M Marignac; Ménéchal; H. Micard; A. Monjallon; A. Moreau; E. Paté; J.-H. Périchon; M. Petit; E. Peton; Ch. Raimond; Rocquet; M. Roumy; V. Roux; M. Saint-Juvin; J. Torrès; P. Vidal; Ch. Vouilloux.]

SOLUTION D'EXERCICE

4112. — *Résoudre l'inégalité*

$$2x - 1 > \sqrt{x^2 - 3x + 3}.$$

Cette inégalité ne peut être vérifiée que par des valeurs de x qui rendent le premier membre positif : il faut donc que x soit supérieur à $\frac{1}{2}$.

Cette condition étant supposée remplie, l'ordre de grandeur de deux nombres positifs est le même que celui de leurs carrés; l'inégalité considérée est donc équivalente à

$$(2x - 1)^2 > x^2 - 3x + 3,$$

qui devient, après développement et réduction de termes semblables,

$$f(x) = 3x^2 - x - 2 > 0;$$

cette dernière inégalité est du second degré et elle est vérifiée par les valeurs de la variable extérieures à l'intervalle des racines, qui sont

$$\frac{1}{6}(1 \pm \sqrt{1 + 24});$$

l'une des racines est $+1$, l'autre $-\frac{2}{3}$; le nombre $\frac{1}{2}$ est compris entre ces racines, comme on pouvait d'ailleurs le reconnaître *a priori*, en formant

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - 2 = \frac{3 - 2 - 8}{4} = -\frac{7}{4},$$

quantité négative.

Or on a exclu d'avance toute valeur de x inférieure à $\frac{1}{2}$; l'inégalité est donc vérifiée par les valeurs de x supérieures à $+1$.

AUTRE MÉTHODE. — Considérons les deux quantités

$$A = 2x - 1 - \sqrt{x^2 - 3x + 3},$$

et

$$B = 2x - 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 3}.$$

Il est évident que $A < B$, l'égalité de A et de B étant impossible, car le trinome sous le radical n'est jamais nul.

D'autre part, la somme $A + B$ et le produit AB sont des expressions rationnelles en x :

$$A + B = 2(2x - 1),$$
$$AB = (2x - 1)^2 - (x^2 - 3x + 3)$$
$$= 3x^2 - x - 2 = (3x + 2)(x - 1);$$

on établit alors facilement le tableau des signes de AB, $A + B$, A et B.

Valeurs de x.			$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$		1	
Signe de	AB	+	0	—		—	0	+
—	A + B	—	—	—	0	+	+	+
—	A	—		—		—	0	+
—	B	—	0	+		+		+

Quand AB est négatif, A et B sont de signes contraires, or $A < B$, donc $A < 0$ et $B > 0$. Quand AB est positif, A et B sont de même signe et leur signe commun est celui de $A + B$.

Ce tableau montre donc que A est positif pour les valeurs de x supérieures à $+1$.

EXAMENS ET CONCOURS DE 1920 (*Suite*).

EXAMENS ORAUX des ÉCOLES NATIONALES D'ARTS ET MÉTIERS (*)

Arithmétique et Algèbre (*Suite*).

105. — Le plus grand commun diviseur de deux nombres est le même que celui de leur somme et de leur plus petit commun multiple.

106. — [**1210** (**)]. Trouver la vraie valeur de

$$y = \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$$

pour $x = 1$.

107. — [**1211**]. Résoudre l'équation

$$\sqrt{7x - 13} - \sqrt{3x - 19} = \sqrt{5x - 27}.$$

(*) Les questions posées à un même candidat sont comprises entre deux traits.

(**) Ce second numérotage ne porte que sur les questions dont nous avons l'intention de donner ici une solution. Ces questions seront résolues comme exercices; les abonnés ne devront pas en envoyer de solution.

108. — Calcul du plus grand commun diviseur de plusieurs nombres. Méthode à employer. Propriétés du plus grand commun diviseur.

109. — [**1212**]. Si deux nombres sont chacun une somme de deux carrés, leur produit est aussi une somme de deux carrés.

110. — Résoudre et discuter le système du 1er degré :

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c'.$$

---

111. — Somme des n premiers nombres entiers. Somme de leurs carrés. — Quel est le théorème d'arithmétique que démontre la 2e question? Démontrer directement ce théorème.

112. — Étant donnés les nombres $AA' + BB'$, $AB' + BA'$ (où $A > B$ et $A' > B'$, A, B, A', B' désignant des entiers) qui ont pour plus grand commun diviseur d, démontrer que les nombres $(A + B)(A' + B')$, $(A - B)(A' - B')$ admettent comme plus grand commun diviseur d.

113. — Équation de la droite passant par le point (a, b) et :
1° de coefficient angulaire m;
2° parallèle à la droite $Ax + By + C = 0$.

---

114. — Comment peut-on obtenir le quotient et le reste d'un polynome entier en x par $mx + p$?

115. — Énoncer et démontrer le théorème qui conduit à la recherche du plus petit commun multiple de plusieurs nombres sans se servir de la décomposition en facteurs premiers.

116. — Calculer la bissectrice de l'angle A d'un triangle connaissant les trois côtés :

$$a = 42^{m},28,$$
$$b = 37^{m},42,$$
$$c = 20^{m},76.$$

---

117. — Caractère général de divisibilité par 6. Caractère plus pratique de divisibilité par 6. Comment peut-on former le reste de la division d'un nombre par 6?

118. — [**1213**]. Résoudre l'inégalité

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} > \sqrt{2x-5}.$$

119. — *Calcul logarithmique.* — Calculer le rayon de base d'un cylindre connaissant la surface latérale et la hauteur.

$$S = 2^{m^2},728; \qquad h = 0^{m},597.$$

(*A suivre.*)

ÉCOLE COLONIALE D'AGRICULTURE DE TUNIS

Mathématiques.

I. — Plus grand commun diviseur. Théorie. Formation du plus grand commun diviseur de deux nombres. Formation du plus grand commun diviseur de plusieurs nombres.

II. — Tracer une circonférence tangente à une circonférence O en un point donné et tangente à une deuxième circonférence O'.

III. — **1214**. Trouver sur la demi-circonférence terminée par le diamètre AB un point C tel que menant les cordes CA, CB on ait $mCA + nCB = k$; m et n étant des nombres positifs donnés $(m > n)$ et k une longueur donnée.

Physique et Chimie.

I. — Loupe et microscope.

II. — Anhydride sulfureux : préparation, propriétés, usages.

Sciences naturelles.

I. — L'œil et la vision chez l'homme.

I. — Les graminées. Caractères généraux. Principales graminées utiles et nuisibles.

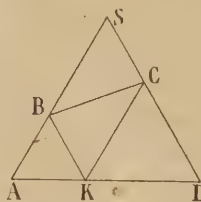
QUESTIONS PROPOSÉES

1215. — Trouver un nombre entier qui soit égal à mille fois sa racine cubique à l'unité près par défaut. (André Bal.)

1216. — Deux nombres étant liés par la relation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1,$$

1° entre quelles limites peut varier la quantité $x^2 + y^2$?
2° entre quelles limites peut varier le produit xy? (André Bal.)



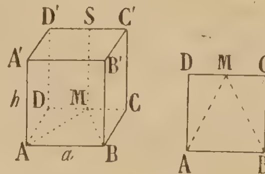
1217. — Un terrain ABCD est formé de trois parcelles : ABK, triangle équilatéral de côté a, CKD triangle équilatéral de côté b et BCK.

On demande d'évaluer en fonction de a et b le périmètre et la surface du quadrilatère ABCD.

Le propriétaire ayant fait l'acquisition de la parcelle SBC obtenue par le prolongement de AB et de CD, quels sont le périmètre et la surface de SAD?

(*B. S., Lozère, aspirants, mars* 1920.)

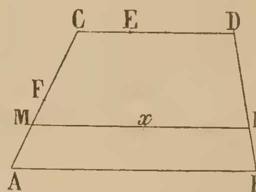
1218. — Une pièce de bois a la forme d'un parallélépipède de hauteur h et dont la base est un carré ABCD de côté a. On en détache la pyramide suivante :



La base est le triangle isocèle MAB dont les sommets sont les extrémités A et B du côté AB du carré ABCD et le milieu M du côté opposé; le sommet S de la pyramide est situé sur la perpendiculaire en M au plan du carré ABCD à une distance $SM = h$. Calculer :

1° l'aire du triangle AMB;
2° la longueur des arêtes latérales de la pyramide;
3° le volume de celle-ci;
4° l'aire de la section obtenue en la coupant par un plan parallèle à la base à une distance $\frac{h}{4}$ du sommet;
5° le volume du tronc de pyramide obtenu.

(*B. S., Loir-et-Cher, aspirants, mars* 1920.)



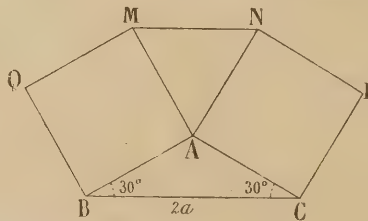
1219. — Soit un trapèze ABCD de bases $AB = b$, $CD = b'$ et de hauteur h. On demande de le partager en deux parties équivalentes :

1° par une droite passant par E, sur CD, tel que $CE = \frac{1}{3} CD$;

2° par une droite issue du milieu F du côté oblique AC;

3° par une droite MN parallèle aux bases. (On prendra $MN = x$ pour inconnue.)

(*B. S., Eure-et-Loir, aspirants, mars* 1920.)



1220. — On donne un triangle isocèle ABC où $BC = 2a$ et les angles égaux B et C valent 30°.

Sur les côtés AB et AC on construit des carrés.

1° Calculer MN en fonction de a.

2° Calculer la surface MNPCBQ en fonction de a.

Calcul numérique : $a = 5^{cm}$.

(*B. S., Loire-Inférieure, aspirants, mars* 1920.)

1221. — Soit AB un diamètre d'un cercle donné; on mène d'un même côté de ce diamètre deux rayons rectangulaires OP et OQ, soient PP' et QQ' les perpendiculaires abaissées de P et de Q sur AB et ω, ω' les centres des cercles inscrits dans les triangles OPP' et OQQ'.

1° Trouver les lieux décrits par ω et ω' quand P et Q se déplacent sur le cercle.

2° Montrer que $\omega\omega'$ reste parallèle à AB et que sa longueur est constante.

3° Trouver le lieu du point de rencontre M de $A\omega$ et de $B\omega'$.

4° Démontrer que $P\omega$ et $Q\omega'$ concourent en un point fixe C, que M est l'orthocentre du triangle PCQ et que les points P, Q, ω, ω' et O sont sur un cercle.

(A. Robba, lycée d'Oran.)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie Paul BRODARD.

23e Année. 15 Février 1921. No 10.

L'Éducation Mathématique

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

PRIX DU NUMÉRO : France et Colonies, 0 fr. 60. Étranger, 0 fr. 70.
ABONNEMENT ANNUEL : France et Colonies, 10 fr. Étranger, 12 fr.

Tous les abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, l'on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction : Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Abonnements : Librairie **Vuibert**, Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

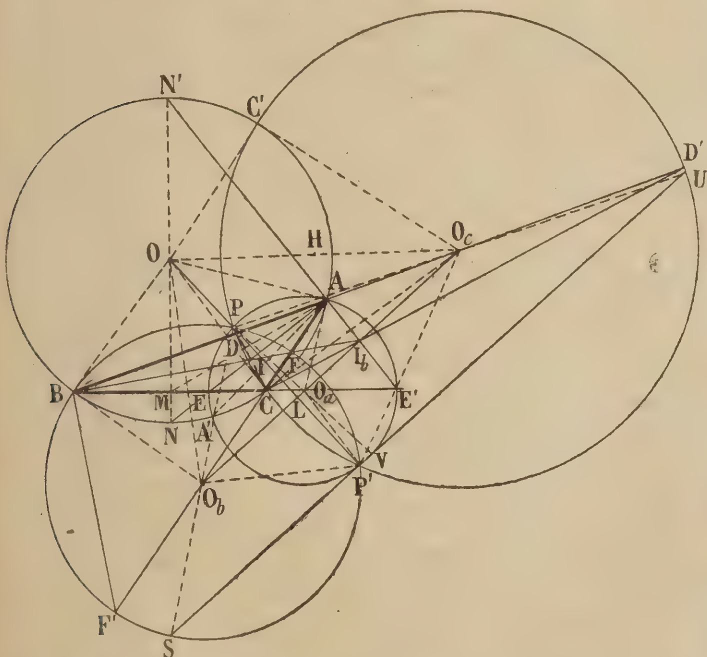
Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

SUR LES CERCLES D'APOLLONIUS D'UN TRIANGLE

(*Fin*)

par M. **A. Julou**,
Professeur à l'école primaire supérieure de Guingamp.

8° *Les circonférences ayant pour diamètres les distances du centre du cercle circonscrit à chacun des centres des cercles d'Apollonius passent par le sommet du triangle opposé au côté sur lequel se trouve le centre du cercle considéré et par le milieu de la corde d'Apollonius.* — D'après le 1°, le cercle circonscrit étant orthogonal à chacun des cercles d'Apollonius, $\widehat{O_cCO} = 1$ droit et la circonférence de diamètre OO_c passe par C. Elle passe aussi par L, milieu de la corde d'Apollonius, car $\widehat{OLO_c} = 1$ droit. Les trois circonférences de diamètres OO_c, OO_b et OO_a admettent donc comme corde commune OL qui, prolongée au delà de O et de L, est l'axe radical de ces trois cercles. On remarquera que les prolongements de OP' au delà de P' et de P'O au delà de O sont les axes radicaux des trois cercles d'Apollonius et des trois cercles tels que (H, HO), H désignant le milieu de OO_c.



Les distances OO_c, OO_a, OO_b sont faciles à calculer. Appliquons la relation de Pythagore aux triangles rectangles tels que OCO_c, nous obtenons

$$\overline{OO}_c^2 = R^2 + R_c^2. \tag{2}$$

En remplaçant R_c par sa valeur calculée précédemment en fonction de a, b, c, on pourrait exprimer OO_c en fonction des trois côtés.

On trouve, en substituant à R la valeur

$$\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

et à R_c, $\frac{abc}{a^2-b^2}$,

$$\overline{OO}_c^2 = \frac{a^2b^2c^2\left[(a^2-b^2)^2 + 16p(p-a)(p-b)(p-c)\right]}{16p(p-a)(p-b)(p-c)(a^2-b^2)^2}.$$

Remarques. — *a*) Les distances O_aO_c, O_bO_c, O_aO_b s'expriment simplement en fonction de R_a, R_b, R_c. Calculons O_aO_c par exemple. Le triangle O_aO_cP' donne, en appliquant la relation du carré du côté opposé à un angle de 60° dont le cosinus est $\frac{1}{2}$,

$$\left.\begin{aligned} &\overline{O_aO}_c^2 = R_a^2 + R_c^2 - R_aR_c. \\ \text{De même,}\quad &\overline{O_aO}_b^2 = R_a^2 + R_b^2 - R_aR_b, \\ \text{et}\quad &\overline{O_bO}_c^2 = R_b^2 + R_c^2 - R_bR_c. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Le lecteur pourra s'exercer à la vérification suivante : remplacer R_a, R_b et R_c par leurs valeurs en fonction de a, b, c; il trouvera, en particulier, la valeur exprimée au 7° en fonction des trois côtés pour O_cO_a.

b) Dans le triangle $O_bP'O_c$, $P'O_a$ est bissectrice de l'angle P' et on peut écrire

$$\frac{O_aO_c}{O_aO_b} = \frac{R_c}{R_b}.$$

D'autre part, le produit de deux côtés d'un triangle est égal au produit des segments déterminés sur le troisième côté par le pied de la bissectrice intérieure augmenté du carré de cette bissectrice. Donc

$$R_b \times R_c = R_a^2 + O_aO_b \times O_aO_c.$$

c) La première des égalités (3) montre que si on connaît R_a et R_c, on peut déterminer O_aO_c et par suite construire les deux triangles O_aO_cP', O_aO_cP ainsi que le point O_b.

De la relation des rayons d'Apollonius

$$\frac{1}{R_a} = \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c},$$

on tire

$$R_b = \frac{R_aR_c}{R_c - R_a}.$$

La relation (2) permet de construire le rayon du cercle circonscrit, puisque OO_c et R_c sont connus.

Applications. Constructions de triangles. — En s'appuyant sur les propositions ci-dessus, on peut construire un triangle connaissant quelques-uns des points ou droites remarquables de son plan dont il est parlé ci-dessus.

Exemple I. — *Construire un triangle connaissant deux des centres des cercles d'Apollonius, ainsi que le rayon de l'un d'eux et le rayon du cercle circonscrit.*

Données : O_a, O_c, R_c, R. — La première relation (3) donne la valeur de R_a. Les points O_c, O_a, P, P' peuvent être placés. On en déduit aussi a position de O_b, car $\widehat{O_aP'O_b} = 60°$. Les trois cercles d'Apollonius étant alors tracés, le centre du cercle circonscrit à ABC se trouve sur P'P et sur la circonférence $\left(O_c, \sqrt{R^2 + R_c^2}\right)$ (formule 2). L'intersection de la circonférence circonscrite et des circonférences d'Apollonius donne les trois sommets.

Exemple II. — *Construire un triangle connaissant le centre et le rayon du cercle circonscrit et les centres de deux cercles d'Apollonius.*

Données : R, O, O_a, O_c. *Construction.* — Placer le triangle OO_aO_c, tracer la circonférence (O, R). Les sommets C et A se trouvent à l'intersection de la circonférence circonscrite et des circonférences de diamètres OO_c, OO_a (8°). Tracer les circonférences (O_a), (O_c) qui donnent les points P et P'. Déterminer O_b comme dans l'exemple I. Décrire la circonférence (O_b) qui donne le troisième sommet B par son intersection avec la circonférence de diamètre OO_b.

Exemple III. — *Construire un triangle connaissant la corde d'Apollonius, le centre d'un cercle d'Apollonius ainsi que le rayon du cercle circonscrit.*

Données : P, P', O_a, R. *Construction.* — Tracer le triangle O_aPP', la circonférence (O_a), la perpendiculaire O_bO_c et les deux droites $P'O_c$, $P'O_b$ inclinées à 60° sur PP'. O_b et O_c étant connus, tracer les deux circonférences d'Apollonius de ces centres. La construction s'achève comme dans l'exemple I.

Exemple IV. — *Construire un triangle connaissant les centres de deux cercles d'Apollonius et le sommet opposé à l'un des côtés sur lequel se trouve l'un des centres connus.*

Données : O_cO_a, A. *Construction.* — Tracer le triangle de ces trois points : O_cO_aA; tracer la circonférence (O_a), puis les segments capables de 60° sur O_aO_c comme corde, ce qui donne P et P'. O se trouve à l'intersection de P'P et de la perpendiculaire AO à O_aA. La construction se termine facilement (voir exemple I).

Exemple V. — *Construire un triangle connaissant* O_a, O_c *et* O.

Construire le triangle O_aO_cO. Déterminer L, milieu de la corde d'Apollonius par l'intersection de la circonférence de diamètre OO_c et de la droite O_cO_a; tracer OL. Les points P et P' se trouvent sur OL sur les circonférences O_aO_cP', O_aO_cP ($\widehat{O_aPO_c} = 60° = \widehat{O_aO_cP'}$). On trace alors les trois circonférences d'Apollonius et la circonférence circonscrite. Leurs intersections donnent les trois sommets.

Exemple VI. — *Construire un triangle connaissant* R, R_a, R_c.

La formule (2) donne $OO_c = \sqrt{R^2 + R_c^2}$; on aurait de même

$$OO_a = \sqrt{R^2 + R_a^2}.$$

La première formule (3) fournit $O_aO_c = \sqrt{R_a^2 + R_c^2 - R_aR_c}$.

On connaît donc les trois côtés du triangle OO_cO_a et la question est ramenée à la précédente.

On voit combien féconde est l'étude des propriétés des cercles d'Apollonius pour la détermination d'un triangle par ses points remarquables. Le sujet est évidemment loin d'être épuisé et on peut se proposer ainsi un grand nombre d'exercices de constructions de triangles avec les données dont il est parlé dans cette note. L'étude des propriétés établies plus haut permettra souvent d'aboutir à une construction élémentaire, c'est-à-dire possible avec la règle et le compas.

Donnons un dernier exemple de construction.

Exemple VII. — *Construire un triangle connaissant un côté, le centre d'Apollonius situé sur ce côté ainsi que la longueur d'une bissectrice relative à ce côté.*

Données : a ; $l_a = AE$; O_a. — En remarquant que $O_aE = \sqrt{O_aB \times O_aC}$, on peut placer les points B, C, O_a, E, E'; on trace la circonférence (O_a) et la circonférence de centre E et de rayon l_a. L'intersection de ces deux circonférences donne le point A.

Remarque. — Pour déterminer la longueur de la corde d'Apollonius en fonction des trois côtés, il suffit de considérer le triangle O_aO_bP' où LP' est la hauteur relative à O_aO_b. Les trois côtés de ce triangle sont R_b, R_a et $\sqrt{R_a^2 + R_b^2 - R_aR_b}$.

En remplaçant ces rayons par leurs valeurs trouvées au 6° et en appliquant la formule $h = \frac{2}{O_aO_b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, où a, b et c désignent les trois côtés de O_aO_bP', on calcule LP' en fonction des trois côtés de ABC.

ARITHMÉTIQUE

4164. — *Trouver le plus petit multiple de 17 qui, divisé par 19 et par 101, donne des restes égaux.*

Soit A le nombre cherché, r le reste de la division par 19, qui est le même que le reste de la division par 101; r est inférieur à 19. Il faut que

$$A - r = h \times 19,$$
$$A - r = k \times 101,$$

h et k étant entiers. Or 101 et 19 sont premiers absolus; l'égalité $h.19 = k.101$ exige que h et k soient des équimultiples respectivement de 101 et de 19,

$$h = 101t, \qquad k = 19t,$$

donc

$$A - r = t.19 \times 101 = t \times 1\,919;$$

r est le reste de la division de A par 1 919, donc

$$t \times 1\,919 < A < (t+1)\,1\,919.$$

On obtiendra donc la plus petite valeur de A en donnant à t la plus petite valeur entière, qui est 1.

Si l'on prend $t = 1$, on voit que A est le multiple de 17 immédiatement supérieur à 1 919. Or $1\,919 = 113 \times 17 - 2$; le plus petit multiple de 17 supérieur à 1 919 est donc 1 921.

En effet :

$$1\,921 = 101 \times 19 + 2 = 113 \times 17.$$

(L. Soulier, à Sionac, Corrèze.)

Remarque. — M. M., à Guéret, observe, assez justement que l'énoncé supposait implicitement le nombre cherché supérieur à 17.

Sans cette restriction, 0 et 17 sont des nombres satisfaisant aux conditions :

1° d'être multiples de 17;

2° de donner, quand on les divise par 19 et par 101, le même reste (0 pour 0, 17 pour 17).

[Bonnes solutions de Mlle M. Marignac; MM. Ch. Andrei; A. Bal; M. Barny; A. Baune; E. Beaussire; G. Bénazet; A. Béreaux; L. Bisqué; A. Blaise; R. Bonhomme; J. Bonnet; A. Bordes; A. Bougrier; M. Boulvert; J. Briquet; J. Cartazou; Ch. Caussin; J.-E. Chantrelle; R. Chasselut; A. Chatelier; M. Chatelier; J. Cherpin; A. Cieutat; J. Clamens; R. Clément; M. Courboulay; Day; G. Démaret; J. Deportefaix; J. Devisme; M. Didier; A. Dubuc; P. Durand; A. F., à St-Pons; E. Faudou; A. Favard; L. Fiévet; H. Forait; Garandel; A. Goëlo; Y. Guézelle; E. Guicheney; Hambert; G. Jugain; G. Knoll; A. Laurent; E. Laborde; J. Lassave; E. Lebeuf; R. Legrand; Le Jan-Geffroy; Le Mouroux; G. Lenormand; M. Lhoumeau; L. Linemann; H.-C. Lotard-Doazan; G. Louon; F. Maitre; R. Marchant; Martin; E. Masdupuy; Y. Maurice; Ménéchal; H. Micard; J. Millour; F. Morvan; E. Mouzon; J. Navel; Ch. Norgelet; G. Olivier; C. Pagès; J. Périgault; J. Périn; E. Pinlong; M. Pommerolle; R. Renaud; R. Reynard; Roquet; A. Roy; Sagné; H. Sarda; J. Schilling; H. Sebban; A. T., à Blanzy; G. Tilly; G. Vimbert.]

4165. — *Trouver un nombre s'écrivant* $\overline{acba}$ *dans le système de base 10, sachant qu'il s'écrit* $\overline{abdba}$ *dans le système de base 6 (a, b, c, d désignant des chiffres tous différents et dont aucun n'est nul).*

Le nombre demandé A est la somme de

$$a.10^3 + c.10^2 + b.10 + a$$

unités, ou, quand on l'écrit dans le système de base 6, la somme de

$$a.6^4 + b.6^3 + d.6^2 + b.6 + a$$

unités; en égalant les deux valeurs de A, on a l'équation

$$1\,000a + 100c + 10b + a = 1\,296a + 216b + 36d + 6b + a,$$

qui, après réduction des termes semblables, devient

$$74a + 53b + 9d = 25c. \qquad (1)$$

Les nombres a, b, d sont entiers, non nuls et inférieurs à 6, c est inférieur à 10.

La plus petite valeur possible du premier membre est celle que l'on obtient en donnant à a, b et d les valeurs minima et en affectant aux plus forts coefficients les nombres les plus petits; puisque a, b et d sont différents, nous prendrons $a=1$, $b=2$, $d=3$; on trouve

$$74+2\times 53+3\times 9=207.$$

Il en résulte que $25c$ est au moins égal à 225 et par conséquent que c ne peut avoir d'autre valeur que 9. En donnant à c cette valeur, nous obtenons

$$74a+53b+9d=225. \qquad (2)$$

Le minimum absolu de $53b+9d$ est $53+18=71$ (pour $b=1$, $d=2$, ce qui entraîne $a \geqslant 3$). Il faut donc que $74a$ soit inférieur à $225-71=154$, ce qui montre que $a \leqslant 2$; la valeur 2 n'est pas acceptable, car le minimum de $53b+9d$ est alors

$$53+3\times 9=80 \qquad \text{et} \qquad 225-80=145,$$

qui est inférieur à 148; donc $a=1$. Il reste alors l'équation

$$53b+9d=151; \qquad (3)$$

on voit immédiatement que b ne peut dépasser 2. Comme on a déjà pris $a=1$, b ne peut plus recevoir d'autre valeur que 2. Alors

$$9d=151-106=45,$$

ce qui donne $d=5$, valeur acceptable, car elle est entière et inférieure à 6. Le nombre demandé est donc 1 921, qui s'écrit 12 521 dans le système de base 6.

(JACQUES DEVISME, à Paris.)

N. B. — Beaucoup de solutions seraient plus rapides, si leurs auteurs n'avaient jamais perdu de vue que les nombres a, b, c, d sont, d'après l'énoncé, différents les uns des autres, et supérieurs à zéro. La solution publiée, en se servant de cette inégalité, mène directement, sans aucun tâtonnement, au résultat cherché.

[Bonnnes solutions de MM. Barny; A. Baume; L. Bisqué; R. Chasselut; G. Estrabaut; A. F., à Saint-Pons; A. Favard; Y. Guézelle; J. Lassave; Le Jan Geffroy; M., à Guéret; F. Maître; R. Marchant; Martin; Ménéchal; H. Micard; J. Millour; F. Morvan; G. Mouzon; E. Paté; E. Pinlong; J. Schilling.

Assez bonnes solutions de MM. A. Authier; A. Bal; A Blaise; J. Bonnet; L. P. C.; Ch. Caussin; A. Cieutat; J. Clamens; G. Clément; M. Courboulay; C. Crépeau; G. Démaret; A. Dubuc; P. Durand; P. Faucheux; B. G., à Clermont; A. Goëlo; Hambert; G. Houalet; P. Louon; E. Masdupuy; Y. Maurice; G. Reynaud; C. Pagès; M. Pommerolle; H. Sebban; L. Soulier.]

ALGÈBRE

4137. — *Deux lingots* A *et* B, *composés d'alliages d'argent et de cuivre à des titres différents, ont respectivement pour volumes* 327cm³,18 *et* 137cm³,34; *le rapport de leurs titres est* $\frac{6}{7}$; *le rapport de leurs poids est* $\frac{7}{3}$. *Trouver les poids et les titres de ces deux lingots sachant que la densité de l'argent est* 10,5 *et celle du cuivre* 8,9.

N. B. — On établira tout d'abord que le poids d'argent contenu dans le premier lingot est le double du poids d'argent contenu dans le second lingot.

Les solutions purement algébriques sont admises.

(*B. S., Allier, aspirants, mars* 1920.)

Si p est le poids de métal fin contenu dans un lingot dont le titre est t et le poids P, on a, par définition du titre, $p=\mathrm{P}t$. Si p', t' et P$'$ sont les mêmes grandeurs relatives à un autre lingot, on a $p'=\mathrm{P}'t'$. Donc

$$\frac{p}{p'}=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'}\times\frac{t}{t'};$$

avec les données que fournit l'énoncé, on trouve

$$\frac{p}{p'}=\frac{7}{3}\times\frac{6}{7}=2.$$

Le poids d'argent que contient le premier lingot est double de celui que contient le second. Soit x ce dernier poids, appelons $7y$ le poids du premier lingot, $3y$ celui du second. Écrivons que les volumes des lingots sont respectivement 327cm³,18 et 137cm³,34 (en admettant que le volume d'un lingot est la somme des volumes d'argent et de cuivre dont il est formé), nous aurons les deux équations

$$\frac{2x}{10,5}+\frac{7y-2x}{8,9}=\frac{7y}{8,9}-2x\left(\frac{1}{8,9}-\frac{1}{10,5}\right)=327,18, \qquad (1)$$

$$\frac{x}{10,5}+\frac{3y-x}{8,9}=\frac{3y}{8,9}-x\left(\frac{1}{8,9}-\frac{1}{10,5}\right)=137,34. \qquad (2)$$

Doublons les deux termes de la seconde équation, puis retranchons de la première, il vient

$$\frac{y}{8,9}=52,5,$$

donc

$$y=467,25.$$

L'équation (2) fournit alors

$$x\frac{10,5-8,9}{10,5}=3y-137,34\times 8,9,$$

$$x=179,424\times\frac{10,5}{1,6}=1\,177,47,$$

$$2x=2\,354,94.$$

Le poids du premier lingot est

$$7y=3\,270,75;$$

celui du second,

$$3y=1\,401,75.$$

Enfin les titres sont

$$t=\frac{2\,354,94}{3\,270,75}=0,720,$$

$$t'=\frac{1\,177,47}{1\,401,75}=0,840.$$

(G. MOUZON, à Chasseneuil.)

[Bonnes solutions de Mlle A. Levifve; MM. A. Authier; Bonhomme; L. P. C., R. Cachia; J. Cartouzou; R. Chasselut; Chauvalon; A. Cieutat; M. Didier; A. Éparvier; A. Favard; A. F., à Saint-Pons; Godard; E. Guicheney; L. Guillet; G. Knoll; L. Linemann; S. Louon; R. Marchant; Ch. Mazure; Ménéchal; Ch. Norgelet; A. Ricoux; A. Robba; H. Sebban; L. Soulier; A. T., à Blanzy.]

4142. — *On considère trois équations du second degré :*

$$x^2-px+q=0,$$
$$x^2-p'x+q'=0,$$
$$x^2-p''x+q''=0,$$

telles que, la première ayant deux racines a et b, la seconde ait pour racines b et c et la troisième c et a (a, b et c étant trois nombres différents).

1° *Quelles relations doivent exister entre les six coefficients de ces trois équations?*

2° *Montrer que si p, p' et p'' sont donnés, on peut calculer q, q' et q''.*

3° *Appliquer au cas où* $p=3$, $p'=5$, $p''=9$. *Calculer les trois nombres a, b, c qui, associés deux à deux, donnent les racines des trois équations.*

1° Écrivons les relations qui existent entre les coefficients et les racines des trois équations considérées; nous obtenons ainsi le système

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{array}{l} a+b=p,\\ b+c=p',\\ c+a=p'',\end{array}\right. \qquad (\mathrm{I}')\left\{\begin{array}{l} ab=q,\\ bc=q',\\ ca=q'',\end{array}\right. \qquad (1)$$

de six équations, contenant seulement trois inconnues, a, b et c. En éliminant ces inconnues, il doit rester trois équations entre les coefficients. L'élimination se fait aisément, en résolvant le groupe d'équations (I) et en portant les valeurs trouvées pour a, b et c dans les équations (I').

Des équations (I) on tire

$$\begin{aligned} 2a &= p + p'' - p', \\ 2b &= p' + p - p'', \\ 2c &= p'' + p' - p, \end{aligned} \qquad (2)$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} 4q &= (p + p'' - p')(p' + p - p''), \\ 4q' &= (p' + p - p'')(p'' + p' - p), \\ 4q'' &= (p'' + p' - p)(p + p'' - p'). \end{aligned} \qquad (3)$$

Ce sont les relations demandées; elles sont indépendantes, car chacune d'elles contient une quantité qui ne figure pas dans les autres.

2° La forme même sous laquelle ces relations ont été obtenues montre que q, q' et q'' sont déterminés d'une façon unique si p, p' et p'' sont donnés. Les formules (3) donnent les valeurs de ces trois coefficients en fonction des trois premiers.

3° Dans l'application proposée

$$p + p'' - p' = 7, \qquad p' + p - p'' = -1, \qquad p'' + p' - p = 11,$$

il en résulte pour a, b et c les valeurs

$$a = \frac{7}{2}, \qquad b = -\frac{1}{2}, \qquad c = \frac{11}{2}$$

t pour q, q' et q'',

$$q = -\frac{7}{4}, \qquad q' = -\frac{11}{4}, \qquad q'' = +\frac{77}{4}.$$

(PAUL DUJOUX, à Velay-sur-Ouche.)

Autre façon d'éliminer les racines a, b et c. — On peut former le rapport

$$\frac{p}{q} = \frac{a+b}{ab} = \frac{(a+b)c}{abc} = \frac{ac+bc}{abc} = \frac{q''+q'}{abc};$$

on en déduit

$$\frac{q}{p}(q'+q'') = \frac{q'}{p'}(q+q'') = \frac{q''}{p''}(q'+q) = abc.$$

(GEORGES CAPUS, école pratique de Béziers.)

N. B. — Ces relations sont intéressantes, mais elles ne constituent pas le système complet des conditions que doivent vérifier les coefficients des équations, car elles ne forment que deux équations indépendantes de a, b et c.

Remarque. — Plusieurs correspondants ont éliminé d'une façon qui les a conduits à introduire des solutions étrangères de la seconde question (solutions que, d'ailleurs, plusieurs d'entre eux n'ont pas aperçues).

Ils ont tiré a, b et c des équations (I), en même temps que des équations (I') ils tiraient

$$a^2 = \frac{qq''}{q'}, \qquad b^2 = \frac{qq'}{q''}, \qquad c^2 = \frac{q'q''}{q};$$

ils ont éliminé alors a, b et c, en égalant les carrés, ce qui donne

$$4\frac{qq''}{q'} = (p + p'' - p')^2, \quad 4\frac{q'q}{q''} = (p' + p - p'')^2, \quad 4\frac{q'q''}{q} = (p'' + p' - p)^2,$$

mais si l'on veut calculer q, q' et q'' au moyen de ce système d'équations, on trouve

$$16\, q^2 = (p + p'' - p')^2 (p' + p - p'')^2,$$

et il semble que l'on puisse prendre pour q, q' et q'' des valeurs ayant le signe + ou le signe —, à la seule condition d'associer les signes de façon que le produit des valeurs $qq'q''$ soit positif.

Or trois de ces solutions sont étrangères, car la méthode suivie a montré que la solution est unique.

[Bonnes solutions de MM. Adelle; Arbey; P. Arnavon; A. Authier; G. Bruniquel; J. Calaviq; J. Cartouzou; Ch. Caussin; B. Charlos; Chauvalon; J. Clamens; G. Clément; M. Courboulay; J. Devisme; M. Didier; A. Dubuc; M. Ducros; A. F., à Saint-Pons; G. Février; Y. Guézelle; G. Houalet; M. Le Pinois; P. Louon; F. Maître; R. Marchant; Y. Maurice; M. Maury; Ch. Mazuro; R. Morel; R. P.; J.-H. Périchon; G. Pichon; R. Reynard; A. Ricoux; A. T., à Blanzy; A. Cieutat; Girardot; R. Lecas; L. P. C.; Ménéchal; A. Robba.

Assez bonnes solutions de MM. F. Baujard; P. Baylac; E. Delmas; G. Démaret; E. Guicheney; G. Knoll; G. Meynaud; G. Mouzon; Pierdet; G. Ponceau; H. Sebban; Geffroy-Le Jan; L. Linemann; E. Paté.]

4143. — *Résoudre l'équation*

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{x-10} = \sqrt{x+17} + \sqrt{x-15}.$$

Les deux membres de l'équation existent et sont positifs si $x \geqslant 15$; en égalant leurs carrés, on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} &x + 6 + x - 10 + 2\sqrt{(x+6)(x-10)} \\ &= x + 17 + x - 15 + 2\sqrt{(x+17)(x-15)}, \end{aligned}$$

qui, après réduction et simplification, devient

$$\sqrt{(x+17)(x-15)} + 3 = \sqrt{(x+6)(x-10)};$$

les deux membres étant encore positifs, l'élévation au carré n'introduit pas de solution étrangère et donne

$$x^2 + 2x - 17 \times 15 + 9 + 6\sqrt{(x+17)(x-15)} = x^2 - 4x - 60,$$

ou

$$6x - 186 + 6\sqrt{(x+17)(x-15)} = 0$$

et enfin, en divisant tous les termes par 6,

$$\sqrt{(x+17)(x-15)} = 31 - x;$$

l'égalité n'est possible que si $31 > x$. Cette hypothèse étant faite, écrivons que les carrés sont égaux; on obtient

$$x^2 + 2x - 255 = x^2 - 62x + 961,$$

ou

$$64x = 1\,216$$

et enfin

$$x = 19.$$

Cette valeur de x est supérieure à 15 et inférieure à 31; ce n'est donc pas une solution étrangère. Il est facile, mais il n'est aucunement nécessaire, de s'assurer qu'elle vérifie l'équation proposée. En effet,

$$\sqrt{19+6} = 5, \qquad \sqrt{19-10} = 3, \qquad \sqrt{19+17} = 6, \qquad \sqrt{19-15} = 2,$$

et l'on a bien

$$5 + 3 = 6 + 2.$$

(R. LUGAN, école professionnelle d'Ussel.)

N. B. — Bien que la résolution d'équations irrationnelles ait fait l'objet de plusieurs notes, et que nous y soyons revenus assez fréquemment à l'occasion de problèmes, beaucoup d'abonnés paraissent ignorer que les élévations au carré peuvent introduire des solutions étrangères, et d'autres, qu'on reconnaît les solutions étrangères par le sens de certaines égalités rationnelles et non en portant la racine à essayer dans le premier membre de l'équation.

[Bonnes solutions de Mlle A. Levifve; de MM. P. Arnavon; A. Authier; F. Baujard; A. Boyer; G. Bruniquel; J. Bugnard; J. Calaviq; Ch. Caussin; Chapelier; Chauvalon; M. Courboulay; A. F., à Saint-Pons; G. Février; Y. Guézelle; A. Guidat; E. Guicheney; A. Haudrechy; F. Lefèvre; L. Louis; M., à Guéret; F. Maître; R. Marchant; M. Maury; J. Moirez; G. Mouzon; J. Navel; R. P.; Pautras; G. Pichon; E. Pinlong; G. Ponceau; G. Remade; A. Ricoux; H. Aubert; V. Bourden; A. Cieutat; L. Gimbert; A. Guilhot; L. P. C.; M. Lecomte; Le Jan-Geffroy; L. Linemann; Ménéchal; Norgelet; A. Popu; A. Robba.

Assez bonnes solutions de MM. Adèle; Arbey; Beaufils; A. Bordes; L. Bordron; Bruneteau; R. Cachia; G. Capus; P. Carpentier; J. Cartouzou; A. Chatelier; G. Clément; C. Crépeau; G. Dautel; J. Devisme; M. Didier; A. Éparvier; G. Fauché; R. Gabori; A. Goëllo; M. Hambert; R. Hevouard; G. Houalet; G. Jugain; G. Knoll; M. Lamargue; M. Lhoumeau; P. Louon; J. Magnani; M. Maurel; Y. Maurice; R. Morel; G. N., à Bruxelles; J.-H. Périchon; R. Reynard; E. Richard, à Saint-Paul; F. Richard, à Nancy; Roquet; H. Sebban; R. Siberchicot; L. Soulier; A. T., à Blanzy; Ch. Vouilloux.]

4167. — *Un entrepreneur emprunte une somme de 100 000f, remboursable en 15 annuités égales, dont la première sera payée quand la sixième année après le jour de l'emprunt sera révolue. Quel sera le montant de chaque annuité, le taux d'intérêt étant 6 %?*

Posons $A = 100\,000$. La dette de l'entrepreneur au moment où il va payer la première annuité est $A(1{,}06)^6$; le versement de l'annuité la réduit à

$$D_1 = A(1{,}06)^6 - a;$$

cette dette, un an après, accrue de son intérêt est devenue $D_1(1{,}06)$, le versement de l'annuité a la réduit à

$$D_2 = D_1(1{,}06) - a = A(1{,}06)^7 - a(1{,}06) - a;$$

le calcul continue de la même façon; au bout de 15 ans, au moment où le dernier versement vient d'être fait, la dette est

$$D_{15} = A(1{,}06)^{20} - a(1{,}06)^{14} - a(1{,}06)^{13} \ldots - a(1{,}06) - a,$$

la somme des termes qui multiplient a est celle d'une progression géométrique; on peut l'exprimer au moyen de la formule, ce qui donne

$$D_{15} = A(1{,}06)^{20} - a\frac{(1{,}06)^{15} - 1}{1{,}06 - 1}.$$

Or, par hypothèse, le dernier versement annule exactement la dette, on a donc l'équation

$$a = A(1{,}06)^{20}\frac{0{,}06}{(1{,}06)^{15} - 1}.$$

Le calcul numérique peut être fait de deux façons suivant les tables dont on dispose. Les tables de logarithmes permettent de calculer $(1{,}06)^{20}$ et $(1{,}06)^{15}$ (le calcul de ces puissances pourrait être mené à terme sans les tables, mais il exigerait un travail assez long). Les autres opérations qu'il faut effectuer pour obtenir le résultat sont élémentaires et ne présentent aucune difficulté.

Calcul logarithmique.

$$\begin{aligned}
\log 1{,}06 &= 0{,}02531\\
20\log 1{,}06 &= 0{,}50620\\
\log 3{,}20700 &= 0{,}50610 \qquad (\delta = 13)\\
\text{pour } 70 &\qquad 9{,}1\\
— \quad 7 &\qquad 0{,}9
\end{aligned}$$

$(1{,}06)^{20} = 3{,}20777$

$$\begin{aligned}
\log 1{,}06 &= 0{,}02531\\
15\log 1{,}06 &= 0{,}37965\\
\log 2{,}39600 &= 0{,}37949\\
\text{pour } 90 &\qquad 16 \qquad (\delta = 18)
\end{aligned}$$

$(1{,}06)^{15} = 2{,}3969$; $\quad (1{,}06)^{15} - 1 = 1{,}3969.$

Il ne reste plus qu'à faire l'opération :

$$\frac{3{,}20777 \times 6\,000}{1{,}3969} = 13\,778{,}1.$$

L'annuité que doit verser l'entrepreneur est de 13 778f,10.

(C. Crépeau, à Sainte-Cécile, Vendée.)

Beaucoup d'ouvrages contiennent des tables d'intérêt et d'intérêt composé, qui réduisent à peu de chose le calcul qu'il faut effectuer.

Les petites tables à quatre décimales de Dupuis donnent, sous le titre : *Capital acquis après* 1, 2, 3, ... 60 *ans par un placement unique d'un franc à intérêt composé*, les valeurs de $(1 + r)^n$ pour les taux r, de 1 à 6 % compris, et pour $n = 1, 2, \ldots 60$. Elles donnent plus loin, sous le titre : *Capital acquis après* 1, 2, 3 ... 60 *ans par un placement* annuel *d'un franc à intérêt composé*, les valeurs de la quantité $(1 + r)\frac{(1 + r)^n - 1}{r}$.

On lit dans ces tables

$$(1{,}06)^{21} = 3{,}399564$$

et

$$1{,}06\frac{(1{,}06)^{15} - 1}{0{,}06} = 24{,}672528,$$

le quotient multiplié par 100 000 donne

$$100\,000 \times 1{,}06^{21}\frac{0{,}06}{1{,}06[(1{,}06)^{15} - 1]}$$
$$= a = 339\,956 : 24{,}672528 = 13\,778{,}42.$$

L'*Annuaire du Bureau des longitudes* donne des tables (année 1907, p. 640 et suivantes) pour l'intérêt et l'amortissement. On y trouve :

1° Les valeurs de $(1 + r)^n$;

2° Les valeurs de $\frac{(1 + r)^n - 1}{r}$,

qui permettent, par une simple division, de faire des calculs analogues à celui qui est proposé; mais elles ne peuvent servir dans le cas présent, parce que les taux considérés ne dépassent pas 5 %.

Les tables des valeurs de $(1{,}06)^n$ suffisent d'ailleurs pour faire le calcul simplement.

Les tables de Dupuis donnent

$$(1{,}06)^{20} = 3{,}207135,$$
$$(1{,}06)^{15} = 2{,}396558,$$

d'où l'on tire

$$a = 19\,242{,}81 : 1{,}396558$$
$$= 13\,778{,}74.$$

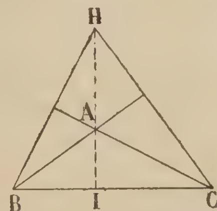
N. B. — Les réponses trouvées ne sont d'accord que jusqu'aux centimes : cela tient à ce qu'en multipliant par 20 et par 15 des logarithmes dont le cinquième chiffre décimal n'est pas sûr, on fait porter l'erreur sur le quatrième.

[Bonnes solutions de MM. Ch. Caussin, à Escarbotin; A. Cieutat, à Montivilliers; J. Devisme, à Paris; A. F., à St-Pons; G. Knoll, à Clermont-Ferrand; Le Jan-Geffroy; P. Louon, athénée d'Ixelles; R. Marchant, athénée d'Anvers; J. Millour, à Guingamp; R. Renaud, école normale de Varzy.]

GÉOMÉTRIE

3971. — *Construire un triangle, connaissant l'angle A et les segments BH et CH, compris entre les sommets de la base BC et le point de concours H des hauteurs.*

Supposons le problème résolu, soit ABC le triangle satisfaisant aux conditions données. Examinons d'abord le cas où l'angle A est *obtus*; les deux autres, B et C, sont aigus; les hauteurs BH et CH font avec BC des angles aigus, l'orthocentre H est du même côté de BC que A, l'angle BHC est aigu, c'est le supplément de A.



Si l'on connaît HB, HC et l'angle *obtus* A, on connaît l'angle *aigu* BHC; le triangle BHC, dont on connaît deux côtés et l'angle qu'ils comprennent, peut être construit, le sommet A est l'orthocentre du triangle BHC.

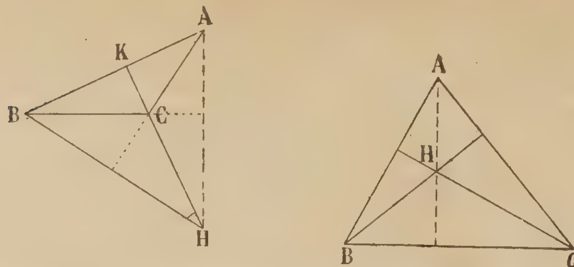
Le problème a toujours une solution *si* A *est obtus*.

Considérons maintenant le cas où A est aigu; deux hypothèses peuvent être faites :

a) *Le triangle n'a pas d'angle obtus*, alors les angles CBH et BCH étant aigus, le point H est du même côté de BC que le sommet A, l'angle BHC est le supplément de A, *il est obtus*.

On peut donc construire le triangle BHC, dont on connaît deux côtés et l'angle qu'ils comprennent. A est l'orthocentre de ce triangle.

b) *Le triangle* ABC *a un angle obtus* : supposons que ce soit C, alors l'orthocentre H est sur le prolongement de la hauteur KC,



du côté de C. Les points A et H sont de part et d'autre de BC et les angles en H et en A sont *égaux*.

On aura donc la solution en construisant le triangle BHC avec un angle H égal à A et les côtés donnés BH et CH et, *si ce triangle a un angle obtus* en B ou en C, le sommet A est l'orthocentre de BHC.

Dans le cas où A est aigu, il existe donc au moins une solution du problème (solution *a*); il peut en exister deux, si la construction *b*) s'applique.

Si A est droit, H coïncide avec A; le triangle BHC est rectangle, et les côtés de l'angle droit sont connus.

(Solution analogue : V. HERBIET, à Wavre, Belgique.)

N. B. — La plupart de nos correspondants n'ont pas aperçu la différence des cas : A aigu et A obtus. Ils ont ainsi passé, sans la voir, à côté de la discussion qui faisait tout l'intérêt du problème.

[Très bonnes solutions de MM. E. Loubet; Ch. Vouilloux.
Bonnes solutions de MM. E. Alais; A. Bernadac; Chauvalon; G. Girou; Guicheney; R. Joyeau; A. Roy.
Assez bonnes solutions de Mlles M. Bocquet; M. Malou; M. Marignac; MM. Ch. Andrei; P. Arbey; A. Arnaud; Aubert; R. Baron; P. Bauer; F. Baujard; Beaufils; G. Bonname; H. Bore; M. Boulvert; P. Boureille; J. Briquet; A. Brunet; G. Bruniquel; A. Burlot; L. P. C.; A. Cabarat; H. Calliéris; H. Cazes; G. Cellier; J. Chabaud; P. Chanussot; M. Chaynes; A. Cicutat; B. Clément; A. Collet; J. Condamin; A. Coton; R. Crépeau; J. Damian; E. Delmas; G. Démaret; B. Devaujany; A. Diximier; M. Duclay; E. Dufour; F. Dupire; A. F., à St-Pons; G. Fauché; M. Forcade; J. Foulon; R. Gasser; R. Gaucher; L. Godard; R. Godard; E. Gourmelen; Gouzerne-Patrik; J. Grall; Guende; M. Guérin; Guilly; Henrion; L. J., à Paris; G. Jugain; G. B.-L.; R. Lassellerie; Le Lan; Le Roux-Huon; N. Leroy; Lhôtelier; Linemann; M. Loiseau; Lovichi; R. Luce-Catinot; R. Marchal; M. Maury; J. Mauvenu; P. Michel; J. Millour; J. Pinelli; R. Monier; A. Morin; L. Mourlon; G. Mouzon; R. N.; H. Naudet; R. Olive; A. Pagot; L.-G. Papon; A. Pataud; R. Pavy; J. Périn; R. Petit; G. Pichon; J. Pinelli; M. Pommerolle; A. Prunetti; F. Petit; J. Renard; L. Renard; R. Renaud; R. Reynard; G. Rian; A. Roussel; J. Saliceti; F. Sauze; J. Schurb; L. Soulier; J. Tardieu; J. Terracher; E. Teurtroy; G. Vergnon; M. Vialle; G. Watiez.]

4048. — *Soit* ABCD *un tétraèdre dont les arêtes opposées sont deux à deux rectangulaires.*

1° *Les quatre droites, perpendiculaires respectivement aux quatre faces, élevées en leurs centres de gravité, concourent en un point* K.

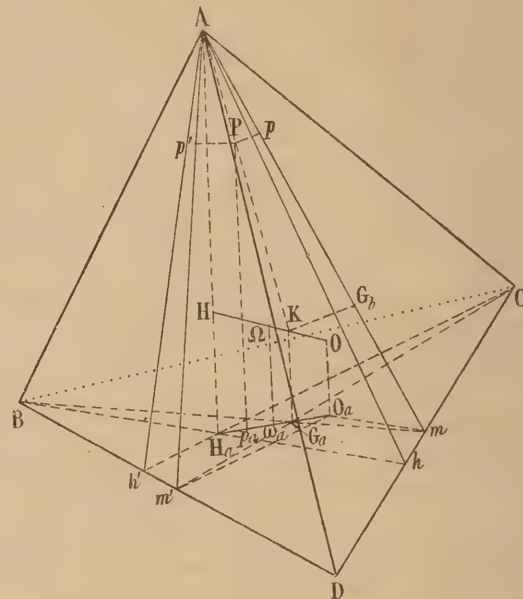
2° *Montrer que si l'on projette un point quelconque* P *d'une des droites telles que* AK, *joignant un sommet au point* K, *sur les faces, la sphère circonscrite au tétraèdre formé par les projections de* P *passe par le pied de la hauteur* AH_a *du tétraèdre* ABCD.

Les tétraèdres dont les arêtes opposées sont deux à deux rectangulaires ont des propriétés remarquables, que nous rappellerons brièvement (*).

Par chaque arête on peut mener un plan perpendiculaire à l'arête opposée (par AC, le plan $Ah'C$, perpendiculaire à BD, et par AB, le plan AhB, perpendiculaire à CD). L'intersection de deux de ces plans est une hauteur du tétraèdre (ainsi AH_a est perpendiculaire à la face BCD). Les hauteurs AH_a et BH_b, situées dans le même plan AhB, se rencontrent donc. Puisque chaque hauteur rencontre les trois autres et que trois hauteurs ne sont pas dans un même plan, il faut que les quatre hauteurs aient un point commun. Ainsi ces tétraèdres possèdent *un orthocentre* et, pour cette raison, sont appelés *tétraèdres orthocentriques*.

Il en résulte une autre conséquence, c'est que les cercles des neuf points de deux faces quelconques sont sur une même sphère; en effet, les cercles d'Euler des faces ADB et CDB ont en commun le point h' et le milieu m' de DB, ils sont donc sur une sphère Σ; mais cette sphère contient aussi le cercle d'Euler du triangle ACD, car elle passe par les points h, m et par le milieu du côté AD.

Donc les milieux des six arêtes et les six points dont chacun est l'intersection d'une arête avec le plan perpendiculaire mené



par l'arête opposée, sont sur une sphère (Σ), qui coupe chacune des faces suivant le cercle des neuf points de cette face.

Soit Ω le centre de (Σ), O le centre de la sphère (S) circonscrite au tétraèdre, H l'orthocentre; projetons ces points sur une face, BCD par exemple : O se projette au centre O_a du cercle BCD, H en H_a, orthocentre du triangle BCD, Ω en ω_a, centre du cercle d'Euler du même triangle. Or on sait que ω_a est un point de la droite H_aO_a et même qu'il en est le milieu.

On en conclut que les points, H, Ω et O sont en ligne droite et que Ω est le milieu de HO.

Mais si l'on appelle G_a le centre de gravité du triangle BCD, on sait que G_a est aussi un point de la droite $H_a\omega_aO_a$ et, de plus, que O_aG_a est le tiers de O_aH_a. Il en résulte que la perpendiculaire au plan BCD élevée en G_a coupe la droite OH en un point K, qui est au tiers de OH à partir de O. Comme on pourrait démontrer la même propriété pour la perpendiculaire à une autre face élevée en son centre de gravité, nous pouvons énoncer le théorème qui fait l'objet du § 1° :

Les quatre droites, respectivement perpendiculaires aux quatre faces, élevées en leurs centres de gravité, passent par un point K, qui est sur la droite joignant le centre O de la sphère circonscrite à l'orthocentre H, et au tiers de OH à partir de O.

2° Quand on projette sur le plan BCD, A se projette en H_a, K en G_a, donc P, point de AK, se projette en un point p_a de la droite $H_aG_aO_a$.

La projection de K sur un plan tel que ADC est le centre de

(*) Voir dans l'*Éducation mathématique* la note du n° 5 de la 10e année, et dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* la solution de la question 8666 (43e année, p. 152).

gravité G_b de la face ADC, donc P a pour projection un point p de la médiane AG_bm de cette face.

Les projections de P sur les faces qui passent au sommet A forment donc un triangle $pp'p''$, homothétique de $mm'm''$ par rapport à A, le rapport d'homothétie étant

$$\frac{Ap}{Am} = \frac{Ap}{AG_b} \times \frac{AG_b}{Am} = \frac{AP}{AK} \times \frac{2}{3}.$$

Or, si une sphère est coupée par deux plans parallèles, les centres des deux sections sont sur un diamètre perpendiculaire à la direction des plans sécants.

La sphère $p_app'p''$ passe par le point p_a; elle est donc coupée par le plan BCD suivant un cercle (γ) passant par p_a.

Nous allons montrer que le centre de (γ) est le milieu de H_ap_a; il en résultera, puisqu'il passe au point p_a, qu'il passe aussi en H_a.

Le centre de (γ) est, d'après la remarque précédemment faite, la projection sur le plan BCD du centre du cercle (E) déterminé par les trois points p, p' et p''. Pour projeter ce cercle (E) sur le plan BCD, on peut le transformer deux fois de suite par homothétie : d'abord par rapport à A, avec la raison $\frac{Am}{Ap}$, ce qui l'amène à coïncider avec le cercle $mm'm''$, qui est le cercle d'Euler du triangle BCD et place par conséquent le centre en ω_a; puis une seconde fois par rapport à H_a avec la raison inverse de la précédente, $\frac{Ap}{Am}$.

Le centre de (γ) est à une distance de H_a égale à

$$H_aI = H_a\omega_a \times \frac{Ap}{Am};$$

or on a vu que $\quad \frac{Ap}{Am} = \frac{2}{3}\frac{AP}{AK} = \frac{2}{3}\cdot\frac{H_ap_a}{H_aG_a},$

mais $\quad H_aG_a = \frac{2}{3}H_aO_a \quad$ et $\quad H_a\omega_a = \frac{1}{2}H_aO_a,$

d'où $\quad H_aG_a = \frac{4}{3}H_a\omega_a,$

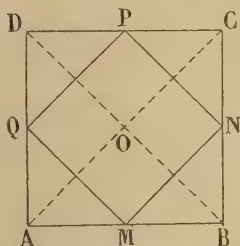
donc $\quad \frac{Ap}{Am} = \frac{1}{2}\frac{H_ap_a}{H_a\omega_a} \quad$ et $\quad H_aI = \frac{1}{2}H_ap_a.$

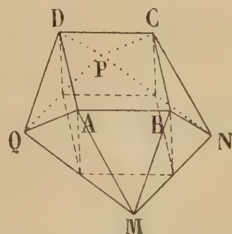
Le cercle (γ) a donc pour centre le milieu de H_ap_a, ce qui démontre bien le théorème.

(Solution analogue : M., à Guéret.)

[Bonnes solutions de MM. A. Bal, à Givors; G. Bruniquel, école normale de Toulouse; V. Herbiet, à Wavre; Regnault, école normale de Quimper.]

4169. — M, N, P, Q *sont les milieux des côtés du carré* ABCD *dont le côté est* $2c = 30^{cm}$. *On relève les triangles* AMQ, BNM, CPN,





DPQ *perpendiculairement au plan* MNPQ; *on détermine ainsi un solide qui a pour bases* MNPQ *et* ABCD, *et pour faces latérales les quatre triangles relevés et quatre triangles isocèles* ABM, BCN, CDP, DAQ. *Prouver que ces derniers sont équilatéraux, et calculer la surface latérale et le volume du solide déterminé (en le décomposant en un prisme central et quatre pyramides latérales égales.)*

(*B. S., Doubs, aspirants, mars* 1920.)

Pour la commodité du langage, imaginons que le carré MNPQ est dans un plan horizontal : quand les plans des triangles QAM, MBN, etc., sont relevés verticalement, ces triangles ayant des hauteurs égales, la ligne AB est horizontale, A se projette en a sur le plan MNPQ et B en b, la distance AB est égale à ab; or $ab = AM = MB = c$. Le triangle ABM de l'espace est donc équilatéral.

La surface latérale du solide est formée de quatre triangles équilatéraux égaux à ABM, dont la surface est $\frac{c\sqrt{3}}{4}$, et de quatre triangles rectangles isocèles, égaux à QAM : la somme de ces quatre triangles équivaut visiblement à celle du carré PQMN, qui est $2c^2$. La surface latérale demandée est donc $c^2(2+\sqrt{3})$.

Pour $c = 15$, on trouve $S = 839^{cm^2},7114$.

2° Le volume du solide contient d'abord le parallélépipède rectangle dont la base est le carré MNPQ et la hauteur $Aa = \frac{c}{\sqrt{2}}$; ce volume est $c^2 . \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c^3}{\sqrt{2}} = \frac{c^3\sqrt{2}}{2}$.

Il contient de plus quatre pyramides égales à M(AabB), qui a pour base le rectangle AabB de surface $c . \frac{c}{\sqrt{2}}$ et pour hauteur la distance de M à ab, qui est la moitié de MO, soit $\frac{1}{2}c$. Le volume de cette pyramide est $\frac{1}{3}\cdot\frac{c^3}{2\sqrt{2}}$; la somme des quatre pyramides égales est $\frac{2c^3}{3\sqrt{2}} = c^3\frac{\sqrt{2}}{3}$.

On trouve donc pour formule du volume total

$$\frac{c^3}{\sqrt{2}}\cdot\left(1+\frac{2}{3}\right) = \frac{5c^3}{3\sqrt{2}} = \frac{5}{6}c^3\sqrt{2};$$

l'application numérique donne $3\,977^{cm^3},4712$.

(Auguste Cieutat, à Montivilliers, Seine-Inférieure.)

Remarque. — Quelques correspondants ont appliqué la règle des trois niveaux, dite aussi « règle de Sarrus ». Cette application est intéressante.

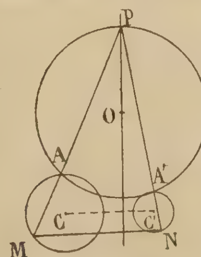
N. B. — Toutes les fois que le problème comporte un calcul numérique, nous relevons des résultats donnés avec trois ou quatre chiffres décimaux et dont le chiffre des unités n'est pas exact.

[Bonnes solutions de MM. G. Bénazet; A. Bougrier; J. Cartouzou; A. Chatelier; J. Clamens; P. Cuillier; A. F., à St-Pons; E. Faudou; H. Forait; E. Guicheney; A. Journet; E. Laborde; P. Louon; E. Masdupuy; Ménéchal; C. Noël; Ch. Norgelet; L.-G. Papon; L. Pascal; M. Pommerolle; A. T., à Blanzy; G. Vimbert.

Assez bonnes solutions de MM. Adelle; Ch. Andrei; A. Authier; P. Bauer; A. Bordes; V. Bourden; J. Briquet; J.-E. Chantrelle; J. Devisme; P. Dujoux; Farges; G. Fouché; Le Jan-Geffroy; G. Knoll; M. Laporte; L. Linemann; F. Maitre; Martin; Ch. Parès; E. Paté; M. St-Juvin.]

SOLUTION D'EXERCICE

4065. — *On donne deux circonférences* C *et* C′ *et leur axe radical. D'un point de cet axe radical comme centre, on décrit une circonférence* O, *qui coupe* C *et* C′ *aux points* A *et* A′. *On trace* PA, PA′, *qui coupent* C *et* C′ *en* M *et* N; *démontrer que* MN *est perpendiculaire à l'axe radical.*



Cette question est une application simple de l'inversion. Transformons la figure par inversion, en prenant P pour pôle, avec une puissance égale à celle de P par rapport aux deux cercles C et C′, car P étant sur l'axe radical on a

$$PA \times PM = PA' \times PN;$$

la circonférence PAA′ se change en une droite, qui est MN; cette droite est perpendiculaire au diamètre du cercle PAA′ passant par le pôle; or, par hypothèse, le diamètre passant par P est l'axe radical.

EXAMENS ET CONCOURS DE 1920 (*Suite.*)

EXAMENS ORAUX des ÉCOLES NATIONALES D'ARTS ET MÉTIERS (*).

Arithmétique et Algèbre (*Suite*).

120. — Définition des nombres premiers. Tout nombre premier avec les différents facteurs d'un produit est premier avec ce produit.

121. — Établir la règle de la formation du quotient d'un polynome entier en x par le binome $x-a$. Peut-on en déduire le reste? — Application : Diviser $2x^3-5x+8$ par $x-2$.

122. — Condition nécessaire et suffisante pour qu'un trinome du second degré conserve un signe constant quel que soit x. Déterminer m pour que le trinome $(m-1)x^2-2(m+1)x+4m>0$ soit toujours positif.

---

123. — Convertir une fraction irréductible en une fraction décimale égale. Comment obtient-on *a priori* le nombre des chiffres décimaux? Énoncer la règle.

124. — Déterminer m pour que les racines de l'équation

$$x^4-(3m+5)x^2+(m+1)^2=0$$

soient en progression arithmétique.

125. — *Calcul logarithmique.* — Trouver le rayon d'un secteur circulaire dont l'angle au centre est 18° 13' et la surface $2^{m2},545$.

---

126. — Définition d'une fraction décimale. Comment peut-on encore l'écrire? Expliquer sur quoi repose cette nouvelle écriture.

127. — [**1222**(**)]. Valeur de $y=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2(x-1)}}{\sqrt{x}-3}$ pour $x=3$.

128. — *Calcul logarithmique* : $x=\sqrt[5]{\frac{238,4^2}{2,6345^2}}$.

---

129. — Déterminer a et b pour que $\overline{2a45b}$ soit divisible par 72. Caractère de divisibilité par 8.

130. — Variations de forme et de signe du trinome du second degré.

131. — *Calcul logarithmique.* — Trouver un nombre entier x tel que le double de son logarithme décimal surpasse d'une unité le logarithme décimal de $x+\frac{11}{10}$.

---

132. — Plus petit commun multiple de deux nombres. Forme d'un multiple commun à deux nombres.

133. — Condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynome $F(x)$ soit divisible par le produit $(x-a)(x-b)(x-c)$. Généraliser. — Si m est le degré de $F(x)$, mettre le polynome sous forme remarquable. — Comment exprime-t-on qu'un polynome $F(x)$ est divisible par $(x-a)^2$?

134. — Rendre rationnel le dénominateur de l'expression

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}.$$

(*A suivre.*)

(*) Les questions posées à un même candidat sont comprises entre deux traits.

(**) Ce second numérotage ne porte que sur les questions dont nous avons l'intention de donner ici une solution. Ces questions seront résolues comme exercices; les abonnés ne devront pas en envoyer de solutions.

QUESTIONS PROPOSÉES

4223. — Les élèves d'une école de filles, pour remédier à la cherté de la vie, ont élevé, en 1919, des poules, des canards et des lapins. Ces animaux, achetés très jeunes, au printemps, ont été vendus à la fin de l'année. Le prix d'achat moyen a été de 10^f pour une poule, de 4^f pour un canard, de 2^f pour un lapin, et le prix de vente moyen a été de 18^f pour une poule, de 12^f pour un canard et de 13^f pour un lapin. — Les poules ont pondu 221 œufs, que les élèves ont vendus à raison de 10^f le 1/2 quarteron (13 œufs). — La basse-cour et les clapiers ont été installés par la municipalité sans frais pour l'école, et les animaux ont été nourris avec les résidus de la cuisine apportés par les élèves, mais l'école a dû acheter des provisions pour compléter la nourriture des poules et des canards, qui lui a coûté 5^f par poule et 1^f par canard. — Le bénéfice de l'élevage, versé par les élèves à l'association des pupilles de l'école publique, a été de 656^f.

La directrice de l'école a compté que si ses élèves avaient élevé deux fois moins de canards et deux fois plus de lapins elles auraient pu verser 944^f et que si elles avaient élevé deux fois plus de canards et deux fois moins de lapins le bénéfice n'aurait été que de 575^f. On demande combien l'école a élevé de poules, de canards et de lapins.

(*B. S., aspirantes, 1re session* 1920.)

4224. — Trouver un nombre de six chiffres, carré parfait, tel que les neuf chiffres avec lesquels le nombre et sa racine carrée s'écrivent, dans le système de base 10, soient tous différents, aucun n'étant zéro.

(V. Thébault, à Ernée.)

4225. — Résoudre l'équation

$$\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)(c-x)}+\sqrt{(c-x)(a-x)}=x.$$

(Paul Lovon, athénée d'Ixelles.)

4226. — Une personne place un capital de $150\,000^f$ au taux de 4,50 %. Quinze mois après, elle retire les 4/5 de ce capital pour souscrire à l'emprunt de la Paix, le surplus du capital restant placé aux conditions précédentes. On sait que 100^f de capital souscrits à l'emprunt de la Paix rapportent 5 % d'intérêt annuel et sont remboursés à 150^f par voie de tirage au sort. En supposant que ce remboursement ait lieu de la façon suivante : au bout de 5 ans pour le 1/3 du capital souscrit, de 10 ans pour le 1/4 de ce capital, de 15 ans pour le reste, et que les sommes retirées au bout de chacune des deux premières périodes (y compris la bonification due au remboursement, mais non compris les intérêts annuels) soient placées à ce moment au taux de 4 %, on demande à quel taux moyen cette personne a placé son capital de $150\,000^f$ pendant cette période de 16 ans 3 mois. La bonification due à l'emprunt est considérée comme un intérêt au capital souscrit.

(*B. S., Puy-de-Dôme, aspirantes, 1re session* 1920.)

4227. — Deux cyclistes parcourent une même piste circulaire. Ils partent en même temps d'un même point. L'un d'eux dépasse immédiatement l'autre et le rattrape 25 minutes $\frac{2}{7}$ après le départ.

Sachant que le moins rapide des deux cyclistes met 1 minute 11 secondes pour faire un tour de piste, on demande combien de temps met l'autre pour faire aussi un tour.

(*B. S., Grenoble, aspirantes, 1re session* 1920.)

4228. — Dans un cercle de rayon R, on inscrit un trapèze isocèle ABCD, dont l'une des diagonales AC fait avec la base AB un angle de 45° et avec le côté AD, un angle de 30°.

1° Évaluer les arcs sous-tendus par les côtés du trapèze et l'angle que forment entre elles ses diagonales.

2° Calculer les segments des deux diagonales, l'aire du trapèze ainsi que le rayon du cercle passant par les milieux des quatre côtés.

3° Calculer enfin l'aire de ce cercle et son rapport à celle du trapèze.

(*B. S., Lyon, aspirants, mars* 1920.)

4229. — Soit AB un diamètre d'un cercle fixe, Bx la tangente au point B. La tangente en un point M du cercle rencontre Bx en T; déterminer M de façon que l'arc BM et la tangente BT engendrent des aires égales en tournant autour de AB.

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie Paul BRODARD.

23e Année. 1er Mars 1921. No 11.

L'Éducation Mathématique

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

PRIX DU NUMÉRO : France et Colonies, 0 fr. 60. Étranger, 0 fr. 70.
ABONNEMENT ANNUEL : France et Colonies, 10 fr. Étranger, 12 fr.

Tous les abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, l'on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction : Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Abonnements : Librairie **Vuibert**, Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

INSTITUT CATHOLIQUE D'ARTS ET MÉTIERS DE LILLE

Concours de 1920.

4151. — *Les caves d'une usine ont une superficie de* $653^{m^2},4$; *l'eau y monte de* $0^m,05$ *par heure, calculer en chevaux-vapeur la force motrice nécessaire pour maintenir ces caves à sec sachant que l'eau doit être refoulée dans un réservoir situé à une hauteur de* 15^m *au-dessus du niveau des caves, que les pompes fonctionnent sans arrêt et ont un rendement de* 60,5 % *de leur force motrice.*

Quand un accident survient au groupe d'épuisement, il faut 3^h *pour mettre en route un groupe de secours (rendement* 60,5 %*); calculer la force supplémentaire qu'il faudra employer pour que* 2^h *après la mise en marche du groupe de secours les caves soient de nouveau à sec.*

L'eau refoulée sert à l'alimentation de l'usine, dont la consommation par heure est exactement égale au débit des pompes; le réservoir étant cubique, calculer à 1^{cm} *près quelle doit être son arête pour que la marche de l'usine ne soit pas interrompue pendant les* 3^h *nécessaires à la mise en route du groupe de secours. On supposera le réservoir rempli au moment de l'accident. On sait que le cheval-vapeur est une force capable d'élever* 75^{kg} *à* 1^m *de hauteur en 1 seconde.*

1° Le volume d'eau qui s'infiltre en une heure est, en mètres cubes, $653,4 \times 0,05 = 32,67$; pour remonter $32\,670^l$ à 15^m de hauteur, il faut dépenser $32\,670 \times 15$ kilogrammètres, ce qui fait, par seconde, $\frac{32\,670 \times 15}{3\,600}$ kilogrammètres, et, en chevaux-vapeur,

$$\frac{32\,670}{3\,600} \times \frac{15}{75} = 1,815.$$

La puissance des moteurs doit être plus grande, puisque le rendement n'est que 0,605; cette puissance est

$$1,815 : 0,605 = 3 \text{ chevaux}.$$

La puissance nécessaire est donc de 3 chevaux-vapeur.

2° Le groupe de secours devra avoir épuisé en 2^h toute l'eau qui a pénétré pendant 5^h; sa puissance, puisque le rendement est le même que celui du groupe en service ordinaire, est égale à la fraction $\frac{5}{2}$ de celle de ce dernier groupe, soit

$$3 \times \frac{5}{2} = 7^{ch},5.$$

La puissance supplémentaire est donc $4^{ch},5$.

3° Le réservoir doit contenir un cube d'eau égal à celui qui pénètre dans la cave en 3 heures, soit $3 \times 32,67 = 98^{m^3},01$. Le cube dont le volume est 98,01 a pour arête la racine cubique de 98,01.

Calcul logarithmique :

$$\log 98,01 = 1,99127$$
$$\frac{1}{3}\log 98,01 = 0,66376$$
$$\log 4,610 = 0,66370$$
$$6 \qquad\qquad 6 \qquad (\Delta = 10)$$

l'arête du cube a $4^m,616$ de longueur.

(Georges Vimbert, à Auchel, Pas-de-Calais.)

Remarque. — Pour simplifier, et parce que la différence de niveau de 0,15 est peu importante à côté de 15^m, on pouvait calculer le travail comme si toute l'eau était amenée de la cote 0 à la cote 15.

Cela n'est pas tout à fait exact, et la différence est encore bien plus forte si le réservoir supérieur a la forme d'un cube : le niveau du fond est de $4^m,616$ inférieur à celui de la face supérieure.

N. B. — Plusieurs de nos correspondants n'ont pas compris ce que l'énoncé entendait par *puissance supplémentaire*, et ont donné comme réponse 7,5. La réponse paraît être 4,5; c'est la puissance dont il faut disposer en plus de la puissance normale, pour ramener l'eau au niveau zéro, en deux heures.

Quelques solutions évaluent, à tort, la puissance en chevaux *par seconde* : un cheval-vapeur, c'est 75 kilogrammètres par seconde; n chevaux-vapeur pendant p secondes, ce n'est plus une puissance mais de nouveau un travail.

[Bonnes solutions : Mlle M. Bourreau; MM. P. Arbey; J. Barbot; M. Barny; M. Boulvert; R. Cachia; Ch. Caussin; R. Chasselut; A. Chatelier; M. Chatelier; C. Crépeau; G. Démaret; M. Didier; P. Dujoux; G. Février; Ch. Feyrabend; F. Gilly; L. Gilton; A. Goelo; F. Guicheney; R. Hacquin; G. Knoll; R. Laporte; R. Lecas; P. Louon; R. Marchant; J. Moirez; J. Patas; E. Paté; J. Périn; A. Robba; M. Sator; J. Schilling; L. Simon.

Assez bonnes solutions : MM. Geffroy-Le Jan; H. Le Lan; F. Lefèvre; L.-G. Papon; Ch. Parès.]

4152. — *Trouver deux nombres sachant que leur somme est* 581 *et que le quotient de leur plus petit commun multiple par leur plus grand commun diviseur est* 240.

D étant le plus grand commun diviseur de a et de b, on a

$$a = a'D \qquad \text{et} \qquad b = b'D,$$

a' et b' sont premiers entre eux.

Le plus petit commun multiple de a et b est égal à l'un des produits ab', ou ba', ou $a'b'D$. Le plus petit commun multiple est donc divisible par le plus grand commun diviseur, le quotient est $a'b'$. Il faut donc décomposer 240 en un produit de deux facteurs, *premiers entre eux*. Or on a

$$240 = 2^4.3.5.$$

Les décompositions en facteurs *premiers entre eux* se forment en laissant les facteurs 2^4 dans le même terme du produit : on a ainsi quatre décompositions :

1×240,	$a' = 1$,	$b' = 240$,	$a' + b' = 241$,
$2^4 \times (3.5)$,	$a' = 16$,	$b' = 15$,	$a' + b' = 31$,
$(2^4.3) \times 5$,	$a' = 48$,	$b' = 5$,	$a' + b' = 53$,
$(2^4.5) \times 3$,	$a' = 80$,	$b' = 3$,	$a' + b' = 83$.

Il faut encore que $581 = a + b = (a' + b')\mathrm{D}$, cela exige que $a' + b'$, qui est supérieur à l'unité, soit un diviseur de 581. En décomposant 581 en facteurs premiers, on trouve $581 = 7 \times 83$. La seule solution est donc $a' + b' = 83$, avec $\mathrm{D} = 7$, ce qui donne les deux nombres $a = 7 \times 80 = 560$ et $b = 7 \times 3 = 21$. Il est évident que l'on peut permuter a et b, les deux nombres jouant le même rôle.

(Henri SEBBAN, à Batna, Constantine.)

Autre solution. — Soient m le p. p. c. m. et D le p. g. c. d. des deux nombres, a' et b' leurs quotients par D; on sait que

$$m = \mathrm{D}a'b', \qquad \text{donc} \qquad \frac{m}{\mathrm{D}} = a'b' = 240;$$

d'autre part, $a + b = \mathrm{D}(a' + b') = 581$.

Les nombres a' et b' sont donc racines de l'équation

$$\mathrm{X}^2 - \frac{581}{\mathrm{D}}\mathrm{X} + 240 = 0.$$

Il faut que cette équation ait pour racines deux entiers (qui, de plus, doivent être premiers entre eux), ceci exige que D soit un diviseur de 581, ensuite que

$$\overline{581}^2 - 960\mathrm{D}^2 > 0,$$

d'où $\mathrm{D} < 19$. Les diviseurs de 581 sont 1, 7, 83, 581. Si l'on prend $\mathrm{D} = 1$, l'équation n'a pas de racines rationnelles, mais pour $\mathrm{D} = 7$, on a $\mathrm{X}^2 - 83\mathrm{X} + 240 = 0$, dont les racines sont 3 et 80, d'où $a = 560$, $b = 21$.

(G. KNOLL, à Clermont-Ferrand.)

[Bonnes solutions : Mlles A. Levifve ; M. Marignac ; MM. Adelle ; Ch. Andrei ; P. Arbey ; L. Bisqué ; J. Barbot ; P. Baylac ; A. Blaise ; J. Briquet ; J. Bugnard ; R. Cachia ; Ch. Caussin ; J. Chambost ; R. Chasselut ; Chaumont ; Chauvalon ; A. Cieutat ; E. Delmas ; G. Démaret ; M. Didier ; A. Duval ; F. Gilly ; E. Faurès ; G. Février ; Geffroy-Le Jan ; L. Giltou ; E. Guicheney ; R. Hacquin ; R. Henry ; V. Herbiet ; J. Lassave ; R. Lecas ; R. Legrand ; H. Le Lan ; L. Linémann ; R. Marchant ; Y. Maurice ; Ménéchal ; G. Meynaud ; J. Millour ; J. Moirez ; J. Patat ; E. Paté ; J. Périgault ; J. Périn ; E. Pinlong ; A. Popu ; R. Renaud ; R. Reynard ; G. Rian ; Roquet ; M. Sator ; J. Steur ; A. T., à Blanzy ; G. Thiébaux ; G. Vimbert.

Assez bonnes solutions : MM. M. Chatelier ; A. Goelo ; F. Lefèvre ; H.-C. Lotard ; P. Louon ; F. Morvan ; Ch. Norgelet ; G. Olivier ; L. Thaon.

4153. — *Résoudre et discuter le système*

$$(m - 2)x - (m + 1)y = 3, \tag{1}$$

$$\frac{x - y}{3} = \frac{(m + 2)(m - 1)}{(m - 2)(m + 1)}, \tag{2}$$

m variant de $-\infty$ à $+\infty$, étudier les variations de signe de x et de y.

La première équation peut s'écrire

$$m(x - y) - 2(x - y) = 3y + 3,$$

ou

$$3y + 3 = (m - 2)(x - y),$$

ce qui donne, en remplaçant $x - y$ par la valeur que fournit l'équation (2),

$$y + 1 = \frac{(m - 2)(m + 2)(m - 1)}{(m - 2)(m + 1)}. \tag{3}$$

De même, on peut mettre la première équation sous la forme

$$m(x - y) + x - y = 3x + 3,$$

d'où

$$3x + 3 = (m + 1)(x - y),$$

ce qui donne

$$x + 1 = \frac{(m + 1)(m + 2)(m - 1)}{(m - 2)(m + 1)}. \tag{4}$$

Nous supposerons $m \neq 2$ et $m \neq -1$, pour que le second membre de l'équation (2) ait une valeur déterminée. On peut alors simplifier les expressions (3) et (4), en divisant les deux termes de chaque fraction par un même facteur. On trouve ainsi, après réduction,

$$x = \frac{m^2}{m - 2}; \qquad y = \frac{m^2 - 3}{m + 1}; \tag{5}$$

cela donne le tableau suivant :

m	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		$+\sqrt{3}$		2		$+\infty$
x	$-\infty$	$-$		$-$	$-\frac{1}{3}$	$-$	0	$-$			$-\infty$ ǀ $+$	$+$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$ ǀ $-$		-3	$-$	0	$+$	$+\frac{1}{3}$	$+$	$+\infty$

En résumé, x s'annule pour $m = 0$, mais sans changer de signe.

Quand	$m < -\sqrt{3}$	x et y sont négatifs,
—	$-1 < m < +\sqrt{3}$	— —
—	$-\sqrt{3} < m < -1$	x est négatif, y positif,
—	$+\sqrt{3} < m < 2$	— —
	$2 < m$	x et y sont positifs.

(Roger HACQUIN, école professionnelle de Bar-sur-Seine.)

[Bonnes solutions : Mlles A. Levifve ; M. Marignac ; MM. P. Baylac ; G. Bruniquel ; Ch. Caussin ; Chauvalon ; A. Cieutat ; C. Crépeau ; Dougados ; Geffroy-Le Jan ; F. Gilly ; L. Giltou ; E. Guicheney ; Herbiet ; J. Lassave ; Le Pinois ; H.-C. Lotard ; P. Louon ; R. Marchant ; Y. Maurice ; Ch. Mazure ; Ménéchal ; G. Meynaud ; J. Millour ; J. Moirez ; A. Moreau ; G. Olivier ; R. P. ; E. Paté ; J. Périgault ; A. Popu ; R. Reynard ; A. Robba ; J. Schilling ; H. Sebban ; L. Soulier ; A. Terrier ; L. Thaon.

Assez bonnes solutions : MM. Arbey ; J. Bugnard ; A. Chatelier.]

4154. — *Résoudre et discuter le système*

$$x + y + z = 2,$$
$$x^2 + y^2 = z^2,$$
$$m(x + y) = xy.$$

La troisième équation s'écrit

$$2m(x + y) = (x + y)^2 - (x^2 + y^2);$$

en remplaçant $x + y$ et $x^2 + y^2$ par les valeurs tirées des deux premières équations en fonction de z, on forme l'équation en z

$$2m(2 - z) = (2 - z)^2 - z^2,$$

qui se réduit au premier degré :

$$z(m - 2) = 2(m - 1). \tag{1}$$

Supposons d'abord $m \neq 2$; nous en tirons $z = 2\dfrac{m - 1}{m - 2}$; x et y sont alors les racines de l'équation

$$\mathrm{X}^2 - (2 - z)\mathrm{X} + m(2 - z) = 0 \tag{2}$$

ou

$$(m - 2)\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} - 2m = 0;$$

ces racines existent, si

$$(2 - z)^2 - 4m(2 - z) \geqslant 0, \qquad \text{ou} \qquad 1 + 2m(m - 2) \geqslant 0,$$

ce qui donne une inégalité du second degré en m

$$2m^2 - 4m + 1 \geqslant 0.$$

Ce trinome est positif pour les valeurs de m extérieures à l'intervalle des racines,

$$m \geqslant \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

ou

$$m \leqslant \frac{2 - \sqrt{2}}{2}.$$

La solution du système est alors donnée par les formules

$$x = \frac{-1 + \sqrt{2m^2 - 4m + 1}}{m - 2},$$

$$y = \frac{-1 - \sqrt{2m^2 - 4m + 1}}{m - 2},$$

$$z = 2\frac{m-1}{m-2};$$

on peut permuter les valeurs trouvées pour x et pour y.

Si $m = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ou $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, on obtiendra pour x et y deux valeurs égales, $2+\sqrt{2}$ dans le premier cas, $-\sqrt{2}$ dans l'autre, avec $z = -2(1 \pm \sqrt{2})$.

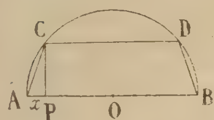
Enfin, si $m = 2$, le système est impossible, puisqu'il n'existe pas de valeur de z vérifiant l'équation (1).

(MÉNÉCHAL.)

[Bonnes solutions : Mlle A. Levifve; MM. P. Arbey; P. Baylac; G. Bruniquel; Ch. Caussin; Chauvalon; A. Cieutat; C. Crépeau; E. Delmas; G. Démaret; J. Dougados; Geffroy-Le Jan; Gilly; L. Giltou; Herbiet; J. Lassave; Le Pinois; H.-C. Lotard-Doazan; P. Louon; R. Marc; R. Marchant; G. Meynaud; J. Millour; J. Moirez; A. Monjallon; A. Moreau; A. Popu; A. Robba; H. Sebban; L. Soulier; A. Terrier; L. Thaon; R. Weinzaepfel.

Assez bonnes solutions : MM. R. Hacquin; Olivier; R. P.]

4155. — *On donne une demi-circonférence de centre* O *et de diamètre* AB = 2R *et l'on demande de trouver entre* A *et* O *un point* P *tel qu'en élevant en* P *la perpendiculaire* PC *à* AB *et en menant de* C *la parallèle* CD *à* AB, *on détermine un trapèze* ACDB *dont le périmètre soit égal à* 2R + 2p.



On posera AP = x. *Discussion.*

On voit que $CD = 2R - 2x$, et que $AC = \sqrt{2Rx}$.

Le périmètre du trapèze est $2AC + CD + 2R$; l'équation à résoudre est donc

$$2R + 2(R - x) + 2\sqrt{2Rx} = 2R + 2p,$$

ou, après simplification,

$$x - \sqrt{2Rx} + p - R = 0\,(^*). \qquad (1)$$

Pour résoudre cette équation irrationnelle, isolons le radical et élevons au carré, après avoir posé $x \geqslant R - p$; nous obtenons l'équation

$$f(x) \equiv (x + p - R)^2 - 2Rx = 0 \qquad (2)$$

ou

$$f(x) \equiv x^2 + 2x(p - 2R) + (p - R)^2 = 0. \qquad (2')$$

Toute valeur de x qui vérifie cette équation rend $2Rx$ égal à un carré, donc positif. Il est donc inutile de poser ou du moins de discuter la condition $x \geqslant 0$, qui est remplie. Mais nous avons posé $x > R - p$; or, d'après l'énoncé, $AC + CD + DB = 2p$, or

$$AC + CD + DB \geqslant AB.$$

Il faut donc supposer que l'on s'est donné $p \geqslant R$. Le nombre $R - p$ étant alors négatif, la condition précédente est vérifiée.

Il reste seulement à chercher si l'équation (2') a des racines, et combien de ces racines sont inférieures à R; cette dernière condition étant nécessaire pour que CD soit positif.

(*) Conformément à l'énoncé, nous continuons le calcul en gardant l'inconnue x; la forme de l'équation (1) aurait suggéré de prendre pour inconnue $\sqrt{2Rx} = AC$, qui donne une équation rationnelle :

$$\frac{1}{2R}\overline{AC}^2 - AC + p - R = 0$$

ou

$$(AC - R)^2 = (3R - 2p)R.$$

Quantité sous le radical

$$(p - 2R)^2 - (p - R)^2 = (p - 2R + p - R)(p - 2R - p + R)$$
$$= -R(2p - 3R).$$

Pour que l'équation (2) ait des racines, il faut donc que $p < \frac{3R}{2}$. Le maximum du contour ACDB est donc 3R; il est atteint quand $x = \frac{R}{2}$; le contour est alors la moitié de l'hexagone régulier inscrit.

Formons $f(R)$:

$$f(R) = p^2 - 2R^2 = (p - R\sqrt{2})(p + R\sqrt{2});$$

cette expression a le signe de $p - R\sqrt{2}$; si $p < R\sqrt{2}$, l'ordre des racines est $0 < x' < R < x''$; la racine x' donne la solution unique. Si $R\sqrt{2} < p < \frac{3R}{2}$, $\left(\text{ce qui est possible, car } \frac{3}{2} > \sqrt{2}\right)$, l'ordre des racines est $0 < x' < x'' < R$, car la demi-somme $2R - p$ est positive et inférieure à R. Dans ce cas, il y a deux solutions.

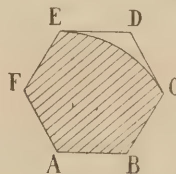
(Robert WEINZAEPFEL, à Soultz, Haut-Rhin.)

Remarque. — Il est plus naturel et plus logique de classer les valeurs de p par rapport à R, que celles de R par rapport à p, comme l'ont fait quelques correspondants. Très peu ont pensé à poser la condition qui exprime que l'équation rationnelle résolue est équivalente à l'équation irrationnelle donnée.

[Bonnes solutions : MM. P. Arbey; P. Baylac; G. Bruniquel; J. Bugnard; Ch. Caussin; R. Chasselut; A. Cieutat; C. Crépeau; G. Démaret; J. Dougados; P. Faucheux; G. Février; Geffroy-Le Jan; F. Gilly; L. Giltou; E. Guicheney; R. Hacquin; J. Lassave; P. Louon; R. Marchant; Ménéchal; J. Millour; R. P.; J. Patat; Philizot; M. Pichereau; R. Reynard; A. Robba; M. Saint-Juvin; L. Soulier; G. Thiébaux.

Assez bonnes solutions : MM. J. Dugas; R. Henry; G. Knoll; J. Mazeau; G. Meynaud; J. Moirez; A. Moreau; G. Rian.]

4156. — *On donne un hexagone régulier* ABCDEF *de côté* a. *De* A *comme centre avec* AC *pour rayon on décrit l'arc* CE; *on fait tourner la figure autour de* AB *et l'on demande de calculer :*



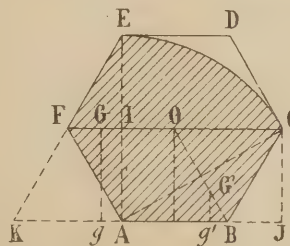
1° la surface engendrée par le contour mixtiligne ABCEFA;

2° le volume engendré par la surface ABCEFA.

1° Calcul de la surface engendrée : l'arc EC engendre une zone, appartenant à une sphère de centre A, de rayon $AE = a\sqrt{3}$, dont la hauteur est $AJ = CI = \frac{3}{2}a$. La surface de cette zone est

$$S_1 = 2\pi a\sqrt{3} \times \frac{3}{2}a = \pi a^2 3\sqrt{3}.$$

Les droites AF et BC engendrent des cônes égaux, la surface de l'un d'eux est



$$S_2 = \pi BC \times CJ = \pi a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Enfin FE engendre un tronc de cône, dont la surface est :

$$S_3 = \pi FE(AI + AE)$$
$$= \pi a \times a\sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\pi a^2 3\sqrt{3}.$$

(On remarquera que c'est la moitié de celle qu'engendre l'arc EC). La somme de ces surfaces est

$$S_1 + 2S_2 + S_3 = \pi a^2\sqrt{3}\left(3 + 1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{11}{2}\pi a^2\sqrt{3}.$$

2° Nous regardons le volume comme la somme des volumes

engendrés par le secteur EAC (secteur sphérique), par le triangle AFE et par le triangle CAB.

Pour ces deux triangles, nous prendrons comme mesure du volume le produit de l'aire du triangle par la longueur de la circonférence décrite par le centre de gravité.

Secteur sphérique : produit de l'aire de la zone qu'engendre l'arc EC par le tiers du rayon, $a\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$V_1 = 3\pi a^3;$$

triangle EFA :

$$V_2 = 2\pi(\text{AFE})\,Gg = 2\pi(\text{AFE})\,a\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi a\sqrt{3}(\text{FAE});$$

triangle ACB :

$$V_3 = 2\pi(\text{ABC})\,G'g' = 2\pi(\text{ABC})\frac{\text{CJ}}{3} = \pi a\frac{\sqrt{3}}{3}(\text{ABC}).$$

Or

$$\text{ABC} = \text{AFE} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

donc

$$V_2 + V_3 = \pi a\sqrt{3}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right) = \pi a^3,$$

$$V_1 + V_2 + V_3 = 3\pi a^3 + \pi a^3.$$

On trouve donc pour le volume $4\pi a^3$.

Ce volume est le triple de celui d'une sphère de rayon a.

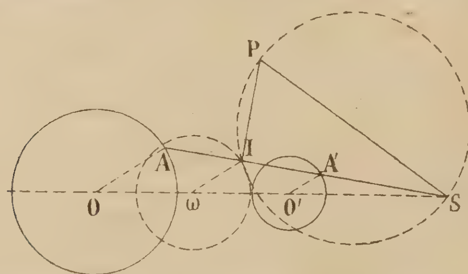
N. B. — Pour évaluer les volumes engendrés par les triangles AFE et ABC, plusieurs de nos correspondants font le produit de l'aire engendrée par le côté opposé à A par le tiers de la distance à A. Or, A est équidistant de FE et de BC, et les droites KF et BC engendrent des cônes égaux : il en résulte que les volumes engendrés par les triangles AKF et ABC sont égaux, donc la somme $V_2 + V_3$ est égale au volume du cône engendré par KAE, c'est-à-dire à $\frac{1}{3}\pi a \times (a\sqrt{3})^2 = \pi a^3$.

[Bonnes solutions : MM. Adello; H. Aubert; J. Briquet; M. Chatelier; Chauvalon; A. Cieutat; E. Crépeau; P. Dujoux; E. Faurés; G. Fouché; Geffroy-Le Jan; B. Georges; A.-F. Gilly; E. Guicheney; Guitton; G. Knoll; P. Louon; R. Marchant; Ménéchal; G. Meynaud; J. Meirez; A. Monjallon; Olivier; L.-G. Papon; Ch. Paris; J. Périn; M. Pichereau; M. Saint-Juvin; S. Schilling; H. Sebban; J. Steur; A. Terrier.

Assez bonnes solutions : MM. J. Bugnard; R. Cachia; J. Lassave; A. Moreau; Ch. Norgelet; L. Soulié; G. Thiébaux; R. Weinzaepfel.]

4157. — *On donne deux circonférences* O *et* O′ *et un point* P *extérieur. On demande de mener deux rayons parallèles* OA *et* O′A′ *tels que l'on ait* PA = PA′.

Les rayons OA et O′A′ étant parallèles, la droite AA′ passe par un centre de similitude des deux cercles : par le point S, centre de similitude externe, si OA et O′A′ ont même sens ; par le point



S′, centre de similitude interne, si OA et O′A′ ont des sens opposés.

Soit I le milieu de AA′ et ω celui de OO′, la ligne ωI est parallèle à OA, O′A′ et égale à la demi-somme, $\omega I = \frac{1}{2}(R + R')$.

Le lieu de I est homothétique, par rapport à S, de celui de A,

$$\frac{SI}{SA} = \frac{R + R'}{2R};$$

le point I décrit donc le cercle dont ω est le centre et dont le rayon est $\frac{1}{2}(R + R')$ lorsque AA′ passe en S; si AA′ passe en S′, on trouve de même que I appartient au cercle décrit de ω comme centre avec un rayon égal à la demi-différence des rayons R et R′.

D'autre part, si PA = PA′ le triangle APA′ est isocèle et la droite PI est perpendiculaire sur IS; un second lieu de I est donc la circonférence décrite sur PS comme diamètre.

Le point I est ainsi déterminé par l'intersection de deux circonférences; le premier genre de solutions se construit en prenant pour I un point commun au cercle (1) décrit sur SP comme diamètre et au cercle (2) qui a ω pour centre et $\frac{1}{2}(R + R')$ pour rayon ; une solution du second genre se construit en prenant pour I un point commun au cercle dont PS′ est un diamètre et à celui qui est tracé autour de ω comme centre avec le rayon $\frac{1}{2}|R - R'|$.

La réciproque a lieu évidemment, car, si les cercles (1) et (2) se coupent en I, la ligne SI, qui rencontre le cercle (2), rencontre en A et A′ les cercles (O) et (O′), homothétiques de (2) par rapport à S et, de plus, le point I est le milieu de AA′, parce que ω est celui de OO′ : la ligne IP, médiane du triangle APA′, en est aussi une hauteur, le triangle est isocèle et PA = PA′. Le problème peut donc avoir quatre solutions.

(J. LASSAVE, à l'Isle-en-Dodon, Haute-Garonne.)

La discussion de l'intersection des cercles (1) et (2), d'après la position de P dans le plan mène à déterminer dans le plan des régions limitées par des ellipses ou par des hyperboles, dont ω est le centre et S (ou S′) est un foyer.

N. B. — Beaucoup de correspondants, oubliant d'examiner le cas où AA′ passe par le centre de similitude *interne*, donnent deux comme nombre maximum de solutions, alors que c'est quatre.

[Très bonne solution : M. G. Bazin.

Bonnes solutions : Mlle A. Levifve; MM. P. Capmas; A. Cieutat; Geffroy-Le Jan; L. Giltou; R. Hacquin; Herbiet; H. Le Lan; P. Louon; M., à Guéret; G. Millour; J. Périn; Roques; H. Sebban; A. Terrier; L. Thaon.

Assez bonnes solutions : MM. Adelle; H. Aubert; P. Baylac; G. Bruniquel; E. Delmas; J. Deportefaix; A. Duval; G. Février; G. Fouché; J. Mazeau; Ch. Mazure; G. Meynaud; J. Moirez; G. Montenot; J. Périgault; J.-D. Pantz; R. Reynard; G. Rian.]

4158. — *Étant donné un quadrilatère* ABCD, *on détermine sur* AD *et* BC *les points* I *et* K *tels que*

$$\frac{AI}{ID} = \frac{BK}{KC} = \frac{AB}{CD}.$$

On joint I *à* K *et par* I *on mène la parallèle à* DC *qui rencontre en* M *la diagonale* AC; *on joint* M *à* K, *prouver que :*

1° IM = MK;

2° *la droite* IK *est parallèle à la bissectrice de l'angle* BNC *des deux côtés* AB *et* DC.

3° *On construit les symétriques* A′ *et* B′ *de* A *et de* B *par rapport à* IK; *on joint* D *à* A′ *et* C *à* B′, *prouver que ces deux droites se coupent en un point* L *situé sur* IK.

1° Les lignes IM et DC étant parallèles, on a la proportion

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AI}{ID} = \frac{AB}{CD} = \frac{BK}{KC};$$

de l'égalité des rapports extrêmes il résulte que MK est parallèle à AB. On a donc

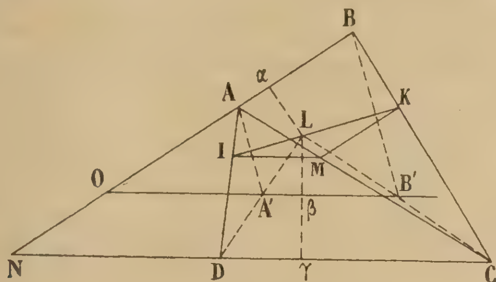
$$\frac{IM}{DC} = \frac{AI}{AD} = \frac{AI}{AI + ID} = \frac{AB}{AB + CD} \quad \text{et} \quad IM = \frac{AB \times DC}{AB + DC}.$$

On trouve la même valeur pour KM. Donc KM = IM; on peut écrire

$$\frac{1}{KM} = \frac{1}{IM} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{DC}.$$

2° Le triangle IMK est isocèle; IM est parallèle à DC et MK à AB, donc IK est également incliné sur les directions des côtés de l'angle en N. Cela équivaut à dire que IK est parallèle à une bissectrice de cet angle.

3° La droite A'B', symétrique de AB par rapport à IK, est donc



parallèle à DC; elle rencontre IK et AB au même point O : tout point de IK est équidistant de AB et de A'B'.

Appelons L le point où DA' rencontre IK, soient Lα, Lβ, Lγ les perpendiculaires menées de L sur AB, A'B' et DC; on a

$$L\alpha = L\beta \qquad \text{et} \qquad \frac{L\beta}{LA'} = \frac{L\gamma}{LD};$$

de plus, comme LD et LA sont des directions symétriques par rapport à LI,

$$\frac{LA}{LD} \quad \text{ou} \quad \frac{LA'}{LD} = \frac{AI}{ID}; \qquad \text{donc} \qquad \frac{L\beta}{L\gamma} = \frac{LA'}{LD} = \frac{AI}{ID} = \frac{AB}{DC}.$$

Il en résulte que les distances de L à DC et à AB sont déterminées :

$$\frac{L\beta}{AB} = \frac{L\gamma}{CD} = \frac{\beta\gamma}{CD - AB}.$$

Or, un calcul mené de la même façon donne les mêmes valeurs pour les distances à A'B' et DC du point L' où CB' coupe IK; L et L' coïncident donc, car il n'y a qu'un point de IK dont la distance à DC ait une valeur donnée.

[Bonnes solutions : MM. Adelle; Ch. Andrei; H. Aubert; G. Bruniquel; P. Capmas; A. Cieutat; J. Dougados; A. Duval; G. Fauché; G. Février; H. Hacquin; H. Le Lan; M. Lhoumeau; P. Louon; M., à Guéret; Ch. Mazure; Ménéchal; G. Moynaud; J. Millour; J. Moirez; R.-D. Pantz; R. Reynard; A. Terrier; L. Thaon.
Solutions partielles : MM. Geffroy-Le Jan; A.-F. Gilly; L. Giltou; E. Guicheney; R. Marchant; D. Roullet; H. Sebban.]

4159. — *A un ballon sphérique en verre d'une capacité de* 1^l *est soudé un tube cylindrique de verre, AB, dont la longueur est* $0^m,50$ *et la section* 1^{cm^2}. *L'appareil étant plein d'air à la température de 0° et sous la pression de* 76^{cm} *de mercure, on le plonge verticalement dans une cuve à mercure à 0°; le tube est immergé sur une longueur de* 40^{cm}. *On demande jusqu'à quelle hauteur BC le mercure pénétrera dans le tube.*

On suppose ensuite que le gaz du ballon soit refroidi à — 4° Réaumur; trouver où s'arrête le niveau du mercure dans le tube. La pression extérieure reste la même. On ne tiendra pas compte de la contraction du verre. Coefficient de dilatation des gaz : 0,0036.

Le volume du tube cylindrique est

$$50 \times 1 = 50^{cm^3};$$

le volume total du ballon et du tube est donc $1\,050^{cm^3}$, et l'air contenu est d'abord à la pression de 76^{cm} de mercure.

Lorsque le tube est immergé de 40^{cm} dans le mercure, le volume de l'air précédent n'est plus, en désignant par x^{cm} la longueur BC, que de $(1\,050 - x)^{cm^3}$, et sa pression est devenue $(76 + 40 - x)^{cm}$ de mercure. Puisque la température est constante, on a, en appliquant la loi de Mariotte,

$$(1\,050 - x)(116 - x) = 1\,050 \times 76,$$

d'où

$$x^2 - 1\,166x + 42\,000 = 0,$$

et

$$x = 583 \pm \sqrt{583^2 - 42\,000} = 583 \pm 545,7.$$

La plus petite racine, $x = 583 - 545,7 = 37^{cm},3$, étant inférieure à 40^{cm}, convient seule.

Les 80° de l'échelle Réaumur sont équivalents à 100° de l'échelle centigrade, donc 4° Réaumur valent

$$\frac{100 \times 4}{80} = 5° \text{ centigrades.}$$

Supposons que la distance $BC' = y$ de l'extrémité du tube au niveau du mercure à l'intérieur du ballon reste inférieure à 50^{cm} quand on refroidit le gaz à — 5°. On a, en appliquant la loi de Gay-Lussac,

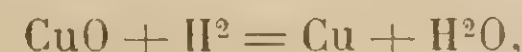
$$PV = P_0V_0(1 + \alpha t),$$

P_0, V_0 désignant la pression et le volume de l'air à 0°,

$$(116 - y)(1\,050 - y) = 76 \times 1\,050 \times (1 - 5 \times 0,0036),$$

d'où

$$y^2 - 1\,166y + 43\,436,4 = 0,$$



et

$$y = 583 - \sqrt{583^2 - 43\,436,4} = 583 - 544,4 = 38^{cm},6,$$

c'est la distance BC' cherchée.

La plus grande racine, $y = 583 + 544,4 = 1\,127^{cm},4$, ne convient pas au problème.

Remarque. — On a supposé que le niveau du mercure dans la cuvette reste invariable lorsque le mercure monte dans le tube.

(E. Paté.)

[Bonnes solutions : MM. Chanvalon, école Hanley, à Thiais; E. C. et J. P., école professionnelle de Rambouillet; A. Duval, école normale de Quimper; G. Knoll, à Clermont-Ferrand; P. Louon, athénée d'Ixelles; A. Popu, à Fumel.
Solutions partielles : MM. G. Février; L. Gilton; R. Godard; R. Hacquin, H. Micard; H. Sebban.]

4160. — *Quel est le poids d'oxyde de cuivre que l'on peut réduire avec l'hydrogène provenant de la décomposition de l'eau par* 28^g *de fer : 1° au rouge; 2° en présence des acides?*

Poids atomiques :

$$H = 1, \qquad O = 16, \qquad Fe = 56, \qquad Cu = 63.$$

La réduction de l'oxyde de cuivre par l'hydrogène s'opère suivant la réaction

$$CuO + H^2 = Cu + H^2O,$$

qui montre que 2^g d'hydrogène réduisent $63 + 16 = 79^g$ d'oxyde de cuivre.

Or, au rouge, la décomposition de l'eau par le fer se produit suivant la formule

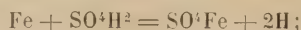
$$3Fe + 4H^2O = Fe^3O^4 + 8H;$$



par suite $(3 \times 56)^g$ de fer donnent 8^g d'hydrogène; on en conclut que $28 = \frac{56}{2}$ g. de fer produisent $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ g. d'hydrogène, qui peuvent réduire

$$\frac{79}{2} \times \frac{4}{3} = 52^g,66 \text{ d'oxyde de cuivre.}$$

En présence d'un acide, SO^4H^2 par exemple, la production de l'hydrogène s'opère suivant la formule



$$Fe + SO^4H^2 = SO^4Fe + 2H;$$

56g de fer ne donnent plus alors que 2g d'hydrogène. Par suite, 28g de fer produisent 1g d'hydrogène, qui réduit

$$\frac{79}{2} = 39^g,5 \text{ d'oxyde de cuivre.}$$

Remarque. — Il en serait de même en présence de l'acide chlorhydrique, le fer étant divalent.

(A. Robba, lycée d'Oran.)

[Bonnes solutions : MM. P. Arbey; P. Baylac; A. Blaise; G. Bruniquel; L. Chapelon; Chauvalon; J. Dougados; A. F., à Saint-Pons (Hérault); G. Gaillard; L. Gilton; E. Guicheney; R. Hacquin; G. Knoll; R. Laporte; J. Lassave; L. Linemann; J. Mazeau; Y. Millour; L.-G. Papon; J. Patat; E. Paté; J. Périn; R. Renaud; A. Ricoux; Riquet; H. Sebban; A. T., à Blanzy; A. Tabary; L. Thaon; G. Thiébaux.

Solutions partielles : MM. L. Bordron; M. Boulvert; E. Delmas; P. Dujoux; A. Duval; R. Marchant; L. Messan; H. Micard; Olivier; G. Pichon; A. Popu.

ARITHMÉTIQUE

4106. — *Une personne dispose, le 16 mars 1920, d'une certaine somme. Cette somme est la plus petite qui lui permette d'acquérir, sans reste, soit un nombre entier de « Bons de la Défense nationale » de 1 000f à un an, soit un nombre exact de dizaines de francs de rentes 5 % amortissables.*

1° Quelle est cette somme?

2° De quel revenu pourra chaque année disposer cette personne sans toucher à son capital :

a) Si elle achète des Bons de la Défense et renouvelle son achat tous les ans;

b) Si elle achète de la rente?

3° Quel sera le taux réel du placement si, la personne ayant acheté de la rente, son capital lui est remboursé à raison de 150f pour 100f le 16 mars 1950?

N. B. — On rappelle :

1° Qu'un bon de la Défense de 1 000f à un an coûte 950f;

2° Que l'emprunt 5 % 1920 a été émis au pair;

3° Qu'il est logique d'ajouter au taux de 5 % le taux d'intérêts composés qui permet à un capital de s'augmenter de 50 % pendant le temps où ce capital reste placé.

(*B. S., Poitiers, aspirants, mars* 1920.)

1° Pour avoir 10f de rente 5 %, il faut verser 200f; un bon de la Défense coûte 950f. La somme dont dispose la personne est donc le p. p. c. m. de 950 et de 200.

Or
$$950 = 50 \times 19,$$
$$200 = 50 \times 4,$$

19 et 4 sont premiers entre eux. Le p. p. c. m. est donc

$$50 \times 19 \times 4 = 3\,800.$$

2° Avec 3 800f, le revenu que l'on peut se constituer en achetant de la rente 5 %, est égal à 190f. Mais en achetant 4 bons de la Défense, à 950f, qui sont remboursés à 1 000 au bout d'un an, le revenu est de $4 \times 50 = 200^f$.

3° La somme dépensée pour l'achat de la rente est remboursée au bout de 30 ans, et augmentée de la moitié de sa valeur.

Tout se passe comme si, chaque année, en plus du revenu fixé de 190f que touche le rentier, un certain intérêt s'ajoutait au capital.

Soit alors r le taux du placement, r étant supérieur à 5 %. La somme placée est devenue, au bout d'un an,

$$3\,800(1 + r);$$

on en retire la rente de 190f, donc

$$S_1 = 3\,800(1 + r) - 190;$$

on aura de même

$$S_2 = S_1(1 + r) - 190$$
$$= S(1 + r)^2 - 190(1 + r) - 190$$

(en posant $3\,800 = S$).

On aura ainsi

$$S_3 = S_2(1 + r) - 190$$
$$= S(1 + r)^3 - 190[(1 + r)^2 + (1 + r) + 1] \qquad (1)$$

et ainsi de suite, jusqu'à

$$S_{30} = S(1 + r)^{30} - 190\frac{(1 + r)^{30} - 1}{r}. \qquad (2)$$

Or, par hypothèse, $S_{30} = \frac{3}{2}S = 5\,700$. On est donc conduit à déterminer r par l'équation

$$5\,700 = 3\,800(1 + r)^{30} - 190\frac{(1 + r)^{30} - 1}{r}. \qquad (3)$$

Cette équation ne peut être résolue par des moyens élémentaires; l'équation exacte est même un peu plus compliquée encore; il faut remarquer que lors du remboursement des titres de rente, on ne touche probablement pas la rente de 190f; il faut, dans ce cas, supprimer le dernier terme entre crochets de l'équation (1), ce qui donne, comme dernier terme de l'équation (3) $(1 + r)\frac{(1 + r)^{29} - 1}{r}$ au lieu de $\frac{(1 + r)^{30} - 1}{r}$. La difficulté de la résolution est sensiblement plus grande.

Mais on pourrait assez facilement résoudre l'équation (3) par tâtonnement, car on sait que la racine doit être un peu supérieure à 0,05; d'autre part, un taux ne demande pas à être calculé avec plus de deux, à la rigueur trois chiffres décimaux.

N. B. — En posant cette question, on avait sans doute en vue une solution autre que celle qui précède et conduisant à un calcul élémentaire. Mais cette solution ne peut être absolument correcte. Beaucoup de nos abonnés ont donné la solution qui était attendue des candidats, comme l'indique l'énoncé (N. B., 3°). Ils ont calculé un taux r tel que

$$100(1 + r)^{30} = 150,$$

ce qui donne

$$\log(1 + r) = \frac{1}{30}\log 1,5 = 0,00587,$$
$$1 + r = 1,0136,$$

donc $r = 0,0136$; ils ont ajouté ce taux au taux de 5 %, correspondant à la rente que l'on tire chaque année de la somme placée, cela donne un taux de 6,36 %, environ $6\frac{1}{3}$ %. Il est visible que ce calcul ne correspond pas rigoureusement aux faits : la somme n'augmente pas chaque année de son intérêt, compté à 1,36 % : elle est, en réalité, accrue de son intérêt au taux r, et diminuée de la somme fixe 190f. Si l'on pose le taux inconnu égal à $0,05 + x$, et si l'on appelle S_n le capital à la fin de la n^e année, on a exactement

$$S_{n+1} = S_n(1 + r) - 190$$
$$= S_n(1 + x + 0,05) - S \times 0,05$$

(car 190f sont l'intérêt de la somme initiale S); donc

$$S_{n+1} = S_n(1 + x) + (S_n - S) \times 0,05.$$

La solution approchée indiquée plus haut néglige le terme $(S_n - S)0,05$, ce qui est une erreur assez sensible, car à la fin de la période, S_n est environ les $\frac{3}{2}$ de S.

Nous regardons néanmoins comme satisfaisantes les solutions qui ont traité la question de cette façon approchée. Mais quelques correspondants ont fait un raisonnement encore moins acceptable, qui les a conduits à un taux sensiblement plus fort, de $6\frac{2}{3}$ %.

Enfin quelques-uns ont trouvé le taux, tout à fait exorbitant, de 12,74 %.

[Bonnes solutions : Mlle A. Levifve; MM. J. Bugnard; J. Camus; M. Castelain; J. Contour; J. Devisme; M. Didier; J. Dinand; A. F., à Saint-Pons; G. Knoll; Lhôtelier; R. Marchant; Y. Maurice; H. Micard; R. Panchaud; G. Pichon; J. Régitano; H. Sebban; M. Stévenard; A. Wehrung.]

SOLUTIONS D'EXERCICES

1067. — *On a deux droites parallèles, Δ et Δ', un point* A *extérieur et* B *compris entre les droites.*

Déterminer la sécante AMN, *telle que si de* B *on mène* BP *perpendiculaire à* MN *on ait*

$$\frac{PM}{PN}=\frac{m}{n}, \quad \left(\frac{m}{n} \text{ donné}\right).$$

Un premier lieu du point P est une droite D, parallèle aux droites Δ et Δ'. En effet, si de A on mène une sécante AM'N', sur laquelle on prend un point P' tel que $\frac{P'M'}{P'N'}=\frac{m}{n}$, les points P et P' sont sur une parallèle à Δ et Δ', en vertu d'un théorème connu du 3e livre. Un second lieu de P est le cercle (C) décrit sur AB comme diamètre. Le point P est donc déterminé par l'intersection de ces deux lieux. Le problème peut avoir deux solutions, si (C) et D se coupent, une seule si D touche le cercle; il est impossible si la droite ne rencontre pas le cercle.

Ces deux dernières hypothèses peuvent être réalisées si le cercle (C) ne rencontre que la parallèle Δ', car D peut alors être placée de façon à ne pas rencontrer (C). Mais si (C) coupe Δ et Δ', le problème posé a toujours deux solutions.

1068. — *On a un tétraèdre* SABC. *On abaisse des perpendiculaires de* S *sur les plans bissecteurs des dièdres formés par les plans* SAB, SBC, SCA, *avec le plan* ABC. *Démontrer que les pieds des perpendiculaires sont six points d'un même plan.*

Soit α le pied de la perpendiculaire menée de S à l'un des plans bissecteurs du dièdre qui a BC pour arête; prolongeons $S\alpha$ d'une longueur égale, jusqu'en A' : le point A' est dans le plan ABC, parce que les plans ABC et SBC sont symétriques l'un de l'autre par rapport au plan bissecteur du dièdre. On peut donc dire que les symétriques de S par rapport aux six plans bissecteurs des dièdres ayant AB, BC et CA pour arêtes sont dans le plan ABC; les projections de S sont donc dans un plan homothétique de ABC par rapport à S, la raison étant $\frac{1}{2}$: ce plan passe par les milieux des arêtes SA, SB, SC.

1069. — *Soit* ABCD *un trapèze. Par* O, *point de rencontre des diagonales, on mène* FOE, *parallèle aux bases.*

Démontrer que :

1° $EO = OF = x$;

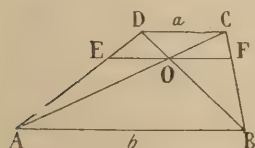
2° $\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Application : construire la longueur x telle que $\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, *a et b étant des longueurs données.*

Construire la longueur x telle que $\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$.

1° Les droites OE et CD étant parallèles, on a les proportions

$$\frac{OE}{CD}=\frac{AO}{AC} \quad \text{et} \quad \frac{OF}{DC}=\frac{BO}{BD},$$



or AB et DC sont aussi parallèles et par conséquent

$$\frac{AO}{AC}=\frac{BO}{BD},$$

donc

$$\frac{OE}{CD}=\frac{OF}{DC},$$

ce qui entraîne $OE = -OF$. O est le milieu de FO.

2° Les droites AC et AD, coupées par les parallèles DC et EO, donnent la proportion

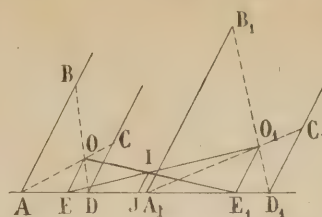
$$\frac{EO}{DC}=\frac{AE}{AD}, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{DC}=\frac{1}{x}\left(\frac{AE}{AD}\right),$$

mais DB et DA, coupées par EO et AB, donnent

$$\frac{EO}{AB}=\frac{DE}{DA}, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{AB}=\frac{1}{x}\left(\frac{ED}{AD}\right);$$

en ajoutant, on trouve, puisque $AE + ED = AD$, $\frac{1}{x}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{DC}$.

Application. — Prenons un segment quelconque DA; par les extrémités, menons deux droites parallèles à une direction arbitraire, et portons les longueurs $DC = a$ et $AB = b$, puis menons les lignes AC, BD, qui se croisent en O; la longueur de la parallèle à AB menée par O, d'après ce qui vient d'être démontré, satisfait à la relation $\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.



Sur une droite prenons quatre points quelconques A, D, A_1, D_1 (rien n'empêche de supposer que A et A_1, D et D_1 coïncident respectivement), par ces points menons quatre droites parallèles à une même direction et portons $DC = a$, $AB = b$, $D_1C_1 = c$ et $A_1B_1 = d$; menons DB, CA, qui se croisent en O, puis D_1B_1, A_1C_1, qui se croisent en O_1 et par O et O_1 les parallèles à AB, OE, O_1E_1; recommençons sur le trapèze EOO_1E_1 la même construction, OE_1 et O_1E se croisent en I, la parallèle à AB menée par I coupe AD en J : la longueur IJ est celle qui satisfait à la relation donnée

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{EO}+\frac{1}{E_1O_1}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right).$$

CONCOURS DE 1919

INSTITUT ÉLECTROTECHNIQUE DE GRENOBLE

Section élémentaire.

I. — Décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers. Recherche du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple de plusieurs nombres.

Application : Décomposer en leurs facteurs premiers les nombres

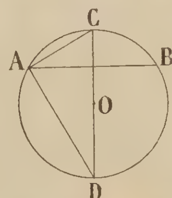
2 310, 1 716, 1 638, 234;

en déduire leur plus grand commun diviseur et leur plus petit commun multiple.

II. — Étant donnée la fraction du second degré

$$\frac{x^2-8x-9}{x^2-6x+10},$$

quelles sont les valeurs de x qui font prendre à cette fraction la valeur $\frac{22}{100}$?



III. — On connaît la longueur a d'une corde AB d'une circonférence de rayon R. Calculer la corde AC qui sous-tend la moitié du petit arc, et la corde AD qui sous-tend la moitié du grand arc.

Application : $R = 2^m$, $a = 3^m,50$.

IV. — Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} y+\frac{x}{2}=5-\frac{y-2x+1}{3}, \\ \frac{2x-1}{3}-\frac{6y-3x}{2}=\frac{x+y}{5}. \end{cases}$$

(*Durée : 4 heures.*)

CONCOURS DE 1920 (*Suite.*)

CERTIFICAT D'APTITUDE AU PROFESSORAT DES CLASSES ÉLÉMENTAIRES DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Session normale.

Sciences.

MATHÉMATIQUES. — I. — **1230.** Un commerçant a acheté 85 bouteilles de vin fin en trois lots qui valent respectivement 4 francs, 7 francs

et 10 francs la bouteille. Il revend le tout avec un bénéfice brut de 25 %, mais les frais de transport réduisent ce bénéfice brut de 10 % de sa valeur, de sorte que le bénéfice net n'est plus que de 152 fr. 10. Sachant que le deuxième lot contient trois fois moins de bouteilles que le troisième, dites : 1° le prix d'achat total; 2° combien il y a de bouteilles dans chaque lot.

N. B. — On donnera : 1° une solution arithmétique; 2° une solution algébrique de ce problème.

II. — Faites à des élèves de septième une leçon avec démonstrations expérimentales sur le *triangle isocèle*.

A la suite de cette leçon, vous exposerez, au point de vue purement géométrique, ce que vous savez sur les propriétés du triangle isocèle.

Leçon de choses. — *L'herbier de la classe.* Pour intéresser les élèves à l'observation des plantes qu'ils rencontrent le plus fréquemment, vous avez imaginé de constituer un *herbier de la classe* à l'aide des plantes ou des échantillons apportés par les élèves.

Vers la fin de l'année, un inspecteur général visite votre classe et s'intéresse à votre herbier. Vous lui exposez les idées qui en ont dirigé la composition et la classification; vous rappelez sommairement les principales démonstrations que vous avez faites. A titre d'exemple, vous reproduisez une de ces démonstrations portant sur un groupe d'échantillons que vous choisirez.

N. B. — Les candidats sont invités à placer dans des notes spéciales, à la fin de leur composition, les explications scientifiques qui, étant hors de la portée de leurs élèves, sont cependant de nature à préciser certains points du sujet.

Session spéciale de juin.

Sciences.

Mathématiques. — I. — **4231**. Un négociant entreprend un commerce avec un certain capital, qu'il augmente chaque année, par ses bénéfices, de $\frac{1}{4}$ de la valeur qu'il avait au début de l'année. Il prélève annuellement sur ses bénéfices 8 000 francs pour les dépenses de sa maison. Sachant qu'au bout de trois ans il possède net 92 500 francs, on demande quel capital il possédait au début de la première année.

N. B. — On donnera de ce problème : 1° une solution arithmétique; 2° une solution algébrique.

II. — *La division des nombres décimaux.* — Vous exposerez à des élèves de huitième les cas où le diviseur est un nombre décimal.

Leçon de choses. — En classe de septième, vous exposez à vos élèves le mode de fonctionnement d'*une pompe.*

1° Vous rappelez sommairement les démonstrations expérimentales que vous avez faites dans une leçon précédente sur la cause qui détermine l'ascension de l'eau dans la pompe aspirante.

2° Vous comparez le mécanisme de la pompe aspirante qui est dans la cour du lycée avec celui d'une pompe à bicyclette apportée par un élève.

CERTIFICAT D'APTITUDE A L'ENSEIGNEMENT DES SCIENCES APPLIQUÉES DANS LES ÉCOLES NORMALES ET PRIMAIRES SUPÉRIEURES

(ancien régime.)

Mathématiques.

I. — **4232**. On connait la longueur de l'hypoténuse et celle d'un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle. Trouver, en se servant seulement du compas, la longueur du second côté de l'angle droit. (On rappelle qu'étant donnés un cercle de rayon connu et un point sur ce cercle, on obtient facilement, par l'usage du seul compas, le point diamétralement opposé au point donné.)

II. — **4233**. Soit N un nombre entier; soit A sa racine carrée à une unité près par excès, on a $N = A^2 - R$.

Montrer que A et R sont plus petits que N sauf dans le cas où N est égal à 1 ou à 2 ou à 4. En conclure que si on sait trouver à l'aide du seul compas, les racines carrées exactes des nombres entiers inférieurs à un entier N, on peut trouver de la même manière la racine carrée exacte de N. Indiquer comment on peut trouver les racines carrées des 10 premiers nombres. Faire les constructions pour $\sqrt{7}$.

Nota. — Pour trouver la racine carrée de 2, on remarquera que $2 = 3 - 1$.

III. — Soit x la mesure d'un arc de cercle lorsqu'on prend le rayon de ce cercle pour unité. Tracer en choisissant deux axes rectangulaires les courbes représentatives des fonctions (1) $y = ax$, (2) $y = \sin x$, a étant un nombre donné et x prenant toutes les valeurs numériques possibles. L'unité d'ordonnée sera représentée par 4^{cm} et sur l'axe des x on représentera π par 3^{cm}. Calculer la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec Ox la tangente à l'origine à la courbe (2). Examiner graphiquement quel est le nombre des racines de l'équation $ax = \sin x$ selon les valeurs données à a.

QUESTIONS PROPOSÉES

4234. — Trouver le plus petit nombre tel que son produit par 9 s'écrive (dans le système de base 10), avec les mêmes chiffres que le nombre, mais dans l'ordre inverse. (V. Thébault, à Ernée.)

4235. — Un propriétaire met en vente une maison et reçoit les propositions de trois acquéreurs : le premier, A, offre 25 000 francs comptant et 35 000 francs payables à la fin de la troisième année; le second, B, offre 14 000 francs comptant, plus 50 000 à la fin de la cinquième année; le troisième, C, offre 20 000 francs comptant, 30 000 francs à la fin de la première année, plus 2 000 francs à la fin de chacune des quatre années suivantes.

Quelles sont les valeurs actuelles des prix proposés, le taux d'intérêt étant de $4\frac{1}{2}$ % et la capitalisation des intérêts se faisant à la fin de chaque année?

Quelle est l'offre la plus avantageuse ?

4236. — Résoudre et discuter le système d'équations :

$$\sqrt{x+\frac{1}{y}} + \sqrt{x+y-1} = a,$$

$$2x + y + \frac{1}{y} = b.$$

Application numérique : $a = \frac{11}{2}$, $b = \frac{63}{4}$.

(Paul Louon, athénée d'Ixelles.)

4237. — Un terrain a la forme d'un quadrilatère convexe ABCD. Les angles DAC et DBC sont droits et les côtés AD et BC sont égaux.

1° Démontrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle.

2° On donne les longueurs $CD = a$, $AD = BC = b$.

Par le point I, intersection des diagonales AC et BD, on mène la hauteur EIG du trapèze.

Calculer, en fonction de a et b, la longueur commune des diagonales AC et BD, la hauteur h du trapèze, la base AB, les longueurs IE et IG, et la surface S du trapèze.

3° Sachant que $a = 40^m$, $b = 24^m$, calculer la mesure de la surface du trapèze ABCD.

(*B. S., Paris, aspirants, mars* 1920.)

4238. — On considère le trapèze ABCD rectangle en A et B, dans lequel on donne $AB = h$, $AD = a$, $BC = b$.

On prend M sur le milieu de AB et on construit le triangle CMD.

1° Trouver la relation qui doit exister entre h, a et b pour que le triangle CMD soit rectangle en M.

2° Trouver le volume engendré par le triangle CMD, lorsqu'on fait tourner la figure autour de AB. (On remplacera dans l'expression du volume h par sa valeur tirée de la relation établie précédemment.)

Application numérique : $a = 9^{dm}$, $b = 4^{dm}$. Calculer le volume à 1^{cm^3} près.

(*B. S., Dijon, aspirantes, 1re session* 1920.)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie Paul BRODARD.

23e Année. 15 Mars 1921. N° 12.

L'Éducation Mathématique

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

PRIX DU NUMÉRO : France et Colonies, 0 fr. 60. Étranger, 0 fr. 70.
ABONNEMENT ANNUEL : France et Colonies, 10 fr. Étranger, 12 fr.

Tous les abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, l'on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

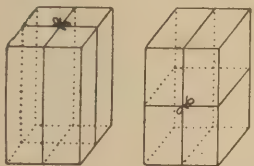
Rédaction : Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Abonnements : Librairie **Vuibert**, Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES BEAUX-ARTS ET ÉCOLES RÉGIONALES D'ARCHITECTURE

Concours de 1920.

4175. — *Un paquet a la forme d'un parallélépipède à base carrée. Pour l'entourer d'une ficelle qui passe par les milieux des côtés des carrés, il faut 2m,20 de ficelle. Si la ficelle passe par les milieux des côtés de deux rectangles opposés, il en faut 2m. Dans chacun des cas, on a compté 20cm pour le nœud.*



Calculer les dimensions du parallélépipède.

Appelons x et y les deux dimensions inconnues du parallélépipède, x le côté du carré de base, y la hauteur.

Les figures ci-contre, qui indiquent la façon dont la ficelle entoure le paquet, montrent que, dans le premier cas, la longueur de la ficelle, sans le nœud, est $4x+4y$; dans le second c'est $6x+2y$. On a donc les deux équations

$$4x+4y+20=220, \qquad (1)$$
$$6x+2y+20=200; \qquad (2)$$

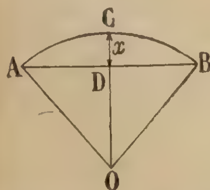
la première donne $x+y=50$, d'autre part, en retranchant membre à membre, on a $y-x=10$.

Il en résulte que $y=30$ et $x=20$.

(J. SCHILLING, à Alger.)

[Bonnes solutions : Mlle S. David; MM. Ch. Andrei; H. Aubert; A. Authier; A. Blaise; M. Boulvert; A. Bordes; V. Bordon; J. Briquet; J. Cartouzou; Ch. Caussin; Chapelon; B. Charles; A. Chatelier; M. Chatelier; G. Clément; R. Collomb; M. Courboulay; C. Crépeau; G. Démaret; Derupt; I. Dougados; P. Dujoux; Dumesny; P. Faucheux; A. Favard; G. Fouché; Gaudron; Geffroy-Le Jan; F.-A. Gilly; A. Goëlo; C. Grard; Y. Guezelle; R. Guiot; Hambert; G. Houalet; G. Jugain; M. Jumeau; Kohn; J. Lacroix; P. Lebrun; R. Legrand; H. Le Lan; L. Linemann; L. Louis; P. Louon; Marchal; R. Marchant; A. Martin; Y. Maurice; L. Messan; H. Micard; Michem; P. More; R. Morel; G. Mouzon; F. Negretzu; Ch. Norgelet; G. Olivier; L.-G. Papon; J. Patat; E. Paté; E. Pinlong; M. Pommerolle; A. Papu; R. Riau; M. Robineau; Rosentock; M. Saint-Juvin; H. Sebban; L. Simon; M. Siraud; A. Terrier; R. Vallé; N. Watelet; R. Weinzaepfel.]

4176. — *Une toupie a la forme d'un secteur sphérique OACB. Le rayon AD du cercle limitant la calotte a une longueur donnée a et la hauteur CD de la calotte est désignée par x.*



Calculer en fonction de a et de x le volume de la toupie et étudier les variations de ce volume lorsque x prend toutes les valeurs possibles.

Le diamètre 2R de la sphère à laquelle appartient la calotte est donné par l'équation

$$a^2=x(2R-x),$$

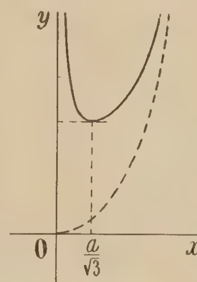
d'où

$$2Rx=a^2+x^2.$$

La surface de la calotte est

$$2\pi Rx=\pi(a^2+x^2)$$

et le volume de la toupie a pour mesure le produit de l'aire de la calotte par le tiers du rayon. On est donc amené à étudier la fonction



$$\frac{1}{6}\pi\frac{(a^2+x^2)^2}{x}.$$

Le facteur $\frac{1}{6}\pi$ étant constant, le volume varie dans le même sens que

$$y=\frac{(a^2+x^2)^2}{x}.$$

La dérivée de cette fonction est

$$y'=\frac{4x^2(a^2+x^2)-(a^2+x^2)^2}{x^2}=\frac{(a^2+x^2)(3x^2-a^2)}{x^2};$$

elle a le signe de $3x^2-a^2$. Quand x est très voisin de zéro (on ne peut donner à x une valeur rigoureusement nulle, mais on peut le supposer aussi petit qu'on le veut), le volume est infiniment grand; il décroît quand x augmente et atteint un minimum quand $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$, ce minimum est $\frac{8}{27}a\sqrt{3}=2\times\frac{4}{3}\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3$; (c'est le double du volume d'une sphère dont le rayon est $\frac{a}{\sqrt{3}}$), puis quand x augmente, le volume croît au delà de toute limite.

Si l'on représente la variation de ce volume par une courbe, en se bornant aux valeurs positives de la variable x, on voit que la courbe a l'axe Oy pour asymptote, descend le long de cet axe, atteint un minimum, point où la tangente est parallèle à Ox, puis s'élève ensuite de plus en plus vite, s'éloignant à l'infini; on peut en effet écrire la valeur de y sous la forme

$$y=\frac{a^4}{x}+2a^2x+x^3;$$

quand x augmente indéfiniment, le terme $\frac{a^4}{x}$ tend vers zéro, la valeur de la fonction y diffère de moins en moins de celle de la fonction entière

$$Y=x^3+2a^2x,$$

la branche infinie de la courbe s'élève donc de plus en plus vite comme celle de la courbe $Y=x^3+2a^2x$ (*).

(Robert WEINZAEPFEL, à Soultz, Haut-Rhin.)

(*) La courbe n'a donc pas une droite asymptote oblique, comme plusieurs correspondants l'ont figurée, à tort.

N. B. — On ne peut étudier cette fonction d'une façon élémentaire par la méthode dite indirecte, on serait amené à discuter le nombre des racines de l'équation en x

$$(a^2+x^2)^2 - xy = 0,$$

qui est du 4ᵉ degré et n'est ni réciproque, ni bicarrée.

Ceux de nos correspondants qui n'ont pas encore étudié les dérivées n'ont pu résoudre la question.

[Bonnes solutions : MM. Geffroy-Le Jan; R. Reynard; H. Sebban.
Assez bonne solution : M. A. Moreau.]

4177. — *Calculer la somme qu'il faut placer pendant trente ans à intérêts composés, au taux de 4 %, pour obtenir* 125 000ᶠ.

On fera le calcul à l'aide de tables de logarithmes à 5 décimales, mais on prendra

$$\log 1{,}04 = 0{,}0170333.$$

Le capital a, placé à intérêts composés, au taux de 4 % est devenu

$$x(1+0{,}04)^{30},$$

à la fin de la trentième année après le versement initial. La valeur prise par le capital est donnée égale à 125 000, on a donc l'équation

$$x(1{,}04)^{30} = 125\,000,$$

d'où

$$\log x = \log 125\,000 - 30 \times \log 1{,}04.$$

Calcul logarithmique :

$$\begin{aligned} \log 125\,000 &= 5{,}09691 \\ 30 \log 1{,}04 &= 0{,}510999 \\ \log x &= 4{,}585911 \\ \log 38\,540 &= 4{,}58591 \qquad \delta = 11 \\ 0{,}1 \quad & \quad 0{,}1. \end{aligned}$$

Le capital placé est 38 540ᶠ,1.

Les tables de Dupuis fournissent

$$(1{,}04)^{30} = 3{,}243398,$$

et l'on a

$$x = \frac{125\,000}{3{,}243398} = 38\,539{,}82\,;$$

cette valeur ne diffère de la précédente que de 28 centimes.

(RAYMOND RENAUD, école normale de Varzy, Nièvre.)

[Bonnes solutions : MM. Andrei; P. Arbey; A. Authier; A. Bordes; G. Cartouzou; L. Chapelon; A. Chatelier; M. Chatelier; J. Clément; A. Doutau; P. Durand; E. Epailly; Ch. Feyrabend; G. Février; Geffroy-Le Jan; F.-A. Gilly; Y. Guézelle; M. Hambert; R. Legrand; P. Louon; J. Magnani; R. Marchant; E. Masdupuy; J. Moirez; G. Mouzon; J. Patat; E. Paté; J. Périn; M. Pommerolle; Saint-Juvain; H. Sebban; L. Simon; L. Soulier; R. Vallé; N. Watelet; R. Weinzaepfel.
Assez bonnes solutions : MM. Marchal; A. Martin; A. Monjallon; A. Terrier.]

ARITHMÉTIQUE

4166. — *Deux mobiles partent en même temps, l'un de* A, *l'autre de* B; *ils vont à la rencontre l'un de l'autre, la distance qui les sépare est de* 19 055ᵐ. *Le premier mobile parcourt* 50ᵐ *pendant la première heure, puis* 100 *pendant la seconde,* 200 *pendant la troisième, et ainsi de suite, l'espace parcouru pendant une heure étant toujours double de l'espace parcouru pendant la précédente. Le second mobile fait* 128ᵐ *pendant la première heure,* 192 *pendant la suivante, et ainsi de suite, l'espace parcouru pendant une heure étant toujours les* $\frac{3}{2}$ *de celui qui a été parcouru pendant l'heure précédente. Après combien d'heures se rencontreront-ils, et quel sera le chemin parcouru par chacun d'eux?*

Le chemin parcouru par le premier mobile en x heures est la somme des x premiers termes d'une progression géométrique de raison 2, dont le premier terme est 50. C'est donc

$$50(1+2+2^2+\ldots+2^{x-1}) = 50\,\frac{2^x-1}{2-1} = 50(2^x-1).$$

Le second mobile, qui va au-devant du premier, a parcouru dans le même temps un chemin qui est aussi la somme des termes d'une progression géométrique; mais la raison est $\frac{3}{2}$ et le premier terme 128. Cette somme est égale à

$$128\left[1+\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}\right] = 128\,\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}{\frac{3}{2}-1} = 256\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x-1\right].$$

Quand les deux mobiles se rencontrent, la somme des chemins parcourus est égale à la distance AB donnée. En écrivant cette relation, on obtient l'équation

$$50(2^x-1)+256\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x-1\right] = 19\,055, \qquad (1)$$

où l'inconnue figure comme exposant de deux nombres *différents*. Une telle équation n'est pas résoluble par formules et ne peut être ramenée à une équation résoluble.

Mais on peut se demander si elle admet une racine entière; si une telle racine existe il sera facile de la mettre en évidence. L'équation (1) peut être écrite

$$50\times 2^x + 256\left(\frac{3}{2}\right)^x = 19\,055+50+256 = 19\,361, \qquad (2)$$

en faisant passer tous les termes connus dans le second membre. Cette égalité n'est possible que si le terme $256\times\left(\frac{3}{2}\right)^x$ est entier. 2^x est premier avec 3^x : il faut donc que 2^x soit un diviseur de 256. Les diviseurs de 256 sont les puissances de 2, jusqu'à 2^8 compris. Une racine entière ne peut être qu'un entier inférieur à 8. Mais remarquons de plus que 50×2^x est divisible par 2 et que 19 361 ne l'est pas; il faut donc que $256\left(\frac{3}{2}\right)^x$ ne soit pas divisible par 2, ce qui exige que $x = 8$.

Le seul entier qui puisse vérifier l'équation est donc 8 : on reconnaît que 8 est bien racine, car

$$2^8 = 256 \qquad \text{et} \qquad 50\times 256 = 12\,800,$$
$$256\times\left(\frac{3}{2}\right)^8 = 3^8, \qquad 3^8 = 6\,561\,;$$

la somme de ces deux nombres est bien 19 361.

Les mobiles se rencontreront au bout de 8 heures.

Le premier aura parcouru $50\times(2^8-1) = 12\,800 - 50 = 12\,750^{\text{m}}$, et le second

$$256\left[\left(\frac{3}{2}\right)^8-1\right] = 3^8 - 256 = 6\,305^{\text{m}}.$$

On vérifie que 6 305 + 12 750 = 19 055.

(RENÉ CHASSELUT, école primaire supérieure de Corbigny.)

[Bonnes solutions : Mˡˡᵉ M. Marignac; MM. L. P. C.; Cartouzou; Ch. Caussin; A. Cieutat; J. Devisme; A. F., à St-Pons; P. Faucheux; E. Guicheney; M. Hambert; G. Knoll; J. Lassave; E. Lebeuf; R. Marchant; Ménéchal; G. Mouzon; J. Schilling; H. Sebban.
Assez bonnes solutions : MM. P. Baecher; J.-E. Chantrelle; C. Crépeau; Le Jan-Geffroy; L. Soulier.]

4179. — *Simplifier et calculer l'expression*

$$X = (\sqrt{3}-1)^3 \sqrt[3]{9+5\sqrt[2]{3}} + (\sqrt{3}+1)^3 \sqrt[3]{9-5\sqrt[2]{3}}.$$

Le cube de $\sqrt{3}+1$ est

$$(\sqrt{3}+1)^3 = 3\sqrt{3} + 3.3 + 3\sqrt{3} + 1$$
$$= 6\sqrt{3} + 10.$$

Faisons entrer en facteur $\sqrt{3}+1$ sous le signe $\sqrt[3]{\ }$. Nous trouvons

$$(\sqrt{3}+1)^3 \times \sqrt[3]{9-5\sqrt[2]{3}} = (\sqrt{3}+1)^2 \sqrt[3]{(6\sqrt{3}+10)(9-5\sqrt{3})}$$
$$= (4+2\sqrt{3}) \sqrt[3]{54\sqrt{3}+90-50\sqrt{3}-90}$$
$$= (4+2\sqrt{3}) \sqrt[3]{4\sqrt{3}}.$$

On aura de même, en changeant le signe de $\sqrt{3}$,

$$(1-\sqrt{3})^3 \sqrt[3]{9+5\sqrt[2]{3}} = (4-2\sqrt{3}) \sqrt[3]{-4\sqrt{3}},$$

donc

$$(\sqrt{3}-1)^3 \sqrt[3]{9+5\sqrt[2]{3}} = (4-2\sqrt{3}) \sqrt[3]{4\sqrt{3}};$$

en faisant la somme, on a

$$X = 8\sqrt[3]{4\sqrt[2]{3}} = 8\sqrt[3]{4}\sqrt[6]{3}.$$

Calcul logarithmique :

$$\log 8 = 0,90309$$
$$\log 4 = 0,60206 \qquad \frac{1}{3}\log 4 = 0,20069$$
$$\log 3 = 0,47712 \qquad \frac{1}{6}\log 3 = 0,07952$$
$$\log X = 1,18330$$
$$\log 15,250 = 1,18327$$
$$3$$
$$1 \qquad 2,8 \qquad (\Delta = 28).$$

Réponse : l'expression X a pour valeur numérique 15,251.

(JEAN PÉRIN, école primaire supérieure de Rambouillet.)

REMARQUE. — La simplification de l'expression résulte de ce que $9 \pm 5\sqrt{3}$ contient en facteur un cube : en effet, on a vu plus haut que

$$(\sqrt{3}+1)^3 = 6\sqrt{3}+10 = 2(3\sqrt{3}+5)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}(9+5\sqrt{3});$$

de même,

$$(\sqrt{3}-1)^3 = \frac{2}{\sqrt{3}}(9-5\sqrt{3});$$

donc

$$X = (\sqrt{3}-1)^3(\sqrt{3}+1)\sqrt[3]{\frac{\sqrt[2]{3}}{2}} + (\sqrt{3}+1)^3(\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{\frac{\sqrt[2]{3}}{2}}$$
$$= (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)\sqrt[6]{\frac{3}{4}}[(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2]$$
$$= 2 \times 8 \times \sqrt[6]{\frac{3}{4}} = 8\sqrt[3]{4}\sqrt[6]{3}.$$

(ANDRÉ BAL.)

[Bonnes solutions : MM. F. Baujard; Fauché; Geffroy-Le Jan; F. Gilly; Y. Guézelle; M. Hambert; A. Haudrechy; Lacombe; J. Lassave; P. Louon; Ménéchal; G. Meynaud; Perigault; Pierdet; G. Salvagnac; J. Schilling; H. Sebban; L. Soulier; A. Vaudroy; R. Weinzaepfel.
Solutions passables : MM. Authier; J. Devisme; R. Marchant.]

4180. — *Simplifier et calculer l'expression*

$$Y = (3-\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}} + (3+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

Remarquons que $3^2 - 5 = 4$ est un carré; donc les radicaux superposés peuvent être remplacés par la somme, ou par la différence de radicaux simples.

En effet,

$$3+\sqrt{5} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)^2,$$
$$\sqrt{3+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}},$$

donc

$$(3-\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}+1)(3-\sqrt{5})}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}-2}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}-\sqrt{2},$$
$$(3+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}+2}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}+\sqrt{2}.$$

En faisant la somme, on trouve

$$Y = 2\sqrt{10}$$
$$= 2 \times 3,16227766..$$
$$= 6,32455532.$$

(PIERRE FAUCHEUX, à la Flèche.)

Autre solution. — Formons le carré de Y, car des réductions se feront :

$$Y^2 = (9+5-6\sqrt{5})(3+\sqrt{5}) + (9+5+6\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) + 2(9-5)\sqrt{9-5}$$
$$= (14-6\sqrt{5})(3+\sqrt{5}) + (14+6\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) + 16$$
$$= 4(3-\sqrt{5}) + 4(3+\sqrt{5}) + 16$$
$$= 40,$$

donc

$$Y = +\sqrt{40} = +2\sqrt{10},$$

(le signe + doit être choisi, car 3 étant supérieur à $\sqrt{5}$, Y est évidemment un nombre positif).

(G. CLÉMENT, au Mans.)

REMARQUE. — On pouvait encore, en posant $A = \sqrt{3+\sqrt{5}}$ et $B = \sqrt{3-\sqrt{5}}$, remplacer $3+\sqrt{5}$ par A^2, et $3-\sqrt{5}$ par B^2. L'expression Y devenait alors

$$Y = A^2B + B^2A = AB(A+B),$$

or

$$AB = +\sqrt{9-5} = +2$$

et

$$(A+B)^2 = 2.3 + 2AB = 10,$$

donc

$$A+B = +\sqrt{10} \qquad \text{et} \qquad Y = 2\sqrt{10}.$$

(A. T., à Blangy.)

[Bonnes solutions : Mlle A. Levifve; MM. Andrei; H. Aubert; A. Bal; F. Baujard; Baurens; C. Baujean; M. Boulvert; A. Boyer; J. Briquet; Brouet; R. Bruneteau; G. Bruniquel; H. Cabiat; Ch. Cadaert; Carthieux; M. Castelain; B. Charles; Ch. Caussin; A. Chatelier; J. Clamens; M. Courboulay; C. Crépeau; P. Durand; E. Faurés; G. Février; Ch. Feyrabend; L. Fiévet; G. Fouché; F. Gilly; A. Goelo; A. Got; Y. Guézelle; E. Guicheney; M. Hambert; G. Houalet; Kohn; J. Lacroix; J. Lassave; R. Legrand; L. Linémann; P. Louon; R. Marchant; E. Masdupuy; Y. Maurice; Ménéchal; J. Miserez; J. Moirez; R. Morel; A. Monjallon; G. Mouzon; F. Négretzu; G. Olivier; L.-G. Papon; J. Patat; Périgault-Fauché; J. Périn; Pierdet; E. Pinlong; A. Popu; R. Rives; Robba; M. Robineau; Roquet; Rosenstock; Roset; V. Roux; Sagné; P. Salvagnac; M. Saint-Juvin; Sambussy; J. Schilling; H. Sebban; L. Simon; L. Soulier; R. Vallé; A. Vaudroy; N. Vedie; G. Vimbert; M. Veter; R. Weinzaepfel; A. Bugnard.
Assez bonnes solutions : MM. J. Devisme; Geffroy-Le Jan.
Solutions passables : Mlle Marignac; MM. Arbey; A. Authier; P. Cuillier; A. Martin; J. Mazeau; G. Meynaud; M. Pommerolle.]

ALGÈBRE

4124. — *Des deux égalités*

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0, \qquad (1)$$
$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0, \qquad (2)$$

la première entraîne la seconde et réciproquement.

N. B. — Un examen attentif de cette question fait reconnaître que les deux équations sont bien équivalentes, du moins si l'on s'en tient aux solutions réelles, et à des valeurs de a, b et c différentes les unes des autres et finies.

Le produit

$$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)$$

est identique à

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}+\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)},$$

or la somme des trois dernières fractions devient, après réduction au même dénominateur $(a-b)(b-c)(c-a)$,

$$\frac{(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

fraction dont le numérateur,

$$a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2,$$

est identiquement nul.

Il en résulte l'identité

$$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}.$$

Donc, si le premier facteur du premier membre est nul, le second membre est nul aussi : l'équation (1) entraîne donc bien l'équation (2).

Si le second membre est nul, il faut qu'un facteur du premier membre le soit. Il semble donc que l'équation (2) entraîne l'une ou l'autre des équations

$$A=\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0, \qquad (1)$$

$$B=\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=0; \qquad (3)$$

mais l'équation $B=0$ s'écrit

$$\frac{(c-a)(a-b)+(a-b)(b-c)+(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0,$$

et le numérateur de cette fraction,

$$-(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca),$$

est identique à

$$-\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2];$$

on voit qu'il ne peut être nul que si $a=b=c$, hypothèse qui a été écartée implicitement, pour que les expressions considérées aient un sens. Une impossibilité semblable ne se présente pas pour l'expression (A), qui, après réduction des termes au même dénominateur, s'écrit :

$$\frac{a(c-a)(a-b)+b(b-c)(a-b)+c(c-a)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}; \qquad (4)$$

le numérateur est un polynome du troisième degré en a, b et c

$$-a^3-b^3-c^3+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)-3abc$$

ou

$$f(a)\equiv -a^3+a^2(b+c)+a(b^2+c^2-3bc)-(b+c)(b-c)^2;$$

quelles que soient les valeurs données à b et à c, il existe certainement une valeur de a pour laquelle ce polynome est nul : la forme (4) montre que cette valeur est différente de b et de c, car

$$f(b)=-c(c-b)^2,$$
$$f(c)=-b(c-b)^2.$$

Donc, trois valeurs de a, b, c (réelles), dont deux quelconques ne sont pas égales, qui annulent la quantité

$$c=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}$$

annulent aussi A.

(Solution analogue : A. JULOU, à Guingamp.)

[Bonnes solutions de MM. Herbiet, à Marneffe; H. C. Lotard-Doazan, école pratique d'Agen; M., à Guéret.
Assez bonnes solutions de MM. F. Baujard; R. Marchant, athénée d'Anvers; A. Sebban, à Batna (Constantine).]

GÉOMÉTRIE

4064. — *On considère trois cordes AA', BB', CC' d'une sphère O, rectangulaires deux à deux et se coupant en un point S intérieur à la sphère. On joint les extrémités de ces cordes de manière à déterminer un octaèdre inscrit à faces triangulaires dont les diagonales sont AA', BB', CC'.*

1° *La somme des carrés des arêtes de deux faces opposées est la même pour les quatre couples d'arêtes. La somme des carrés des aires de quatre faces qui n'ont pas d'arête commune est constante.*

2° *Les hauteurs des tétraèdres trirectangles de sommet S et ayant pour faces celles de l'octaèdre passent aux centres de gravité des faces opposées.*

3° *Les orthocentres et les centres de gravité des faces de l'octaèdre sont seize points d'une même sphère.*

4° *Les centres des sphères circonscrites aux tétraèdres trirectangles de sommet S sont huit points d'une même sphère.*

5° *Les milieux des arêtes de l'octaèdre et les pieds des hauteurs des faces sont vingt-quatre points d'une même sphère concentrique à la précédente.*

6° *Lorsque les cordes AA', BB', CC' tournent autour de S supposé fixe, la somme des carrés des arêtes de l'octaèdre, la somme des produits de quatre arêtes situées dans un même plan, etc., restent constantes.*

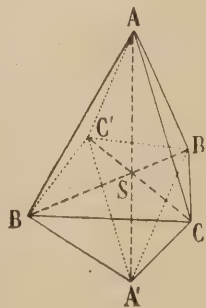
Nous nous appuierons dans le cours de la démonstration sur quatre lemmes dont les démonstrations ne présentent aucune difficulté et sont d'ailleurs bien connues.

Lemme I. — Si SABC est un tétraèdre trirectangle en S, entre les aires des faces existe la relation

$$(\text{aire ABC})^2=(\text{aire SAB})^2+(\text{aire SBC})^2+(\text{aire SCA})^2.$$

Lemme II. — Si SABC est un tétraèdre trirectangle en S, le pied H de la hauteur SH est l'orthocentre du triangle ABC.

Lemme III. — Si ASA', BSB' sont deux cordes rectangulaires d'un cercle, les droites qui joignent S aux milieux de AB, de AB', de A'B, de A'B' sont respectivement perpendiculaires à A'B', A'B, AB', AB.



Lemme IV. — Si Sα, Sβ, Sγ sont trois arêtes d'un parallélépipède et O le sommet opposé à S, le centre de gravité Γ du triangle αβγ est au tiers de SO à partir de S.

1° *a)* Les faces opposées de l'octaèdre sont ABC et A'B'C'; A'BC et AB'C'; AB'C et A'BC'; ABC' et A'B'C. Considérons les deux premières; les triangles ASB, BSC, CSA, A'SB', B'SC', C'SA' sont tous rectangles en S et on a

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{A'B'}^2+\overline{B'C'}^2+\overline{C'A'}^2=\overline{SA}^2+\overline{SB}^2+\overline{SB}^2+\overline{SC}^2+\overline{SC}^2+\overline{SA}^2+\overline{SA'}^2+\overline{SB'}^2+\overline{SB'}^2+\overline{SC'}^2+\overline{SC'}^2+\overline{SA'}^2$$
$$=2(\overline{SA}^2+\overline{SB}^2+\overline{SC}^2+\overline{SA'}^2+\overline{SB'}^2+\overline{SC'}^2)=2k^2.$$

Elle est évidemment la même pour les trois autres couples, puisque sa valeur ne change pas quand on permute A et A′, B et B′, C et C′.

1° *b*) Les quatre faces ABC, AB′C′, A′BC′, A′B′C n'ont pas d'arête commune et il en est de même des quatre autres, dont on obtient les noms en remplaçant dans les noms précédents chaque lettre par la lettre accentuée correspondante et réciproquement.

Le tétraèdre SABC étant trirectangle en S, on a (lemme I)

$$(\text{aire ABC})^2 = (\text{aire SAB})^2 + (\text{aire SBC})^2 + (\text{aire SCA})^2$$
$$= \frac{1}{4}(\overline{SA}^2.\overline{SB}^2 + \overline{SB}^2.\overline{SC}^2 + \overline{SC}^2.\overline{SA}^2).$$

De même,

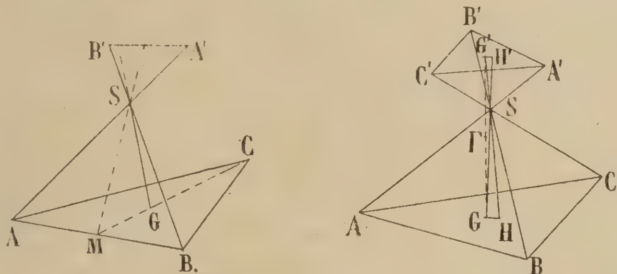
$$(\text{aire AB'C'})^2 = \frac{1}{4}(\overline{SA}^2.\overline{SB'}^2 + \overline{SB'}^2.\overline{SC'}^2 + \overline{SC'}^2.\overline{SA}^2),$$
$$(\text{aire A'BC'})^2 = \frac{1}{4}(\overline{SA'}^2.\overline{SB}^2 + \overline{SB}^2.\overline{SC'}^2 + \overline{SC'}^2.\overline{SA'}^2),$$
$$(\text{aire A'B'C})^2 = \frac{1}{4}(\overline{SA'}^2.\overline{SB'}^2 + \overline{SB'}^2.\overline{SC}^2 + \overline{SC}^2.\overline{SA'}^2).$$

La somme des carrés des aires des quatre faces considérées est donc égale à

$$\frac{1}{4}[(\overline{SA}^2 + \overline{SA'}^2)(\overline{SB}^2 + \overline{SB'}^2) + (\overline{SB}^2 + \overline{SB'}^2)(\overline{SC}^2 + \overline{SC'}^2)$$
$$+ (\overline{SC}^2 + \overline{SC'}^2)(\overline{SA}^2 + \overline{SA'}^2)],$$

elle est d'ailleurs la même pour l'autre groupe de quatre faces, puisque sa valeur ne change pas quand on permute A avec A′, B avec B′, C avec C′.

2° Soit M le milieu de AB, G le centre de gravité de ABC (G est sur CM); A′B′ est perpendiculaire à SM (lemme III); d'autre part, A′B′ étant dans le plan ASB est perpendiculaire à SC, A′B′ est donc perpendiculaire au plan MSC et par suite à SG. On verrait



de même que B′C′ est perpendiculaire à SG, qui est par suite hauteur du tétraèdre SA′B′C′.

3° Soit Γ le centre des moyennes distances des six sommets de l'octaèdre; il est au milieu de la droite qui joint les centres de gravité de deux faces opposées de l'octaèdre; nous allons montrer qu'il est équidistant des centres de gravité des huit faces. Considérons les centres de gravité G et G′ des faces opposées ABC et A′B′C′, on a

$$\overline{SG}^2 + \overline{SG'}^2 = 2\overline{S\Gamma}^2 + 2\overline{\Gamma G}^2,$$

d'autre part

$$3\overline{SG}^2 = \overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 + \overline{SC}^2 - \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2}{3},$$
$$3\overline{SG'}^2 = \overline{SA'}^2 + \overline{SB'}^2 + \overline{SC'}^2 - \frac{\overline{A'B'}^2 + \overline{B'C'}^2 + \overline{C'A'}^2}{3},$$

d'où l'on déduit, en tenant compte des résultats trouvés au 1° *a*),

$$2\overline{\Gamma G}^2 = \frac{k^2}{9} - 2\overline{S\Gamma}^2.$$

$\overline{\Gamma G}$ a donc la même valeur, quel que soit le couple de faces opposées considéré.

D'autre part, si H et H′ sont les points où SG′ et SG rencontrent respectivement les plans ABC, A′B′C′, on a vu (2°) que SH′ et SH sont les hauteurs des tétraèdres SA′B′C′ et SABC, on sait d'ailleurs (lemme II) que ces points sont les orthocentres de A′B′C′ et de ABC.

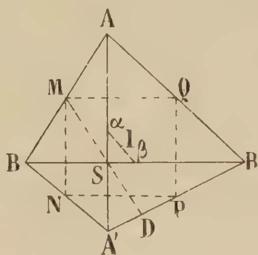
Les triangles GHG′ et GH′G′ étant rectangles en H et H′, on a

$$\Gamma H = \Gamma H' = \Gamma G,$$

donc les huit orthocentres sont sur la sphère Σ de centre Γ et de rayon ΓG.

4° Si on considère le parallélépipède rectangle ayant SA, SB, SC pour arêtes, le centre ω de la sphère circonscrite au tétraèdre SABC est le milieu de la diagonale SS′ de ce parallélépipède; or (lemme IV), SS′ passe par le centre de gravité G de ABC et on a $\overline{SS'} = 3\overline{SG}$, donc $\overline{S\omega} = \frac{3\overline{SG}}{2}$, le système des huit points ω est homothétique du système des huit points G, S étant le centre et $\frac{3}{2}$ le rapport d'homothétie, les huit points ω sont donc sur la sphère Φ ayant pour centre le point Ω situé sur SΓ et tel que $\overline{S\Omega} = \frac{3}{2}\overline{S\Gamma}$; son rayon est d'ailleurs égal à $\frac{3}{2}\Gamma G$.

5° Considérons les quatre arêtes contenues dans le plan des deux diagonales AA′, BB′; soient M, N, P, Q les milieux respectifs de AB, BA′, A′B′, B′A, α et β ceux de AA′ et de BB′, D le point où MS rencontre A′B′; d'après le lemme III, SD est perpendiculaire à A′B′, or CS et C′S sont perpendiculaires au plan AA′BB′ : donc, en vertu du théorème des trois perpendiculaires, CD et C′D sont hauteurs des triangles CA′B′, C′A′B′ et le point D est un des douze pieds de hauteurs considérés.

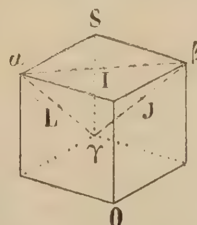


Il en est de même des trois autres points analogues, situés sur AB, BA′, B′A; ainsi parmi les vingt-quatre points considérés, huit sont dans le plan AA′BB′; ils sont d'ailleurs sur un même cercle, car MNPQ étant un rectangle et $\widehat{MDP}$ étant droit, le cercle MNPQ passe par D et les trois points analogues.

Ce cercle a pour centre le point de rencontre de MP et de NQ, qui est le milieu I de αβ.

Si γ est le milieu de CC′, on verrait de même que parmi les vingt-quatre points considérés huit sont dans le plan BB′CC′ et sont sur un cercle ayant pour centre le milieu J de βγ; enfin que les huit derniers sont dans le plan CC′AA′ sur un cercle ayant pour centre le milieu L de γα.

Considérons le parallélépipède rectangle d'arêtes Sα, Sβ, Sγ : le sommet opposé à S, étant dans le plan perpendiculaire à Sα en α, est équidistant de A et de A′; il est aussi équidistant de B et de B′ et équidistant de C et de C′ : c'est donc le centre O de la sphère donnée.



Les perpendiculaires menées respectivement par I, J et L aux plans αSβ ou AA′BB′, βSγ ou BB′CC′, γSα ou CC′AA′ se coupent au milieu de SO. Ce milieu coïncide d'ailleurs avec Ω, centre de la sphère Φ définie au 4°. En effet, le centre des moyennes distances des six sommets de l'octaèdre coïncide avec le centre de gravité du triangle αβγ; on a donc

$$SO = 3S\Gamma, \qquad \text{donc} \qquad \frac{SO}{2} = \frac{3S\Gamma}{2} = S\Omega.$$

Calculons la distance de Ω à l'un quelconque des huit points M, N, P, Q, D...

$$\overline{\Omega M}^2 = \overline{\Omega I}^2 + \overline{IM}^2 = \overline{\Omega I}^2 + \frac{\overline{MP}^2}{4} = \overline{\Omega I}^2 + \frac{\overline{MN}^2 + \overline{NP}^2}{4} = \overline{\Omega I}^2 + \frac{\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2}{16};$$

d'ailleurs

$$\overline{AA'}^2 = (\overline{AS} + \overline{SA'})^2 = (\overline{SA} + \overline{SA'})^2 - 4\overline{SA}.\overline{SA'} = 4\overline{S\alpha}^2 - 4(\overline{OS}^2 - \overline{R}^2),$$

où R est le rayon de la sphère donnée;

$$\overline{BB'}^2 = 4\overline{S\beta}^2 - 4(\overline{OS}^2 - \overline{R}^2),$$

$$\Omega I = \frac{S\gamma}{2},$$

donc

$$\overline{\Omega M}^2 = \frac{\overline{S\alpha}^2 + \overline{S\beta}^2 + \overline{S\gamma}^2}{4} - \frac{\overline{OS}^2 - R^2}{2} = \frac{\overline{SO}^2}{4} - \frac{\overline{SO}^2}{2} + \frac{R^2}{2} = \frac{2R^2 - \overline{SO}^2}{4}.$$

On trouverait d'ailleurs la même expression pour les distances de M aux huit points situés dans le plan BB'CC' et aux huit points du plan CC'AA'. Ces vingt-quatre points sont donc sur une sphère φ, concentrique à Φ, et ayant pour rayon $\dfrac{\sqrt{2R^2 - \overline{SO}^2}}{2}$.

6° Soient r, r', r'' les rayons des sections de la sphère par les plans $\beta S\gamma$, $\gamma S\alpha$, $\alpha S\beta$; on a

$$r^2 = R^2 - \overline{S\alpha}^2, \qquad r'^2 = R^2 - \overline{S\beta}^2, \qquad r''^2 = R^2 - \overline{S\gamma}^2,$$

d'où

$$r^2 + r'^2 + r''^2 = 3R^2 - (\overline{S\alpha}^2 + \overline{S\beta}^2 + \overline{S\gamma}^2) = 3R^2 - \overline{OS}^2, \quad (1)$$

$$\overline{SB}^2 + \overline{SC}^2 + \overline{SB'}^2 + \overline{SC'}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{B'C'}^2 = \overline{BC'}^2 + \overline{B'C}^2 = 4r^2,$$

$$\overline{SC}^2 + \overline{SA}^2 + \overline{SC'}^2 + \overline{SA'}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{C'A'}^2 = \overline{C'A}^2 + \overline{A'C}^2 = 4r'^2,$$

$$\overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 + \overline{SA'}^2 + \overline{SB'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2 = \overline{A'B}^2 + \overline{B'A}^2 = 4r''^2,$$

d'où

$$\left.\begin{aligned}&\overline{SB}^2 + \overline{SC}^2 + \overline{SA}^2 + \overline{SB'}^2 + \overline{SC'}^2 + \overline{SA'}^2\\ &= 2(r^2 + r'^2 + r''^2) = 6R^2 - 2\overline{OS}^2,\end{aligned}\right\} (2)$$

$$\left.\begin{aligned}&\overline{BC}^2 + \overline{B'C'}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{C'A'}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2 = \overline{BC'}^2 + \overline{B'C}^2\\ &+ \overline{C'A}^2 + \overline{A'C}^2 + \overline{A'B}^2 + \overline{B'A}^2\\ &= 4(r^2 + r'^2 + r''^2) = 12R^2 - 4\overline{OS}^2.\end{aligned}\right\} (3)$$

Or,

$$AB.AB' = 2r''.AS,$$
$$A'B.A'B' = 2r''.A'S,$$

d'où

$$AB.AB'.A'B.A'B' = 4r''^2.AS.A'S = 4r''^2(R^2 - \overline{OS}^2),$$

de même

$$BC.BC'.B'C.B'C' = 4r^2.BS.B'S = 4r^2(R^2 - \overline{OS}^2),$$
$$CA.CA'.C'A.C'A' = 4r'^2.CS.C'S = 4r'^2(R^2 - \overline{OS}^2),$$

d'où

$$\left.\begin{aligned}&AB.AB'.A'B.A'B' + BC.BC'.B'C.B'C' + CA.CA'.C'A.C'A'\\ &= 4(3R^2 - \overline{OS}^2)(R^2 - \overline{OS}^2),\end{aligned}\right\} (4)$$

$$\overline{AA'}^2 = (AS + SA')^2 = \overline{SA}^2 + \overline{SA'}^2 + 2AS.SA'$$
$$= \overline{SA}^2 + \overline{SA'}^2 + 2(R^2 - \overline{OS}^2),$$

$$\overline{BB'}^2 = \overline{SB}^2 + \overline{SB'}^2 + 2(R^2 - \overline{OS}^2),$$

$$\overline{CC'}^2 = \overline{SC}^2 + \overline{SC'}^2 + 2(R^2 - \overline{OS}^2),$$

$$\left.\begin{aligned}&\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2 = \overline{SA}^2 + \overline{SA'}^2 + \overline{SB}^2 + \overline{SB'}^2\\ &+ \overline{SC}^2 + \overline{SC'}^2 + 6(R^2 - \overline{OS}^2) = 12R^2 - 8\overline{OS}^2.\end{aligned}\right\} (5)$$

Lorsque le trièdre trirectangle SABC tourne autour du point fixe S, les quantités désignées au 6° de l'énoncé restent constantes, en vertu des égalités (3) et (4).

L'égalité (5) prouve encore que $\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2$ reste constant; l'égalité (1) que la somme des aires des sections de la sphère par les trois plans diagonaux de l'octaèdre reste aussi constante.

Le centre Γ de la sphère Σ (3°), le centre Ω des sphères Φ (4°) et φ (5°) sont fixes, puisqu'ils sont sur SO, que

$$\overline{S\Gamma} = \frac{\overline{SO}}{3} \quad \text{et que} \quad \overline{S\Omega} = \frac{\overline{SO}}{2}.$$

Leurs rayons sont aussi constants : en effet l'égalité (2) montre que la quantité désignée par k^2 au 1° *a*) est égale à $6R^2 - 2\overline{OS}^2$, donc le rayon de Σ, $\sqrt{\dfrac{k^2}{18} - \overline{S\Gamma}^2}$ est égal à $\frac{1}{3}\sqrt{3R^2 - 2\overline{OS}^2}$; celui de Φ égal aux $\frac{3}{2}$ du précédent a pour valeur $\frac{1}{2}\sqrt{3R^2 - 2\overline{OS}^2}$; enfin on a vu plus haut (5°) que celui de φ était égal à

$$\frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - \overline{OS}^2}.$$

(M., à Guéret.)

[Bonne solution : M. J. Terracher, école primaire supérieure de Chasseneuil.]

SOLUTIONS D'EXERCICES

4066. — *On a une circonférence* O, *de rayon* R. *Un angle droit* CAB *pivote autour de son sommet* A, *qui est fixe : lieu du milieu* M *de la corde* BC.

Le triangle CAB étant rectangle, la médiane AM qui partage l'hypoténuse BC est la moitié de BC; AM = MC. Or

$$\overline{MC}^2 + \overline{MO}^2 = R^2,$$

donc

$$\overline{MA}^2 + \overline{MO}^2 = R^2. \quad (1)$$

Soit I le milieu de AO; le théorème de la médiane, appliqué au triangle AMO, donne

$$\overline{MA}^2 + \overline{MO}^2 = 2\overline{MI}^2 + 2\overline{IO}^2,$$

donc, en remplaçant $\overline{MO}^2 + \overline{MA}^2$ par la valeur trouvée plus haut, il vient

$$\overline{MI}^2 = \frac{1}{2}R^2 - \overline{IO}^2 = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{4}\overline{AO}^2. \quad (2)$$

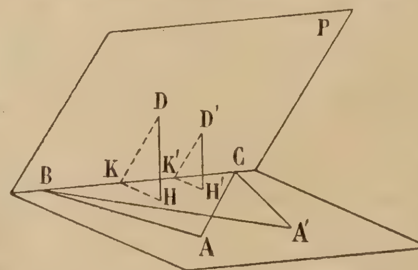
La distance IM est donc constante, le point M décrit un cercle dont le centre est le milieu de AO. Comme MO en vertu de (1) est évidemment inférieur à R, ce cercle est intérieur au cercle O; il est décrit en entier.

4074. — *Deux tétraèdres ont deux dièdres égaux,*

$$A(BC)D = A'(B'C')D',$$

les arêtes de ces dièdres ont même longueur BC = B'C'; *démontrer que le rapport des volumes des deux tétraèdres est égal au rapport des produits des faces comprenant les dièdres égaux.*

Faisons coïncider les arêtes égales BC et B'C', le plan de la face ABC avec A'B'C'; les deux sommets D et D' se trouveront alors dans un même plan P (si les tétraèdres ont même sens, on fera coïncider B avec B', C avec C'; si les tétraèdres ont des sens opposés, on placera B' sur C et C' sur B). Soient DH et D'H' les hauteurs abaissées de D et D' sur le plan AA'BC : les volumes des tétraèdres sont respectivement



$$3V = \text{aire}\, ABC \times DH \qquad \text{et} \qquad 3V' = \text{aire}\, A'BC \times D'H'.$$

Si de H et de H' on abaisse les perpendiculaires HK et H'K' sur BC, les points K et K' sont, d'après le théorème des trois perpendiculaires, les projections de D et D' sur BC; les angles HKD, H'K'D' sont égaux

comme étant l'un et l'autre l'angle plan du dièdre A(BC)D. Les triangles rectangles DHK, D'H'K' sont donc semblables, ce qui donne la proportion

$$\frac{DH}{D'H'} = \frac{DK}{D'K'} = \frac{BC.DK}{B'C'.D'K'} = \frac{\text{aire BCD}}{\text{aire B'C'D'}}.$$

On a donc bien

$$\frac{V}{V'} = \frac{\text{aire BAC} \times \text{aire BDC}}{\text{aire B'A'C'} \times \text{aire B'D'C'}}.$$

4075. — *Lieu des points d'un plan tels que le rapport de leurs distances à deux points fixes* A *et* B *extérieurs au plan, soit égal à* $\frac{m}{n}$. *Calculer les éléments du lieu, sachant que* $AB = 3$, $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$ *et que la droite* AB *est parallèle au plan et à une distance égale à* 1.

Le lieu des points de l'espace dont le rapport des distances à A et B est égal à $\frac{m}{n}$ est une sphère Σ, dont le centre C est un point de AB tel que $\frac{CA}{CB} = \frac{m^2}{n^2}$ et dont le rayon est $R = \sqrt{CA \times CB}$.

Pour qu'il y ait des points du lieu dans le plan H, il faut que la sphère Σ coupe le plan H; le lieu est alors un cercle, dont le centre ω est la projection de C sur H; son rayon r est donné par la formule

$$r^2 = CA \times CB - \overline{C\omega}^2.$$

Application :

$$\frac{CA}{4} = \frac{CB}{9} = \frac{CB - CA}{9 - 4} = \frac{3}{5};$$

donc

$$CA = \frac{12}{5}, \qquad CB = \frac{27}{5}.$$

$$R = \sqrt{CA.CB} = \frac{18}{5} = 3{,}6, \qquad r^2 = R^2 - \overline{C\omega}^2 = \frac{182}{25} - 1 = \frac{299}{25}.$$

Donc

$$r = \frac{\sqrt{299}}{5} = 3{,}458.$$

4076. — *On donne un triangle quelconque* ABC; *tracer à l'intérieur un triangle* MNP, *tel que* MN, NP, PM *passent respectivement par* A, B *et* C, *et que* $MN = MA$, $MP = PC$, $NP = BN$.

Soit M un sommet du triangle, N est homothétique de M par rapport à A, la raison étant 2; P est homothétique de N par rapport à B, avec la même raison, enfin une troisième homothétie, faite de C comme pôle, avec la raison 2, change P en M.

Donc M est un point qui ne change pas, quand on effectue la transformation qui résulte de la suite de ces trois homothéties. Or on sait que si l'on effectue trois homothéties consécutives, dont les raisons sont λ, μ et ρ, la suite de ces transformations équivaut à une homothétie unique, dont la raison est le produit $\lambda\mu\rho$ des raisons. Et le seul point qui reste invariable est le pôle de cette homothétie résultante. Pour le trouver, il suffit de construire deux couples de points correspondants L, L' et K, K', le pôle sera le point commun aux droites LL' et KK'.

On simplifie les constructions par un choix convenable de L_0 et de K_0. Prenons L_0 au milieu de AB, la première homothétie donne L_1, qui coïncide avec B, ainsi que L_2; L_3 s'obtient en portant $CL_3 = 2CB$. Le point M est situé sur la droite L_3L_0 et il la divise dans le rapport $\frac{ML_3}{ML_0} = 8$, ce qui le détermine; mais on peut construire une seconde droite qui passe en M. Prenons pour K_0 le milieu de la médiane AK_1; le point K_1 est connu, K_2 coïncide avec C, ainsi que K_3, le point M appartient donc à la droite CK_0.

M étant connu, il suffira de construire ses homologues successifs, N, P; l'homologue de P devra coïncider avec M.

Remarquons que BNP sera parallèle à L_3L_0M, ce qui donne un moyen simple de construire le triangle MNP : BNP est parallèle à L_0L_3, CPM à K_1R, et AMN à ST ($AC = CR$ et $BA = AT$).

4077. — *Soient deux circonférences qui se coupent en* A *et* B, FJ *et* KH *leurs tangentes communes extérieures; on considère les points* I, L, M, N, *tels que*

$$\frac{LF}{LJ} = \frac{IK}{IH} = \frac{MO}{MO'} = -\frac{r}{r'} = -\frac{NO}{NO'};$$

démontrer que les six points A, B, I, L, M, N *sont sur une même circonférence.*

Remarquons d'abord que le point N qui divise extérieurement la ligne des centres dans le rapport des rayons est le centre de similitude externe des deux cercles; c'est le point où les tangentes communes extérieures rencontrent la ligne des centres; le point M est le centre de similitude interne. Les points M et N sont alors les points de rencontre de la ligne des centres avec les bissectrices de l'angle OAO' : le cercle décrit sur MN comme diamètre passe donc en A et en B.

Les points O et O' se projettent en F et J sur la tangente commune extérieure; la projection du point M sur FJ est un point U tel que $\frac{UF}{UJ} = \frac{MO}{MO'}$, ce point coïncide avec L. La circonférence tracée sur MN comme diamètre passe donc en L et en I.

4078. — *On donne une sphère de rayon* R *et un cône inscrit de hauteur* h. *Couper le cône et la sphère par un plan parallèle à la base du cône, tel que la section du cône soit à la section déterminée par la sphère dans un rapport* k.

L'énoncé signifie que les aires des cercles suivant lesquels la sphère et le cône coupent le plan sécant doivent avoir un rapport égal à k.

Rayon du cercle section de la sphère :

$$r^2 = AH \times HB;$$

rayon du parallèle, section du cône :

$$HP = \rho = IC \times \frac{AH}{AI},$$

donc

$$\rho^2 = \overline{IC}^2 \times \frac{\overline{AH}^2}{\overline{AI}^2} = AI.IB.\frac{\overline{AH}^2}{\overline{AI}^2} = \frac{IB.\overline{AH}^2}{AI}.$$

Si $\rho^2 = k^2r^2$, il en résulte

$$\frac{IB.AH}{AI} = k^2.HB, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{AH}{HB} = k^2.\frac{AI}{IB}.$$

Le point H est donc déterminé par le rapport $\frac{AH}{HB}$; comme il doit être entre A et I, le problème a une solution si $\frac{AH}{HB} < \frac{AI}{IB}$, donc si $k^2 < 1$ (condition d'ailleurs évidente, le cercle du cône étant intérieur à celui de la sphère).

EXAMENS ET CONCOURS DE 1920 (*Suite.*)

ÉCOLES NATIONALES D'ARTS ET MÉTIERS

(EXAMEN D'ENTRÉE DES ALSACIENS-LORRAINS.)

Arithmétique et algèbre.

I. — Démontrer que le carré de tout nombre impair divisé par 8 donne 1 pour reste.

II. — Quel poids de cuivre faut-il retirer d'un lingot d'argent pesant 15^{kg}, au titre de 0,900, pour élever le titre à 0,950?

III. — Effectuer les produits suivants :

$$(1 + x^2 + x\sqrt{2})(1 + x^2 - x\sqrt{2});$$
$$(x - y)^2(x + y)^2(x^2 + y^2)^2.$$

IV. — **4239**. Déterminer λ de façon que

$$x^4 - 5x^2 + 4x - \lambda$$

soit divisible par $2x + 1$ et trouver le quotient.

V. — Résoudre l'inégalité

$$\frac{x - 3}{x - 4} > 0.$$

Géométrie.

I. — **4240**. 1° La bissectrice de l'angle α du triangle ABC divise le côté BC en deux parties dont le rapport $\frac{DB}{DC}$ est égal à $\frac{5}{7}$.

Calculer les côtés AB et AC, sachant que

$$AB + AC = 288^{cm}.$$

2° Construire un triangle ABC, connaissant le côté $AB = c$, l'angle $\alpha = 60°$ et la somme des deux autres côtés $BC + AC = S$.

II. — **4241**. 1° Quelle est la condition nécessaire pour qu'une sphère puisse être inscrite dans un cône droit tronqué, de manière à être tangente aux deux bases et à la surface latérale du cône?

2° Calculer le rayon ρ de cette sphère, connaissant les rayons R et r des deux bases du cône.

3° Trouver le rayon ρ par voie de construction.

4° Calculer la surface latérale du cône tronqué en fonction de $R = 18^{cm}$ et de $r = 8^{cm}$.

Physique.

I. — Description d'une pompe à incendie.

II. — Un morceau de platine d'un volume de $0^{dm3},08$ pèse $1^{kg},7$. Calculer la densité du platine.

III. — Une veine d'eau sort régulièrement par un trou circulaire d'une section de 3^{cm2}; elle a une vitesse constante de 2^m par seconde. Quelle quantité d'eau sort par heure?

Chimie.

1° Définir un *mélange*, une *combinaison* (différences essentielles). Citer quatre combinaisons en donnant la formule du corps et son nom chimique.

2° L'oxygène. État naturel. Préparation. Propriétés.

3° Écrire sous forme d'égalités les combustions du magnésium et de l'hydrogène.

ÉCOLES NATIONALES PROFESSIONNELLES

Arithmétique.

I. — Le poids d'un litre d'huile est de 920^g. Un vase plein d'huile pèse $26^{kg},450^g$. Le poids du vase vide est les $\frac{3}{20}$ du poids de l'huile qu'il contient. On demande : 1° quelle est la capacité du vase ; 2° quelle est la valeur de l'huile qu'il contient, sachant que l'hectolitre vaut 735^f.

II. — Un ouvrier est chargé de poinçonner des trous dans des plaques en tôle et se sert pour cela d'une machine qui donne 24 coups par minute. Il utilise un coup sur deux pour le poinçonnage des trous en ligne droite et un coup sur trois lorsque les trous sont en ligne brisée.

1° On le charge de poinçonner 75 trous en ligne droite suivis de 45 trous en ligne brisée. Quel temps mettra-t-il pour exécuter ce travail?

2° Sachant que cet ouvrier a poinçonné 320 trous, les uns en ligne droite, les autres en ligne brisée, en $\frac{1}{2}$ heure, on demande combien il en a percé en ligne droite et combien en ligne brisée.

3° L'ouvrier reçoit pour son travail : 1° un salaire fixe de $1^f,50$ l'heure; 2° une prime de $0^f,000625$ par trou percé en ligne droite et de $0^f,00095$ par trou percé en ligne brisée. Quelle est la somme qui lui est due?

4° Combien, dans ces conditions, gagnerait-il par journée de 8 heures; par semaine de 48 heures; en une année de 306 jours de travail?

III. — On vous demande de multiplier par 1 000 le nombre décimal 27,456789. Comment ferez-vous et pourquoi?

EXAMEN D'ENTRÉE DES ALSACIENS ET LORRAINS

I. — Un vase vide pèse 260^g; plein d'huile, il pèse $1\,364^g$ et plein d'eau $1\,460^g$. Quelle est sa capacité et quelle est la densité de l'huile?

II. — Un ouvrier métallurgiste gagne $2^f,15$ de l'heure et travaille 8 heures par jour. Pendant un mois il dépense 360^f.

Sachant qu'il a travaillé 25 jours dans ce mois, quelle est son économie mensuelle et combien mettra-t-il de mois à économiser $1\,050^f$?

III. — Sur une carte à l'échelle de $\frac{1}{200\,000}$, la distance de Strasbourg à Colmar est de $31^{cm},5$. Quelle est, sur le terrain, la distance entre ces deux villes?

De Strasbourg à Metz, il y a, à vol d'oiseau, 130^{km}. Quelle est, en millimètres, sur la carte au $\frac{1}{200\,000}$, la distance entre ces deux villes?

QUESTIONS PROPOSÉES

4242. — Une table ronde a $1^m,20$ de diamètre : deux segments de cette table se rabattent verticalement sur les côtés, les charnières étant deux lignes symétriques par rapport au centre. Calculer la surface de la partie ainsi réduite, sachant qu'elle a $0^m,60$ de largeur.

(*Brevet de l'enseignement primaire supérieur, Dijon*, 1920.)

4243. — On considère les deux progressions géométriques

$$\div\!\div\; 50 : 100 : 200$$

de raison 2 et

$$\div\!\div\; 768 : 384 : 192$$

de raison $\frac{1}{2}$; la somme de x termes de la première et d'un même nombre de termes de la seconde, à partir des premiers, est 7 874. Trouver le nombre x de ces termes.

(Paul Louon, athénée d'Ixelles.)

4244. — Trouver la loi des quotients et celle des restes sucessifs des divisions suivantes :

$a - 1$ par b, $ab - 1$ par b^2, $ab^2 - 1$ par b^3, ... $ab^{n-1} - 1$ par b^n, a et b désignant des nombres entiers.

(Alfred Haudrechy.)

4245. — Soit $O(xyz)$ un trièdre trirectangle en O, S un point donné sur Oz, A un point variable sur Ox, B un autre point sur Oy, tels que l'angle ASB soit constant; montrer que la surface ASB est aussi constante.

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie Paul BRODARD.

23e Année. 1er Avril 1921. No 13.

L'Éducation Mathématique

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

PRIX DU NUMÉRO : France et Colonies, 0 fr. 60. Étranger, 0 fr. 70.
ABONNEMENT ANNUEL : France et Colonies, 10 fr. Étranger, 12 fr.

Tous les abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, l'on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction : Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Abonnements : Librairie **Vuibert**, Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ÉCOLE D'ARTS ET MÉTIERS D'ERQUELINNES

Concours de 1920.

4199. — *Démontrer qu'aucun nombre entier composé d'un seul chiffre répété plusieurs fois ne peut être un carré parfait.*

Il est *a priori* évident qu'un nombre ne peut être carré, s'il s'écrit avec des chiffres 2, 3, 7 ou 8, car le carré d'un entier n'est jamais terminé par un de ces chiffres.

Les carrés des nombres terminés par les chiffres 1 et 9 ont 1 pour chiffre des unités, car

$$(10m \pm 1)^2 = 100m^2 \pm 20m + 1,$$

mais le chiffre des dizaines est pair : donc un nombre qui se termine par deux chiffres 1 ne peut être carré.

La même remarque exclut les nombres terminés par les chiffres 9 ou 5. On a

$$(10m \pm 3)^2 = 100m^2 \pm 60m + 9,$$

le chiffre des dizaines est pair.

De même,

$$(10m + 5)^2 = 100m^2 + 100m + 25$$
$$= 100m(m+1) + 20 + 5.$$

Il reste à examiner le cas des nombres qui s'écrivent avec les chiffres 4, et de ceux qui s'écrivent avec des 6.

Un nombre $N = 44\ldots44$ est le produit de 4 par un nombre qui s'écrit avec des chiffres 1. Le facteur 4 étant carré, si N est un carré, le second facteur l'est aussi; or comme il s'écrit avec des chiffres 1, c'est impossible, ainsi qu'on l'a vu.

Un raisonnement analogue s'applique à un nombre qui s'écrit avec des chiffres 6.

On a $\quad N = 66\ldots66 = 2 \times 3 \times 11\ldots11.$

Ce nombre ne peut être carré, car l'exposant du facteur 2 y est égal à l'unité.

(Auguste CIEUTAT, à Montivilliers, Seine-Inférieure.)

Remarque. — On peut dire aussi qu'un nombre terminé par 6 est le carré d'un nombre de la forme $10m \pm 4$; or on a

$$(10m \pm 4)^2 = 100m^2 \pm 80m + 10 + 6;$$

le chiffre des dizaines est *impair*, et par conséquent différent de 6.

N. B. — Plusieurs solutions ont été écartées parce que le raisonnement manquait de rigueur; d'autres, parce que la question traitée était beaucoup moins générale que la question posée, les nombres étudiés n'ayant que trois chiffres.

[Bonnes solutions : MM. G. Bruniquel; W. Burniat; R. Chasselut; J. Devisme; E. Garandel; F.-A. Gilly; G. Knoll; H.-C. Lotard-Doazan; P. Louon; M., à Guéret; Ménéchal; F. Négretzu; Philizot; H. Sebban.
Assez bonnes solutions : MM. J. Barbot; G. Olivier.]

4200. — *Trouver deux nombres de trois chiffres, entiers et consécutifs, sachant que chacun d'eux est égal à la somme des cubes de ses chiffres.*

Soit $\overline{abc}$ le plus petit nombre, celui qui le suit est $\overline{abc} + 1$. Deux cas sont à distinguer, suivant que c est égal ou inférieur à 9. Si $c = 9$, le premier nombre est $\overline{ab9}$, le second s'écrit avec les chiffres a, $b+1$ et 0, ou même, si b est égal à 9, avec les chiffres $a+1$, 0, 0.

Nous allons écarter d'abord ces deux hypothèses : il est impossible que

$$100(a+1) = (a+1)^3,$$

car cela donnerait

$$100 = (a+1)^2,$$

d'où $a = 9$, le nombre $999 + 1$ a quatre chiffres. Donc b n'est pas égal à 9 : essayons si l'on peut avoir

$$100a + 10b + 9 = a^3 + b^3 + 729,$$
$$100a + 10(b+1) = a^3 + (b+1)^3;$$

en retranchant la première égalité de la seconde, il vient

$$1 = (b+1)^3 - b^3 - 729,$$

ou

$$729 = 3b^2 + 3b,$$
$$243 = b(b+1),$$

ce qui est impossible, car $b(b+1)$ est pair et de plus inférieur à 90. Donc b et c sont différents de 9. La propriété que doivent posséder les nombres est donc exprimée par les égalités

$$100a + 10b + c = a^3 + b^3 + c^3,$$
$$100a + 10b + c + 1 = a^3 + b^3 + (c+1)^3. \qquad (1)$$

En retranchant la première équation de la seconde, on obtient

$$1 = (c+1)^3 - c^3,$$
$$0 = 3c(c+1).$$

Cette égalité exige $c = 0$. Le chiffre des unités étant nul, les équations (1) deviennent

$$100a + 10b = a^3 + b^3,$$
$$100a + 10b + 1 = a^3 + b^3 + 1; \qquad (2)$$

la seconde est identique à la première. Le problème est donc ramené à trouver deux nombres entiers, compris entre 1 et 9, satisfaisant à l'égalité

$$100a + 10b = a^3 + b^3. \qquad (3)$$

La somme des cubes de a et de b est divisible par 10. Or les cubes des neuf premiers nombres sont terminés

pour	1	2	3	4	5	6	7	8	9
par	1	8	7	4	5	6	3	2	9,

on peut les associer deux à deux de façon que la somme soit terminée par un zéro. On forme ainsi les couples

1 et 9,
2 et 8,
3 et 7,
4 et 6,
5 et 5,

On voit donc que la somme $b + a = 10$. On peut alors poser $b = 10 - a$, en écrivant l'équation (3) sous la forme

$$(100 - a^2)a = (b^2 - 10)b,$$

ou

$$(10 - a)(10 + a)a = (b^2 - 10)b$$

et en remplaçant b par $10 - a$, on voit qu'on peut diviser les deux membres par $10 - a$, qui n'est pas nul; il vient alors

$$10a + a^2 = (10 - a)^2 - 10 = a^2 - 20a + 90,$$

ce qui donne

$$30a = 90,$$
$$a = 3 \quad \text{et} \quad b = 7.$$

Les nombres cherchés sont 370 et 371. En effet,

$$370 = 27 + 343,$$
$$371 = 27 + 343 + 1.$$

(PHILIZOT.)

N. B. — La solution précédente montre qu'on pouvait arriver aux seuls nombres répondant à la question, sans aucun tâtonnement.

[Bonnes solutions : Mlles G. Boulay; M. Koch; M. Marignac; MM. Burniat; Ch. Caussin; B. Charles; R. Chasselut; G. Clément; A. Cieutat; J. Clamens; Courboulay; C. Crépeau; J. Devisme; J. Dirant; E. Guicheney; R. Hacquin; F. Lapeyrère; M., à Guéret; Ménéchal; E.-G. Mitard; R. Morel; L.-G. Papon; M. Pommerolle; R. Reynard; H. Sebban.
Assez bonnes solutions : MM. Ch. Andrei; P. Baylac; V. Bourden; R. Brunetau; G. Bruniquel; J. Cartouzou; M. Châtelier; E. Delmas; A. Dubuc; F.-A. Gilly; A. Goëlo; E. Gœpp; G. Houalet; G. Knoll; R. Legrand; P. Louon; J. Magnani; R. Marchant; Y. Maurice; G. Meynaud; Ch. Norgelet; G. Olivier; R. Revel; Ed. Reynaud.]

4201. — *Un billet A est escompté en dedans, pour 3 mois, au taux de 3 °/₀ l'an, et un billet B est escompté en dehors, pour 4 mois, au taux de 4 °/₀. Dans ces conditions les deux billets ont même valeur actuelle.*

Si le billet A est escompté en dedans, pour 3 mois, au taux de 4 °/₀, et le billet B, en dehors, pour 4 mois, au taux de 3 °/₀, la différence des valeurs actuelles est 7f. Quelle est la valeur nominale du billet B?

L'intérêt d'une somme à 3 °/₀ pendant 3 mois est $\frac{9}{1\,200}$ de cette somme, soit $\frac{3}{400}$; l'intérêt à 4 °/₀ pendant 4 mois est $\frac{16}{1\,200} = \frac{4}{300}$.

Quand l'escompte est fait en dedans, la valeur actuelle d'un billet est égale au quotient de la valeur nominale par le binome $1 + tr$, qui est ici $\frac{403}{400}$; si l'escompte est fait en dehors, la valeur actuelle est le produit de la valeur nominale par $1 - tr$, qui est ici $1 - \frac{4}{300} = \frac{296}{300}$.

Si les valeurs nominales des billets sont a et b, on a

$$a\frac{400}{403} = b\frac{296}{300}. \qquad (1)$$

Si le taux d'escompte du billet A augmente, sa valeur actuelle diminue; d'autre part, la valeur actuelle du billet B augmente si le taux d'escompte diminue. Dans le second cas, c'est le billet B dont la valeur actuelle est la plus grande.

La valeur actuelle du billet a, escompté en dedans à 4 °/₀ pour 3 mois, est le quotient de a par $\left(1 + \frac{12}{1\,200}\right)$ ou par $\frac{101}{100}$, et celle de b, escompté en dehors à 3 °/₀ pendant 4 mois, est

$$b\left(1 - \frac{12}{1\,200}\right) = b\frac{99}{100};$$

on a donc

$$b\frac{99}{100} - a\frac{100}{101} = 7. \qquad (2)$$

Mettons les équations (1) et (2) sous une forme telle que le coefficient de a soit le même :

$$b\frac{296}{300} \times \frac{403}{4} - 100a = 0, \qquad (1')$$

$$b\frac{99 \times 101}{100} - 100a = 707, \qquad (2')$$

puis retranchons la première équation de la seconde : nous trouvons

$$b\left[\frac{99 \times 101}{100} - \frac{74 \times 403}{300}\right] = 707$$

ou

$$b\frac{29\,997 - 29\,822}{300} = 707,$$

$$\frac{7}{12}b = 707,$$

enfin

$$b = 1\,212.$$

La valeur nominale de b est 1 212f; celle de a est

$$1\,212 \times \frac{74}{100} \times \frac{403}{300} = 1\,204{,}8088$$

ou 1 204f,81.

(R. MARCHANT, athénée d'Anvers.)

[Bonnes solutions : Mlle G. Boulay; MM. Boulvert; R. Chasselut; A. Cieutat; R. Cluzaud; L. Fixe; Geffroy-Le Jan; F.-A. Gilly; A. Goëlo; Guicheney; G. Knoll; P. Louon; J. Magnani; H. Micard; J. Navel; L.-G. Papon; M. Pinot; J. Schilling; H. Sebban.]

4202. — *Quelle est, pour $x = 1$, la valeur limite de*

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x\sqrt{x} - x - \sqrt{x} + 1}} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x\sqrt{x} - \sqrt{x}}}?$$

Posons $\sqrt{x} = t$: il faut supposer que x tend vers 1 par valeurs supérieures à l'unité, pour que $\sqrt{x}(x - 1)$ soit positif, et que la racine de cette quantité existe.

L'expression considérée est alors

$$\frac{t - 1}{\sqrt{t^3 - t^2 - t + 1}} - \frac{t - 1}{\sqrt{t^3 - t}},$$

ou

$$\frac{t - 1}{\sqrt{(t^2 - 1)(t - 1)}} - \frac{t - 1}{\sqrt{t(t^2 - 1)}},$$

ou enfin

$$\frac{t - 1}{(t - 1)\sqrt{t + 1}} - \frac{\sqrt{t - 1}}{\sqrt{t(t + 1)}},$$

en remplaçant $\sqrt{(t - 1)^2}$ par $(t - 1)$, qui est positif d'après la remarque faite plus haut.

En divisant par $(t - 1)$ les deux membres du premier quotient, on a

$$\frac{1}{\sqrt{t + 1}} - \frac{\sqrt{t - 1}}{\sqrt{t(t + 1)}};$$

cette expression tend vers $\frac{1}{\sqrt{2}}$ quand t tend vers 1; la seconde fraction tend vers zéro.

(ROGER LEGRAND, école pratique d'industrie de Rive-de-Gier.)

N. B. — Nous recommandons à nos abonnés de bien examiner, avant de commencer un calcul :

1° L'utilité ou l'avantage de ce calcul (le résultat qu'on peut en attendre);

2° Le moyen le plus pratique, le plus direct de le faire.

Beaucoup des solutions que nous avons reçues donnent des calculs confus, indirects, qui arrivent au résultat cherché par des détours qu'il fallait éviter.

[Bonnes solutions : MM. J. Barbot; F. Baujard; P. Baylac; A. Blaise; G. Bruniquel; B. Charles; R. Chassolut; A. Cieutat; J. Clamons; G. Clément; M. Courboulay; E. Delmas; J. Devisme; P. Faucheux; G. Février; Geffroy-Le Jan; L. Giltou; E. Guicheney; J. Lassave; F. Lapeyrère; S. Louon; M., à Guéret; R. Marchant; Y. Maurice; G. Meynaud; J. Millour; R. Morel; F. Négretzu; A. Popu; E. Reynaud; Schilling; H. Sebban.]

4203. — *Le polynome*

$$3x^4 - 11x^2 + kx - 3$$

où k est un coefficient numérique positif, est égal à la différence des carrés de deux trinomes du second degré à coefficients entiers.

1° *Déterminer ces deux trinomes et la valeur de k;*

2° *Résoudre avec cette valeur de k*

$$3x^4 - 11x^2 + kx - 3 = 0.$$

Il s'agit de trouver deux polynomes *à coefficients entiers*,

$$ax^2 + bx + c \quad \text{et} \quad a'x^2 + b'x + c',$$

tels que

$$3x^4 - 11x^2 + kx - 3 \equiv (ax^2 + bx + c)^2 - (a'x^2 + b'x + c')^2.$$

On peut supposer que a et a' sont positifs, car on peut changer de signe les termes d'une parenthèse sans que le carré soit changé.

Il faut d'abord que les coefficients des termes extrêmes soient les mêmes dans les deux membres; cela donne

$$a^2 - a'^2 = +3,$$
$$c^2 - c'^2 = -3;$$

la première égalité s'écrit

$$(a - a')(a + a') = +3;$$

or a et a' étant entiers et positifs, cette égalité entraîne

$$a + a' = +3,$$
$$a - a' = +1,$$

d'où

$$a = 2 \quad \text{et} \quad a' = 1.$$

On a de même

$$c'^2 - c^2 = +3,$$

qui donne cette fois $c' = \pm 2$ et $c = \pm 1$.

Les polynomes cherchés sont donc

$$2x^2 + bx \pm 1 \quad \text{et} \quad x^2 + b'x \pm 2.$$

On ne peut associer que deux signes différents, car si l'on fait la différence

$$(2x^2 + bx \pm 1)^2 - (x^2 + b'x \pm 2)^2,$$

on trouve que le coefficient de x^3 est

$$4b - 2b'$$

et celui de x^2

$$b^2 - b'^2 \pm 4 \mp 4 = b^2 - b'^2;$$

le premier doit être nul, le second égal à -11, or c'est impossible si b et b' sont entiers, car l'équation $b'^2 - b^2 = 11$ donne

$$(b' - b)(b' + b) = 11$$

et, puisque b et b' sont entiers, on en tire

$$b' + b = \pm 11,$$
$$b' - b = \pm 1,$$

donc

$$b' = \pm 6, \qquad b = \pm 5;$$

ces valeurs sont incompatibles avec la condition $b' = 2b$.

Il reste alors deux hypothèses; la différence de carrés est

$$(2x^2 + bx + 1)^2 - (x^2 + b'x - 2)^2$$

ou

$$(2x^2 + bx - 1)^2 - (x^2 + b'x + 2)^2.$$

Dans le premier cas, on aura les équations

$$4b - 2b' = 0,$$
$$b^2 - b'^2 + 8 = -11;$$

dans le second, on aura

$$4b - 2b' = 0,$$
$$b^2 - b'^2 - 8 = -11.$$

Le premier cas conduit aussi à une conclusion impossible, car de

$$b'^2 - b^2 = 19,$$

on tire

$$b' + b = \pm 19,$$
$$b' - b = \pm 1,$$

puisque 19 est premier; donc

$$b' = \pm 10, \qquad b = \pm 9,$$

valeurs qui ne satisfont pas à la première condition.

La seconde hypothèse donne

$$b'^2 - b^2 = +3,$$

d'où

$$b' + b = 3,$$
$$b' - b = 1$$

et

$$b' = \pm 2, \qquad b = \pm 1;$$

la condition $2b - b' = 0$ est bien satisfaite; on a alors

$$3x^4 - 11x^2 + kx - 3 \equiv (2x^2 \pm x - 1)^2 - (x^2 \pm 2x + 2)^2$$

(les signes supérieurs ou les signes inférieurs étant associés).

Le coefficient de x sera alors

$$\mp 2 - (\pm 8)$$

si l'on prend les signes supérieurs, c'est -10; si l'on prend les autres, c'est $+10$. L'énoncé indiquant que le coefficient k est positif, il faut choisir les signes inférieurs. L'identité demandée est donc

$$3x^4 - 11x^2 + 10x - 3 \equiv (2x^2 - x - 1)^2 - (x^2 - 2x + 2)^2.$$

La décomposition du polynome du quatrième degré en un produit de deux facteurs en résulte immédiatement : c'est

$$(2x^2 - x - 1 + x^2 - 2x + 2)(2x^2 - x - 1 - x^2 + 2x - 2)$$

ou

$$(3x^2 - 3x + 1)(x^2 + x - 3).$$

Les racines de l'équation du quatrième degré sont les racines de ces trinomes; le premier n'en a pas; le second admet

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} = 1{,}8028,$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} = -2{,}3028.$$

(LASSAVE, à l'Isle, Haute-Garonne.)

[Bonnes solutions : MM. J. Barbot; F. Baujard; Ch. Caussin; Charles; A. Cieutat; J. Devisme; A. Dubuc; F.-A. Gilly; G. Houalet; G. Knoll F. Lapeyrère; R. Marchant; Y. Maurice; J. Millour; R. Morel; Philizot.

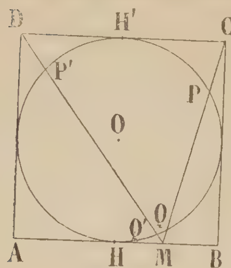
Assez bonnes solutions : MM. F. Bailbé; Geffroy-Le Jan; G. Olivier; H. Sebban.]

4204. — *Sur le côté* AB *d'un carré* ABCD, *on prend entre* A *et* B *un point* M *tel que les deux droites* MC *et* MD *divisent la surface du carré en trois triangles, dont l'un a pour surface la demi-somme des surfaces des deux autres.*

Calculer, en fonction du côté a du carré, les distances du point M

ainsi déterminé aux quatre points où les droites MC *et* MD *rencontrent le cercle inscrit dans le carré.*

Le plus grand des trois triangles est DMC, qui est équivalent à la moitié du carré, tandis que DAM et CBM sont plus petits que ADB.



Supposons que le point M soit plus près de B que de A : le triangle DAM est plus grand que MBC; l'ordre de grandeur des aires est donc

$$DMC > DMA > CMB;$$

c'est donc DMA qui peut être la moyenne arithmétique des deux autres.

Il est évident qu'à une position de M telle que DMA soit la demi-somme de DMC et de CMB correspond la position M', symétrique de M par rapport au milieu H de AB, telle que CM'B soit la demi-somme de DM'C et de DM'A.

Posons donc $AM = x$, $MB = y$, en supposant $x > y$. On aura d'abord $x + y = a$; il faut ensuite que

$$ay + aa = 2ax,$$

d'où l'on tire

$$2x - y = a.$$

Le système

$$x + y = a, \qquad 2x - y = a,$$

donne

$$x = \frac{2}{3}a \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{3}a.$$

Les droites MC et MD coupent respectivement le cercle inscrit en P, Q, P' et Q'. Posons d'abord $MP = z$, $MQ = t$ et $MC = d$.

En exprimant la puissance des points M et C par rapport au cercle (O), nous aurons les relations

$$MQ \times MP = \overline{MH}^2 = \frac{a^2}{36} \qquad \text{ou} \qquad zt = \frac{a^2}{36} \qquad (1)$$

et

$$CQ \times CP = \overline{CH'}^2 = \frac{a^2}{4} \qquad \text{ou} \qquad (d - z)(d - t) = \frac{1}{4}a^2, \quad (2)$$

mais on a

$$\overline{MC}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{BC}^2 \qquad \text{ou} \qquad d^2 = \frac{1}{9}a^2 + a^2 = \frac{10}{9}a^2;$$

l'équation (2) s'écrit donc, en remplaçant d^2 par cette valeur et en mettant pour zt la valeur fournie par l'équation (1),

$$\frac{10}{9}a^2 - d(z + t) + \frac{a^2}{36} = \frac{a^2}{4},$$

d'où

$$z + t = \frac{a^2}{d}\left(\frac{10}{9} + \frac{1}{36} - \frac{1}{4}\right) = \frac{8}{3\sqrt{10}}a.$$

On connaît donc la somme et le produit des longueurs z et t; ces deux inconnues sont racines de l'équation du second degré :

$$z^2 - \frac{8}{3\sqrt{10}}az + \frac{a^2}{36} = 0,$$

qui donne

$$MP = a\left(\frac{4}{3\sqrt{10}} + \sqrt{\frac{16}{90} - \frac{1}{36}}\right) = \frac{4\sqrt{10} + 3\sqrt{15}}{30}a,$$

$$MQ = a\left(\frac{4}{3\sqrt{10}} - \sqrt{\frac{16}{90} - \frac{1}{36}}\right) = \frac{4\sqrt{10} - 3\sqrt{15}}{30}a.$$

Or

$$\sqrt{10} = 3{,}162277, \qquad \sqrt{15} = 3{,}872983,$$

$$4\sqrt{10} = 12{,}649108, \qquad 3\sqrt{15} = 11{,}618949,$$

$$\frac{4\sqrt{10} + 3\sqrt{15}}{30} = 0{,}8089352\ldots, \qquad \frac{4\sqrt{10} - 3\sqrt{15}}{30} = 0{,}0343386\ldots.$$

Donc

$$MP = \frac{a}{30}(4\sqrt{10} + 3\sqrt{15}) = 0{,}8089352\,a,$$

$$MQ = \frac{a}{30}(4\sqrt{10} - 3\sqrt{15}) = 0{,}0343386\,a.$$

On calcule MP' et MQ' par le même procédé. Soit $MP' = u$, $MQ' = v$ et $MD = l$.

On a d'abord

$$l^2 = \overline{MA}^2 + \overline{AD}^2 = \frac{4}{9}a^2 + a^2 = \frac{13}{9}a^2,$$

puis

$$MP' \times MQ' = uv = \overline{MH}^2 = \frac{a^2}{36},$$

$$DP' \times DQ' = (l - u)(l - v) = \overline{DH'}^2 = \frac{a^2}{4};$$

en remplaçant dans la deuxième équation l^2 et uv par les valeurs calculées, on trouve :

$$\frac{13}{9}a^2 - l(u + v) + \frac{a^2}{36} = \frac{a^2}{4},$$

donc

$$u + v = \frac{a^2}{l}\left(\frac{13}{9} + \frac{1}{36} - \frac{1}{4}\right) = \frac{a^2}{l}\cdot\frac{11}{9} = \frac{11}{3\sqrt{13}}a.$$

On connaît encore la somme et le produit des deux longueurs u et v, qui sont racines de

$$u^2 - \frac{11}{3\sqrt{13}}au + \frac{a^2}{36} = 0.$$

$$MP' = \frac{a}{2}\left(\frac{11}{3\sqrt{13}} + \sqrt{\frac{121}{9 \times 13} - \frac{1}{9}}\right) = a\,\frac{11 + \sqrt{108}}{6\sqrt{13}} = a\,\frac{11\sqrt{13} + 6\sqrt{39}}{78},$$

$$MQ' = \frac{a}{2}\left(\frac{11}{3\sqrt{13}} - \sqrt{\frac{121}{9 \times 13} - \frac{1}{9}}\right) = a\,\frac{11 - \sqrt{108}}{6\sqrt{13}} = a\,\frac{11\sqrt{13} - 6\sqrt{39}}{78}.$$

On trouve

$$11\sqrt{13} = 39{,}6610640,$$

$$6\sqrt{39} = 37{,}469988,$$

$$\frac{11\sqrt{13} + 6\sqrt{39}}{78} = \frac{77{,}131052}{78} = 0{,}98886\,a,$$

$$\frac{11\sqrt{13} - 6\sqrt{39}}{78} = \frac{2{,}191076}{78} = 0{,}028090\,a.$$

(G. Bruniquel, école normale de Toulouse.)

N. B. — Ce calcul n'a pas été fait par des procédés directs et simples; aussi les résultats sont-ils très peu concordants.

[Bonnes solutions : MM. J. Barbot; F. Baujard; J. Devisme; F.-A. Gilly; E. Guicheney; P. Louon; R. Marchant; Milandre; Philizot; E. R.. à Ajaccio; A. Robba.

Assez bonnes solutions : MM. A. Cieutat; R. Hacquin; G. Knoll; L.-G. Papon; J. Rosec.]

4205. — *On donne, dans le plan, deux points fixes* O *et* O' *dont la distance est* $2a$. *On considère un point* A *mobile sur toute la longueur de la droite* OO', *et les deux cercles de centres* O *et* O' *tangents entre eux au point* A. *On mène par* A *une sécante* BC, *de longueur* $BC = b$ *donnée et inférieure à* $4a$, *qui rencontre le cercle* O *au point* B, *le cercle* O' *au point* C.

Il existe deux positions de cette sécante, symétriques par rapport à la droite OO'. *Soient* BC *et* B_1C_1 *ces deux sécantes, et soient* M *et* M_1 *les milieux de* BC *et* B_1C_1.

1° *Montrer que si* A *se déplace, la longueur* $BC = b$ *de la corde restant constante, le centre* K *du cercle circonscrit au triangle* AMM_1 *est un point fixe.*

2° *Construire les deux positions particulières* A' *et* A'' *du point* A, *pour lesquelles le triangle* OMM_1 *est équilatéral.*

3° *Montrer que si l'on pose*

$$\overline{KA'} = x, \qquad \overline{KA''} = y,$$

on a, quelle que soit la longueur b,

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{xy} = \frac{3}{a^2}.$$

(*On supposera dans cette vérification que* KA' *et* KA'' *sont deux*

segments orientés, en d'autres termes, x et y sont de même signe si A' et A" sont du même côté de K, et de signes contraires si A' et A" sont de part et d'autre de K.)

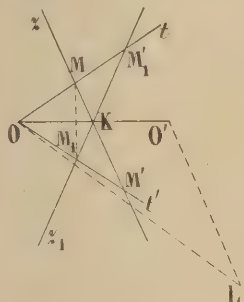
1° Menons par O la parallèle à BC, et prolongeons le rayon O'C qui coupe cette parallèle en L.

Le point A est un centre de similitude des cercles O et O', donc les rayons OB et O'C sont parallèles (de sens opposés si A est entre O et O', de même sens si A est extérieur au segment OO').

La figure OBCL est donc un parallélogramme,

$$OL = BC = b.$$

D'autre part, le triangle OO'L est semblable à AO'C, il est donc isocèle, et $OO' = O'L = 2a$. Le triangle OO'C est donc déterminé en grandeur et fixe (il faut supposer, pour qu'il existe, que $OL > 4a$). La parallèle à OB et O'L menée par le milieu M de BC coupe OO' en K et forme un triangle MKA, semblable à BOA, donc isocèle : le point K est le centre du cercle AMM_1 puisque $KM = KA$, et, par raison de symétrie, $KM = KM_1$.



Or le point K est fixe, car c'est le milieu de OO'.

2° Quand A se déplace sur OO', le lieu de M est la droite Kz parallèle à O'L menée par K, et l'on a en prenant un sens positif Kz sur cette droite, et un sens positif sur OO', $\overline{KM} = \overline{KA}$.

Le point M_1 décrit la droite Kz_1, symétrique de Kz par rapport à OO', M et M_1 sont symétriques par rapport à OO'.

Pour que le triangle MOM_1 soit équilatéral, il faut et il suffit que l'angle KOM soit égal à 30° en valeur absolue. Donc M est un point d'intersection de la droite Kz avec les droites inclinées à 30° sur OO', d'un côté ou de l'autre.

3° Si l'on prend Kz pour sens positif des segments tels que $\overline{KM}$, et OK pour sens positif des segments $\overline{KA}$, on a vu que

$$\overline{KM} = \overline{KA};$$

la relation qu'il s'agit d'établir entre les segments KA' et KA" est donc la même que celle qui existe entre les segments KM et KM' d'une sécante variable menée par un point K de la bissectrice d'un angle de 60°, tOt'.

Si par O on mène une perpendiculaire à OK, coupant Kz en I, K est conjugué harmonique de I par rapport à M et M', et l'on a

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{KI} = \frac{2 \sin \theta}{a},$$

en appelant θ l'angle de KM avec KE.

D'autre part, si l'angle KOM vaut 30°, le segment $\overline{HM}$ est $\frac{1}{2}\overline{OM}$, donc

$$\overline{OM} = 2\overline{HM} = 2\overline{KM} \cos \theta = 2x \cos \theta,$$

et

$$-\overline{OM'} = 2\overline{H'M'} = 2\overline{KM'} \cos \theta = 2y \cos \theta;$$

le théorème de la bissectrice donne

$$\overline{OK}^2 = \overline{OM}.\overline{OM'} + \overline{KM}.\overline{KM'} = \overline{OM}.\overline{OM'} + xy$$
$$= -4\overline{KM}.\overline{KM'} \cos^2 \theta + \overline{KM}.\overline{KM'}$$
$$= -xy(4 \cos^2 \theta - 1)$$
$$= +4yx \sin^2 \theta - 3xy;$$

on a donc

$$\frac{a^2}{xy} = 4 \sin^2 \theta - 3.$$

L'égalité (1) donnait

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{a^2}{y^2} + \frac{2a^2}{xy} = 4 \sin^2 \theta;$$

en égalant les deux valeurs de $4 \sin^2 \theta$, on obtient bien la relation demandée,

$$\left(\frac{a^2}{x^2} + \frac{a^2}{y^2} + \frac{a^2}{yx}\right) = 3.$$

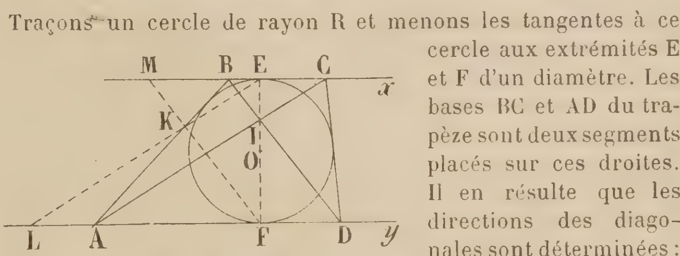
(M., à Guéret.)

[Bonnes solutions : MM. Geffroy-Le Jan; L. Giltou; R. Hacquin; P. Louon; J. Millour.

Assez bonnes solutions : MM. A. Cieutat; R. Marchant.]

4206. — *Construire un trapèze circonscrit à un cercle de rayon donné* R, *connaissant les deux diagonales* d *et* d'.

Traçons un cercle de rayon R et menons les tangentes à ce cercle aux extrémités E et F d'un diamètre. Les bases BC et AD du trapèze sont deux segments placés sur ces droites. Il en résulte que les directions des diagonales sont déterminées :



si du point F comme centre on trace un cercle avec le rayon d (supposé plus grand que 2R), il coupe Ex en deux points M et M', symétriques par rapport à E : la diagonale BD est parallèle à FM ou à FM'.

De même le cercle tracé de E comme centre avec le rayon d' coupe Fy en L et L', symétriques par rapport à F; la diagonale AC est parallèle à EL ou à EL'.

On sait que les diagonales AC et BD se coupent sur le diamètre EF en un point I.

La parallèle EL à AC coupe BA en K, et donne la proportion

$$\frac{EB}{EC} = \frac{KB}{KA},$$

la parallèle FM à BD coupe BA en K', et donne de même une proportion

$$\frac{FD}{FA} = \frac{K'B}{K'A},$$

mais puisque EF, BD et AC concourent en I, on a la proportion

$$\frac{FD}{FA} = \frac{EB}{EC},$$

donc

$$\frac{KB}{KA} = \frac{K'B}{K'A},$$

ce qui prouve que les deux droites EL et MF coupent AB au même point; en d'autres termes, le côté BA passe par le point d'intersection K des droites FM et EL.

Or ce point est connu : c'est le point de rencontre d'une droite FM ou FM' avec EL ou EL'. Par ce point, il faut mener une tangente au cercle, et si cette tangente coupe Ex en B et Fy en A, les diagonales AC et BD seront parallèles respectivement à KE et KF.

Discussion. — Il existe quatre positions du point K, deux à

deux symétriques par rapport à EF; soient K et K_1, R et R_1 ces points. Les points K et K_1 donnent des solutions symétriques par rapport à EF; nous ne considérons pas des trapèzes symétriques comme constituant des solutions différentes, et par conséquent nous pouvons nous borner à étudier les solutions que l'on peut construire avec les points K et R.

Le point R est toujours extérieur au cercle tracé sur le diamètre EF; le point K peut être intérieur ou extérieur. Pour qu'il soit extérieur, il faut que la somme des angles KEF + KFE soit inférieure à un droit, ce qui donne

$$\frac{1}{4R^2} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{d'^2};$$

si le point K est extérieur au cercle décrit sur EF comme diamètre, on peut par ce point lui mener deux tangentes; une de ces tangentes coupant Ex en B et Fy en A, si l'on mène AC, parallèle à KE, et BD, parallèle à KF, on aura AC $= d'$ et BD $= d$, de plus on aura les proportions

$$\frac{KB}{KA} = \frac{EB}{EC} \quad \text{et} \quad \frac{KB}{KA} = \frac{FD}{FA},$$

donc

$$\frac{EB}{EC} = \frac{FD}{FA} \quad \text{ou} \quad EB.FA = FD.EC;$$

or, puisque AB touche le cercle (O) décrit sur le diamètre EF, on sait que

$$EB \times FA = + R^2,$$

il résulte alors de l'égalité précédente que

$$EC \times FD = + R^2,$$

donc que la ligne CD est aussi tangente au cercle (O).

Le point K peut donc donner deux solutions du problème, le point R en donnera toujours deux : mais le point R étant sur ER et FR qui coupent le cercle (O), chacune des tangentes à ce cercle menées par R laisse d'un même côté le cercle et par suite les droites RE et RF. Les parallèles BD à FR et AC à ER sont donc de part et d'autre de BA. Le quadrilatère ABCD est donc croisé; c'est un trapèze de *seconde espèce*, dont on regarde AB et DC comme deux côtés, BD et AC comme les diagonales.

(Roger Hacquin, école primaire supérieure de Bar-sur-Seine.)

[Bonnes solutions : MM. F. Baujard; A. Cieutat; G. Février; L. Gilton; J. Millour.
Assez bonnes solutions : MM. J. Devisme; Geffroy-Le Jan; R. Marchant; R. Vallé.]

4207. — *Lieu des points M dont la somme des carrés des distances aux six faces d'un parallélépipède rectangle est égale à k^2, constante donnée.*

Examiner les deux cas particuliers, où le parallélépipède considéré étant le cube d'arête a, on a

$$1^\circ \quad k^2 = 2a^2, \qquad 2^\circ \quad k^2 = 3a^2.$$

Soit M un point de l'espace; la perpendiculaire abaissée de M sur les deux faces parallèles ABCD et A'B'C'D' les rencontre en L et L', et coupe en λ le plan $\alpha\beta\gamma\delta$, parallèle aux deux faces opposées, mené par le centre O. Le point λ est le milieu de LL', et l'on a

$$\overline{ML}^2 + \overline{ML'}^2 = (M\lambda - a)^2 + (M\lambda + a)^2,$$

en appelant $2a$ la dimension AA' du parallélépipède.

Donc

$$\overline{ML}^2 + \overline{ML'}^2 = 2(a^2 + \overline{M\lambda}^2).$$

Si l'on appelle $2b$ et $2c$ les deux autres dimensions du parallélépipède, $M\mu$ et $M\nu$ les distances de M aux plans menés par le centre parallèlement aux deux autres faces du trièdre trirectangle A(BB'A'), on voit que la somme des carrés des six distances peut se remplacer par

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 2(\overline{M\lambda}^2 + \overline{M\mu}^2 + \overline{M\nu}^2).$$

Or, $\overline{M\lambda}^2 + \overline{M\mu}^2 + \overline{M\nu}^2 = \overline{MO}^2$, donc la propriété qui définit le lieu équivaut à

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 2\,\overline{MO}^2 = k^2.$$

Le lieu de M est donc une sphère ayant O pour centre, à condition que $k^2 > 2(a^2 + b^2 + c^2)$.

Si le parallélépipède est un cube d'arête l, on a $a = b = c = \frac{l}{2}$, donc

$$\frac{3l^2}{2} + 2\,\overline{MO}^2 = k^2,$$

si $\quad k^2 = 2l^2, \quad MO = \frac{l}{2}$, la sphère est inscrite au cube;

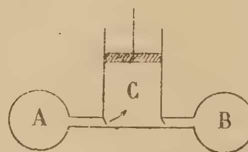
si $\quad k^2 = 3l^2, \quad MO = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, la sphère est circonscrite au cube.

(G. Février, école professionnelle de Rambouillet.)

[Bonnes solutions : MM. F. Baujard; G. Bruniquel; Chapellier; A. Cieutat; Dufosse; Geffroy-Le Jan; L. Gilton; R. Hacquin; P. Louon; R. Marchant; J. Périn; J. Schilling; H. Sebban.]

4208. — *Deux récipients A et B communiquent entre eux par un corps de pompe C, aspirant en A et refoulant en B.*

Au début, A de volume V, et C de volume v, sont remplis d'hydrogène à la pression H; B de volume V' est rempli de gaz carbonique à la pression H'. Supposant le piston en haut de sa course à l'origine, on demande les pressions dans chaque récipient après 1, 2, 3, 4 courses complètes. Généraliser. — Application numérique : $V = 9^l$, $v = 1^l$, $V' = 10^l$, $H = 1$ *atmosphère,* $H' = 2$ *atmosphères.*



Que deviendrait la réponse en supposant $H = H'$ *et* $V = V'$, *valeur maxima de la pression en B, en ne tenant pas compte de l'espace nuisible?*

Déterminer la composition en poids après la 4e course dans le récipient B. On donne $O = 16$, $C = 12$, $H = 1$, *et volume moléculaire à* 0° *et* 760^{mm}, $22^l,30$.

On est supposé opérer dans ces conditions normales.

Les pressions initiales étant H dans le récipient A, H' dans le récipient B, désignons par H_1, H_2, H_3, ... et H'_1, H'_2, H'_3, ... les pres-

sions successives respectivement dans ces deux récipients après 1, 2, 3 ... coups de piston.

Quand on commence par abaisser le piston, le gaz contenu dans C passe dans B où il exerce, d'après la loi de Mariotte, une pression supplémentaire de $\frac{Hv}{V'}$; la pression en B devient par suite

$$H'_1 = H' + \frac{Hv}{V'}.$$

Quand le piston remonte ensuite, une partie du gaz de A passe en C où elle occupe le volume v à la nouvelle pression H_1 du gaz en A, et la loi de Mariotte donne $H_1(V+v) = HV$, d'où

$$H_1 = \frac{HV}{V+v}.$$

Après 2, 3, 4 courses complètes et plus généralement après $n-1$ courses complètes, les pressions dans les récipients A et B sont devenues

$$H_2 = H_1\frac{V}{V+v} = H\left(\frac{V}{V+v}\right)^2$$

et

$$H'_2 = H'_1 + \frac{H_1 v}{V'} = H' + \frac{Hv}{V'}\left(1 + \frac{V}{V+v}\right);$$

$$H_3 = H\left(\frac{V}{V+v}\right)^3$$

et

$$H'_3 = H' + \frac{Hv}{V'}\left[1 + \frac{V}{V+v} + \left(\frac{V}{V+v}\right)^2\right];$$

$$H_4 = H\left(\frac{V}{V+v}\right)^4$$

et

$$H'_4 = H' + \frac{Hv}{V'}\left[1 + \frac{V}{V+v} + \left(\frac{V}{V+v}\right)^2 + \left(\frac{V}{V+v}\right)^3\right];$$

$$H_{n-1} = H\left(\frac{V}{V+v}\right)^{n-1}$$

et

$$H'_{n-1} = H' + \frac{Hv}{V'}\left[1 + \frac{V}{V+v} + \left(\frac{V}{V+v}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{V}{V+v}\right)^{n-2}\right];$$

on en déduit

$$H_n = H_{n-1}\frac{V}{V+v} = H\left(\frac{V}{V+v}\right)^n$$

et

$$H'_n = H'_{n-1} + H_{n-1}\frac{v}{V'}$$

$$= H' + \frac{Hv}{V'}\left[1 + \frac{V}{V+v} + \left(\frac{V}{V+v}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{V}{V+v}\right)^{n-1}\right].$$

La quantité entre crochets est la somme des n termes de la progression géométrique de raison $\frac{V}{V+v}$ dont le premier terme est 1 ; nous avons donc

$$H'_n = H' + \frac{Hv}{V'}\left[\frac{1-\left(\frac{V}{V+v}\right)^n}{1-\frac{V}{V+v}}\right] = H' + \frac{H(V+v)}{V'}\left[1-\left(\frac{V}{V+v}\right)^n\right].$$

L'application des formules précédentes au cas où $V = 9^l$, $v = 1^l$, $V' = 10^l$, $H = 1$ atmosphère, $H' = 2$ atmosphères donne successivement

$H_1 = 0{,}9$	atmosphère,	$H'_1 = 2{,}1$	atmosphères,
$H_2 = 0{,}81$	—	$H'_2 = 2{,}19$	—
$H_3 = 0{,}729$	—	$H'_3 = 2{,}271$	—
$H_4 = 0{,}6561$	—	$H'_4 = 2{,}3439$	—

Si $H = H'$ et $V = V'$, nous avons

$$H_n = H\left(\frac{V}{V+v}\right)^n, \qquad H'_n = H\left\{1 + \frac{V+v}{V}\left[1-\left(\frac{V}{V+v}\right)^n\right]\right\}.$$

Quand n croît indéfiniment, la valeur maximum de la pression en B est, dans le cas général de $H' \neq H$, égale à

$$H' + \frac{H(V+v)}{V'}.$$

Si $H' = H$ et $V' = V$, cette valeur maximum est $H\frac{2V+v}{V}$.

C'est d'ailleurs la valeur que prendrait la pression dans B si l'on y faisait pénétrer tout le gaz contenu dans A et C au début de l'expérience.

Le récipient B contient toujours le gaz carbonique qui le remplissait sous la pression $H' = 2$ atmosphères. La molécule-gramme de CO^2 pèse $12 + 2 \times 16 = 44^g$ de gaz carbonique et occupe $22^l,3$ dans les conditions normales de température et de pression; les 10^l de CO^2 du récipient B à la pression de 2 atmosphères pèsent

$$\frac{44 \times 10 \times 2}{22{,}3} = 39^g{,}46.$$

Au bout de la quatrième course, le récipient B contient en outre 10^l d'hydrogène, dont la pression est égale à

$$H'_4 - H' = 2{,}3439 - 2 = 0{,}3439 \text{ atmosphère.}$$

Le poids de cet hydrogène est donc

$$\frac{2 \times 10 \times 0{,}3439}{22{,}3} = 0^g{,}308.$$

(F. MAITRE, école primaire supérieure de Moûtiers, Savoie.)

[Bonnes solutions : Mlles Koch; Marignac; MM. P. Baylac; P. Boucher; V. Bourden; R. Bruneteau; G. Bruniquel; J. Bugnard; R. Chasselut; J. Dirand; G. Knoll; R. Legrand; Philizot; M. Saint-Juvin; J. Schilling.
Assez bonne solution : M. H. Micard.]

4209. — *On chauffe dans une cornue* $0^g,585$ *de NaCl avec de l'acide* SO^4H^2 *et l'on envoie le gaz dégagé dans une éprouvette cylindrique pleine de mercure et dépassant de* $h = 50^{cm}$ *le niveau de mercure de la cuvette sur laquelle on l'a renversée.*

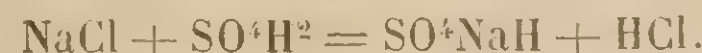
La section de l'éprouvette $S = 6^{cm^2}$ *et la pression de l'atmosphère est* $H = 74^{cm}$ *de mercure.*

Calculer la hauteur x *à laquelle restera soulevée la colonne de mercure en supposant la température* $t^o = 0^o$.

$$Na = 23, \qquad Cl = 35{,}5.$$

Volume moléculaire du gaz : $22^l,30$.

La réaction qui se produit a pour équation



$$NaCl + SO^4H^2 = SO^4NaH + HCl.$$

Si la cornue employée permet d'élever la température au rouge, on a la réaction



$$2NaCl + SO^4H^2 = SO^4Na^2 + 2HCl,$$

mais, dans les deux cas, $35{,}5 + 23 = 58^g{,}5$ de NaCl fourniront $35{,}5 + 1 = 36^g{,}5$ de HCl, de sorte que $0^g{,}585$ de NaCl donnent $0^g{,}365$ de HCl qui, dans les conditions normales de température et de pression, occupent un volume de 223^{cm^3}.

Soit x^{cm} la hauteur à laquelle s'élèvera la colonne de mercure dans l'éprouvette, les 365^{mg} de HCl qui en rempliront la partie supérieure occuperont un volume de $6(50-x)^{cm^3}$ à la pression de $(74-x)^{cm}$ de mercure. La loi de Mariotte nous donne par suite

$$76 \times 223 = 6(50-x)(74-x),$$

ou

$$3x^2 - 372x + 2\,626 = 0.$$

Cette équation a deux racines positives, dont l'une est à rejeter

comme supérieure à 50^{cm} ; l'autre, qui donne la solution du problème, est

$$x = \frac{186 - \sqrt{186^2 - 3 \times 2\,626}}{3} = 7^{cm},5.$$

(J. SCHILLING, à Alger.)

[Bonnes solutions : Mlle M. Koch ; MM. V. Bourden ; R. Bruneteau ; Chapellier ; R. Chasselut ; G. Février ; Gabay ; Geffroy-Le Jan ; G. Knoll ; E.-G. Mitard ; J. Périn ; Philizot ; O. Tarrisse.]

GÉOMÉTRIE

1041. — *Un triangle ABC dans lequel l'angle B est double de l'angle C est inscrit dans un cercle ; la tangente à ce cercle au point A coupe le côté BC prolongé au point T.*

1° *Démontrer que les triangles ABT et ACT sont isocèles.*

2° *On désigne par a, b, c les côtés du triangle respectivement opposés aux angles A, B, C de ce triangle ; démontrer les relations*

$$b = 2c \cos C, \qquad a = \frac{b^2 - c^2}{c}.$$

3° *Calculer les deux côtés b et c du triangle précédent, connaissant leur somme 18^{cm} et la longueur 12^{cm} du côté a.*

(*Bourses des lycées et collèges de garçons, 6e série, section D, concours de 1920.*)

L'angle BAT, formé par la corde AB et par la tangente AT a même mesure que l'angle inscrit ACB : il est donc égal à C. L'angle ATC a même mesure que la demi-différence des arcs AC et AB, il est égal à ABC — ACB = $\hat{C}$. (On peut dire aussi que l'angle ABC vaut 2C et que l'angle supplémentaire ABT vaut 180° — 2C ; la somme des angles BAT et BTA est donc égale à 2C ; puisque BAT = C, il reste BTA = C).

Les triangles CAT et TAB sont isocèles (et de plus semblables, les angles aigus à la base étant égaux à C) : donc TA = CA = b et TB = AB = c. En projetant CA sur CT, puis AB sur AT, on en déduit les relations suivantes :

$$\mathrm{CT} = 2b \cos C, \quad \text{ou} \quad a + c = 2b \cos C,$$
$$\mathrm{AT} = 2c \cos C \quad \text{ou} \quad b = 2c \cos C,$$
$$\overline{\mathrm{TA}}^2 = \mathrm{TB} \times \mathrm{TC} \quad \text{ou} \quad b^2 = c(c + a).$$

Cette dernière équation, résolue par rapport à a, donne

$$a = \frac{b^2 - c^2}{c}.$$

Application. — Si $b + c = 18$, avec $a = 12$, on a d'abord

$$b^2 - c^2 = (b + c)(b - c) = ac = 12c,$$

donc

$$18(b - c) = 12c, \qquad \text{ou encore} \qquad 3b = 5c.$$

Il en résulte

$$\frac{b}{5} = \frac{c}{3} = \frac{b + c}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4},$$

$$b = 11^m,25 \qquad \text{et} \qquad c = 6^m,75.$$

(MARIUS VIALLE, pensionnat Saint-Joseph, Noirétable, Loire.)

[Bonnes solutions de Mlles S. David ; A. Longuet ; de MM. A. Bal ; F. Baujard ; A. Bernadac ; M. Brunet ; J. Bruneteau ; R. Chasselut ; M. Chatelier ; J. Condamin ; M. Descotte ; G. Démaret ; F. Dupiro ; A. F., à Saint-Pons ; M. Forcade ; H. Fortin ; J. Goudin ; L. Goyard ; J. Grall ; L. Guicheney ; V. Herbiet ; Huon-Leroux ; Lamure ; Lhôtelier ; P. Louon ; R. Luce-Catinot ; Magdinier ; J. Mauhin ; H. Mutel ; C. Noirbent ; R. Petit ; A. Rembert ; R. Reynard ; L. Soulier ; A. Wehrung.]

EXAMENS ET CONCOURS DE 1920 (*Suite.*)

CERTIFICAT D'APTITUDE AU PROFESSORAT INDUSTRIEL DANS LES ÉCOLES PRATIQUES

(*1re série.*)

Aspirantes.

SECTION A.

Arithmétique, géométrie et algèbre.

ARITHMÉTIQUE. — Si l'on a

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'},$$

montrer qu'on a $\qquad \dfrac{ma + nb}{pa + qb} = \dfrac{ma' + nb'}{pa' + qb'}.$

La réciproque est-elle vraie ?

GÉOMÉTRIE. — **1246.** Soit le triangle ABC. Sur chacun des côtés on construit, extérieurement au triangle, un triangle équilatéral et on joint le sommet de chacun de ces triangles au sommet opposé du triangle primitif.

On demande de démontrer :

1° Que les trois droites ainsi construites sont égales entre elles ;

2° Qu'elles se coupent en un même point.

ALGÈBRE. — Sur une droite indéfinie $x'x$, on prend deux points fixes A et B distants d'une longueur a. Un mobile M parcourt la droite $x'x$. Étudier les variations du rapport $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$ et construire la courbe représentative des variations de ce rapport. Le milieu de AB étant désigné par O, on appellera x la distance OM du point fixe O au mobile M.

Montrer graphiquement qu'il existe une position du mobile M et une seule pour laquelle le rapport $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$ a une valeur donnée.

Sciences physiques et naturelles.

Propriétés physiques et chimiques des métaux usuels, employés en économie domestique, au point de vue de la préparation et de la conservation des matières alimentaires. (*Durée : 4 heures.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

1247. — Calculer à $\frac{1}{10^5}$ près la quantité

$$\frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3} + \sqrt{5}}.$$

1248. — On donne un cercle (O) et un point A dans son plan ; on projette le point A sur une tangente au cercle en M. Déterminer la tangente au cercle :

1° de façon que la distance du point M à la droite OA soit maximum ;

2° de façon que la distance du point M à une perpendiculaire à la droite OA soit maximum ou minimum.

1249. — Par un point M pris à l'intérieur d'un angle xOy donné, il passe deux cercles inscrits dans l'angle. Trouver le lieu de M, si l'on demande que :

1° la somme des rayons de ces cercles soit constante ;

2° leur produit soit constant ;

3° leur différence soit constante.

1250. — On considère un triangle ABC, inscrit dans un cercle (O). Les droites AO, BO, CO coupent le cercle en A′, B′, C′ ; les droites BA′ et CA′, CB′ et AB′, AC′ et BC′ rencontrent les perpendiculaires aux côtés BC, CA, AB en leurs milieux, respectivement, en A_1 et A_2, B_1, et B_2, C_1 et C_2. Démontrer :

1° que les triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ sont semblables au triangle ABC et égaux entre eux ;

2° que $\qquad \overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} = 0.$

(V. THÉBAULT, à Ernée.)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie PAUL BRODARD.

23e Année. 15 Avril 1921. No 14.

L'Éducation Mathématique

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

PRIX DU NUMÉRO : France et Colonies, 0 fr. 60. Etranger, 0 fr. 70.
ABONNEMENT ANNUEL : France et Colonies, 10 fr. Etranger, 12 fr.

Tous les abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, l'on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction : Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Abonnements : Librairie **Vuibert**, Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

SUR DES SUITES NUMÉRIQUES

Dans deux numéros précédents (16e année, p. 149 et 157), nous avons étudié des suites de nombres que l'on peut regarder comme une généralisation des progressions géométriques ; si u_{n-1} et u_n sont deux termes consécutifs d'une progression géométrique, il existe entre eux la relation $u_n = q \times u_{n-1}$, où q désigne un nombre fixe, appelé la raison. Les suites dont il s'agit sont formées par une loi analogue, c'est-à-dire homogène et du premier degré, mais où figurent trois termes consécutifs, au lieu de deux :

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}, \qquad (1)$$

a et b désignant deux constantes. Pour former une telle suite il faut connaître les deux premiers termes, que nous appellerons u_0 et u_1 (termes de départ ou initiaux).

On peut alors mettre l'expression générale du terme de rang $n+1$ (que nous appelons u_n), sous deux formes différentes.

La première est

$$u_n = P_n u_1 + Q_n u_0, \qquad (2)$$

où P_n et Q_n désignent des polynomes entiers en a et b. On trouve en effet en calculant u_2, u_3, etc.

$$u_2 = au_1 + bu_0,$$
$$u_3 = au_2 + bu_1 = (a^2+b)u_1 + abu_0 ;$$

par induction, on voit que la valeur de u_n doit être donnée par une expression de la forme (2) : il est facile de vérifier que cette induction est juste. Si l'on pose

$$u_{n-1} = P_{n-1}u_1 + Q_{n-1}u_0 \qquad \text{et} \qquad u_{n-2} = P_{n-2}u_1 + Q_{n-2}u_0,$$

on trouve, en calculant le terme suivant,

$$u_n = a(P_{n-1}u_1 + Q_{n-1}u_0) + b(P_{n-2}u_1 + Q_{n-2}u_0),$$
$$= (aP_{n-1} + bP_{n-2})u_1 + (aQ_{n-1} + bQ_{n-2})u_0 ;$$

la loi est donc générale, les polynomes P_n et Q_n se déduisent des précédents par l'application d'une même loi de récurrence,

$$P_n = aP_{n-1} + bP_{n-2}, \qquad Q_n = aQ_{n-1} + bQ_{n-2},$$

qui cependant donne des expressions différentes pour P_n et Q_n, parce que les valeurs initiales ne sont pas les mêmes.

Comme on a

$$u_1 = u_1,$$

on peut prendre

$$P_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad Q_1 = 0,$$

puis on a

$$P_2 = a \qquad \text{et} \qquad Q_2 = b,$$

d'où

$$P_3 = a^2 + b, \qquad Q_3 = ab, ..$$

Ces formules montrent que si a et b sont entiers, ainsi que les termes initiaux, tous les termes de la suite le sont également.

Pour obtenir la deuxième forme, considérons l'équation du second degré

$$x^2 = ax + b, \qquad (3)$$

que nous appellerons *caractéristique* de la suite : supposons qu'elle ait deux racines distinctes α et β.

La racine α satisfait évidemment à l'équation

$$\alpha^2 = a\alpha + b,$$

qui devient, en multipliant les deux membres par α^{n-2},

$$\alpha^n = a\alpha^{n-1} + b\alpha^{n-2} ;$$

l'autre racine, β, satisfait à la même équation

$$\beta^n = a\beta^{n-1} + b\beta^{n-2} ;$$

en ajoutant membre à membre ces deux équations, après avoir multiplié les deux termes de la première par une constante A et ceux de la seconde par une autre constante B, on trouve que

$$A\alpha^n + B\beta^n = a(A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}) + b(A\alpha^{n-2} + B\beta^{n-2})$$

donc, en posant

$$v_n = A\alpha^n + B\beta^n,$$

on voit que

$$v_n = av_{n-1} + bv_{n-2}.$$

Or on peut disposer des deux constantes A et B de façon que les deux premières quantités v_0 et v_1 soient respectivement égales à deux termes initiaux donnés u_0 et u_1 : on posera pour cela

$$A + B = u_0, \qquad A\alpha + B\beta = u_1,$$

ce qui donne les valeurs

$$A = \frac{u_1 - \beta u_0}{\alpha - \beta}, \qquad B = \frac{\alpha u_0 - u_1}{\alpha - \beta},$$

on aura donc $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$, puis

$$u_2 = Au_1 + Bu_0 = Av_1 + Bv_0 = v_2,$$

donc $u_2 = v_2$, et ainsi de suite : la progression des u coïncide avec celle des v.

La deuxième forme sous laquelle on peut mettre les nombres u_n en fonction des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation caractéristique est donc

$$u_n = A\alpha^n + B\beta^n = \frac{u_1 - u_0\beta}{\alpha - \beta}\alpha^n + \frac{\alpha u_0 - u_1}{\alpha - \beta}\beta^n.$$

On voit l'analogie avec une progression géométrique : u_n est cette fois la somme des termes de même rang de deux progressions géométriques de raisons α et β.

Mais la propriété des nombres u_n d'être entiers si u_0, u_1, a et b le sont est maintenant cachée.

De semblables suites d'entiers ont des propriétés arithmé-

tiques intéressantes : nous nous proposons d'en étudier une des plus simples, qui correspond à $a = 2$ et $b = 1$; (cette série se rencontre dans la solution de la question 3912).

La relation de récurrence est

$$u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2},$$

et l'équation caractéristique

$$x^2 - 2x + 1$$

a deux racines

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \beta = 1 - \sqrt{2},$$

on voit que

$$\alpha\beta = -1, \qquad \alpha - \beta = 2\sqrt{2}, \qquad \alpha - 1 = 1 - \beta = \sqrt{2}.$$

Calculons les termes de la suite partant de

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_1 = 1,$$

on trouve

$$1,\ 1,\ 3,\ 7,\ 17,\ 41,\ 99,\ 239,\ \ldots,$$

d'autre part, nous devons avoir

$$u_n = A\alpha^n + B\beta^n,$$

en posant

$$A + B = 1 \qquad \text{et} \qquad A\alpha + B\beta = 1,$$

ce qui fournit les valeurs

$$A(\alpha - \beta) = 1 - \beta,$$
$$B(\alpha - \beta) = \alpha - 1;$$

or

$$1 - \beta = \alpha - 1 = \sqrt{2},$$

on trouve donc pour u_n la valeur remarquablement simple

$$u_n = \frac{1}{2}(\alpha^n + \beta^n).$$

Prenons maintenant pour valeurs initiales

$$v_0 = 0, \qquad v_1 = 1,$$

ce qui fournit la suite

$$0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ 70,\ 169,\ \ldots;$$

on pourra poser

$$v_n = C\alpha^n + D\beta^n,$$

avec

$$C + D = 0 \qquad \text{et} \qquad C\alpha + D\beta = 1,$$

ce qui donne

$$C(\alpha - \beta) = +1 \qquad \text{et} \qquad D(\alpha - \beta) = -1$$

et par conséquent

$$v_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\alpha^n - \beta^n).$$

On trouve alors que

$$u_n^2 - 2v_n^2 = \frac{1}{4}[(\alpha^n + \beta^n)^2 - (\alpha^n - \beta^n)^2]$$
$$= \frac{1}{4}4(\alpha\beta)^n = (\alpha\beta)^n.$$

Mais $\alpha\beta = -1$: donc, si n est pair, les deux entiers u_n et v_n satisfont à l'équation

$$u_n^2 - 2v_n^2 = +1;$$

si n est impair, u_n et v_n sont deux entiers satisfaisant à l'équation

$$u_n^2 - 2v_n^2 = -1.$$

Les suites

$$1,\ 1,\ 3,\ 7,\ 17,\ 41,\ 99,$$
$$0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ 70,$$

fournissent donc, par ordre de grandeur croissante, un nombre illimité de solutions en nombres entiers des deux équations

$$u_n^2 - 2v_n^2 = \pm 1.$$

Exemple :

$$\overline{17}^2 - 2 \times \overline{12}^2 = 289 - 288 = +1,$$
$$\overline{41}^2 - 2 \times \overline{29}^2 = 1\,681 - 2 \times 841 = -1.$$

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES

Concours de 1920.

4187. — *Quatre associés ont engagé dans une entreprise, le premier 28 000^f pendant une année entière, le second 16 000^f pendant 9 mois, le troisième 12 000^f pendant 6 mois et le quatrième 6 000^f pendant 4 mois. — En outre, deux employés sont intéressés, le premier à 2 % et le second à 1 % dans les bénéfices. — Sachant que les bénéfices se sont élevés à 25 000^f, combien revient-il à chacun des deux employés et des quatre associés?*

Les parts que toucheront les associés seront directement proportionnelles : 1° à leurs mises, 2° au temps pendant lequel les mises sont restées engagées dans l'affaire. Ces parts sont donc proportionnelles aux produits des mises par les durées de placement.

La part du premier	est proportionnelle au	produit	$14 \times 12 = 168$;
celle du second	—	—	$8 \times 9 = 72$;
— troisième	—	—	$6 \times 6 = 36$;
— quatrième	—	—	$3 \times 4 = 12$;

ou, plus simplement aux nombres 14, 6, 3 et 1.

Mais il faut commencer par prélever le pour cent promis aux employés, qui à eux deux reçoivent 3 % des bénéfices, soit $3 \times 250 = 750$ francs; il reste donc à diviser 24 250 francs en quatre parts proportionnelles aux nombres 1, 3, 6 et 14, dont la somme est 24.

La plus petite part est le quotient $24\,250 : 24 = 1\,010{,}417$, les autres sont

$$3 \times 1\,010{,}417 = 3\,031{,}251,$$
$$6 \times 1\,010{,}417 = 6\,062{,}502,$$
$$14 \times 1\,010{,}417 = 14\,145{,}838,$$

en arrondissant le chiffre des centimes, on peut donc prendre comme répartition

	1 010,40
	3 031,25
	6 062,50
	14 145,85
	750,00 (pour cent des employés)
Total.	25 000

(E. PATÉ.)

[Bonnes solutions : Mme G. Clot; Mlles G. Boulay; M. Bourreau; S. David; M. Fontaine; MM. P. Arbey; H. Aubert; J. Barbot; L. Bisqué; A. Bordes; M. Boulvert; V. Bourden; J. Bugnard; J. Cartouzou; Ch. Caussin; L. Chapelon; B. Charles; R. Chasselut; G. Clément; R. Collomb; C. Crépeau; J. Devisme; J. Dougados; A. Douteau; S. Dujoux; S. Faucheux; Ch. Feyrabend; H. Forait; G. Fouché; Geffroy-Le Jan; F.-A. Gilly; A. Goëlo; C. Grard; M. Hambert; G. Houalet; G. Knoll; R. Legrand; L. Louis; P. Louon; F. Maitre; R. Marchant; A. Martin; Y. Maurice; H. Micard; Michem; R. Morel; J. Morin; F. Morvan; G. Mouzon; Ch. Norgelet; G. Olivier; L.-G. Papon; J. Patat; G. Pichon; E. Pinlong; A. Popu; G. Rian; C. Riedel; J. Schilling; L. Simon; M. Siraud; J. Tesquet; R. Vallé; N. Vedie.]

4188. — 1° *Étudier les variations de la fonction* $y = \dfrac{x+5}{x+1}$ *et représenter graphiquement les variations de cette fonction.*

2° *Chercher dans quel intervalle il faut faire varier* x *pour que la différence* $y - 2$ *soit, en valeur absolue, inférieure à* $\dfrac{1}{10}$.

1° On peut écrire

$$y = \frac{x + 1 + 4}{x + 1} = 1 + \frac{4}{x+1}, \qquad (1)$$

ou

$$(y - 1)(x + 1) = 4. \qquad (2)$$

La fonction y est continue pour toute valeur de la variable x, sauf pour $x = -1$.

$y - 1$ a le signe de $x + 1$ et varie en sens contraire de ce binome. Quand la valeur absolue de x grandit au delà de toute limite, le terme $\frac{4}{x+1}$ tend vers zéro (avec le signe de x) et y tend vers $+1$. Le tableau de variation de y est donc

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$+1$	décroît	$-\infty \,\|\, +\infty$	décroît	$+1$.

On se rend mieux compte de la forme de la courbe qui représente la variation de la fonction en considérant les coordonnées du point M par rapport à deux nouveaux axes, parallèles aux premiers : ce sont les deux droites $\omega X (y = +1)$ et $\omega Y (x = -1)$ qui sont les asymptotes. Soient X et Y ces nouvelles coordonnées, on a

$$X = x + 1, \qquad Y = y - 1;$$

la relation qui existe entre les coordonnées prend la forme plus simple

$$XY = 4. \tag{3}$$

Elle exprime que l'aire du rectangle ωQMP construit en abaissant d'un point de la courbe des perpendiculaires sur les deux droites ωX et ωY est constante et égale à quatre fois celle du carré dont le côté est l'unité.

Cette forme d'équation montre aussi que l'on peut permuter X avec Y; la courbe a donc pour axe de symétrie la bissectrice de l'angle des directions ωX et ωY. Comme on peut encore remplacer dans l'équation (3) Y par $-$ X et X par $-$ Y, la courbe a aussi pour axe la bissectrice de l'angle des directions ωX et $\omega Y'$. Enfin, on peut changer les signes de Y et de X simultanément, ce qui indique que le point ω est un centre de symétrie (l'existence d'un centre de symétrie est d'ailleurs une conséquence de celle de deux axes de symétrie rectangulaires.)

(G. PAPON, collège de Clamecy.)

2° Il faut que

$$|y - 2| < \frac{1}{10},$$

cela équivaut à la double inégalité

$$-\frac{1}{10} < y - 2 < \frac{1}{10}$$

ou à

$$-\frac{1}{10} < \frac{4}{x+1} - 1 < \frac{1}{10},$$

$$\frac{9}{10} < \frac{4}{x+1} < \frac{11}{10}.$$

Ces dernières inégalités exigent que $x + 1$ soit positif. On peut alors multiplier les trois termes par $x + 1$, et écrire

$$9(x+1) < 40 < 11(x+1),$$

ou

$$\frac{40}{11} < x + 1 < \frac{40}{9},$$

et enfin

$$\frac{29}{11} < x < \frac{31}{9}.$$

REMARQUE. — Cette double inégalité a été généralement mal discutée.

[Bonnes solutions : MM. P. Arbey; A. Bal; P. Baylac; G. Bruniquel; Ch. Caussin; Chapellier; R. Chasselut; C. Crépeau; G. Démaret; J. Devisme; J. Dirand; P. Dujoux; P. Fauré; H. Forait; Geffroy-Le Jan; F.-A. Gilly; Y. Guézelle; M. Hambert; G. Knoll; J. Lassave; P. Lebrun; R. Legrand; L. Louis; P. Louon; R. Marchant; J. Martin; J. Mazeau; J. Moirez; A. Monjallon; A. Moreau; G. Mouzon; F. Negretzu; G. Olivier; J. Périn; L. Philizot; A. Popu; R. Revel; R. Reynaud; A. Robba; J. Schilling; H. Sebban; G. Thiébaux; R. Weinzaepfel.]

Cours spécial de haut enseignement commercial pour les démobilisés de la guerre.

4189. — *On place à intérêts simples pendant 15 mois un capital A et on reçoit au bout de ce temps, capital et intérêts réunis, une somme de 13 062f,50; puis on place un capital double du précédent (soit 2A) pendant 18 mois et on reçoit au bout de ce temps, capital et intérêts réunis, une somme de 26 350f.*

Quels ont été les capitaux placés et le taux commun des deux placements?

Solution arithmétique. — Un capital A, placé pendant 18 mois, deviendrait, capital et intérêt réunis, 26 350 : 2 = 13 175f. La différence 13 175 — 13 062,5 = 112,50 représente l'intérêt du capital A pendant 18 — 15 = 3 mois. L'intérêt de A pendant 15 mois serait cinq fois plus grand, soit 5 × 112,50 = 562f,50. Le capital A est donc

$$13\,062{,}50 - 562{,}50 = 12\,500^{f}.$$

Le taux du placement est $\frac{562{,}50 \times 12 \times 100}{12\,500 \times 15} = 3{,}6\ ^0/_0$.

(JULES PATAT, école normale de Belfort.)

Solution algébrique. — La somme reçue au bout de quinze mois est $A\left(1 + \frac{15}{12}r\right) = A\left(1 + \frac{5}{4}r\right)$; dans le second cas elle est

$$2A\left(1 + \frac{18}{12}r\right) = 2A\left(1 + \frac{3}{2}r\right).$$

On a donc deux équations

$$A\left(1 + \frac{5}{4}r\right) = 13\,062{,}50,$$

$$2A\left(1 + \frac{3}{2}r\right) = 26\,350,$$

ou, en divisant les deux membres par 2,

$$A\left(1 + \frac{6}{4}r\right) = 13\,175.$$

En retranchant la première équation membre à membre de la seconde, on trouve

$$\frac{1}{4}Ar = 112^{f},50;$$

connaissant $\frac{1}{4}Ar$, on a

$$A = 13\,062{,}50 - \frac{5}{4}Ar = 12\,500.$$

La somme A est 12 500f, l'intérêt en un an serait 4 × 112,50 = 450f, le taux est donc 450 : 125 = 3,6 $^0/_0$.

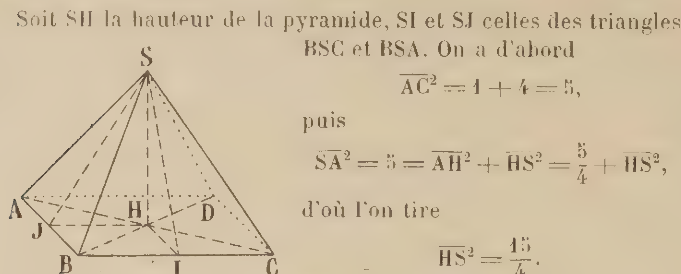
(JACQUES DEVISME, à Paris.)

[Bonnes solutions : Mlles G. Boulay; M. Bourreau; G. David; S. David; M. Marignac; MM. H. Aubert; A. Bal; J. Barbot; P. Baylac; L. Bisqué; A. Bordes; M. Boulvert; V. Bourden; P. Cadiou; J. Cartouzou; Ch. Caussin; L. Chapelon; B. Charles; R. Chasselut; M. Chatelier; Clamens; J. Clément; R. Collomb; C. Crépeau; J. Dougados; P. Dujoux; A. Eparvier; P. Faucheux; A. Favard; Ch. Feyrabend; H. Forait; G. Fouché; Geffroy-Le Jan; F.-A. Gilly; A. Goëlo; C. Grard; E. Guicheney; M. Hambert; G. Houalet; G. Knoll; Lacroix; R. Legrand; M. Lhoumeau; P. Louon; J. Magnani; F. Maitre; J. Marbou; R. Marchant; Y. Maurice; Ménéchal; H. Micard; J. Morin-Chanteau; F. Morvan; G. Mouzon; Ch. Norgolet; G. Olivier; E. Paté; J. Périgault; G. Pichon; E. Pinlong; M. Pinot; M. Pommerolle; G. Ponceau; R. Revel; R. Reynard; A. Robba; Rosentock; H. Sciand; J. Schilling; H. Sebban; L. Simon; R. Vallé.]

4190. — *Une pyramide* SABCD *a pour base un rectangle* ABCD *dont les côtés ont respectivement pour longueurs* AB = 1^m *et* BC = 2^m. *Les longueurs des arêtes latérales* SA, SB, SC, SD *sont égales entre elles et égales à la longueur commune des deux diagonales* AC *et* BD *du rectangle.*

On demande de calculer à 1^dm2 *près l'aire de la surface totale de la pyramide.*

Soit SH la hauteur de la pyramide, SI et SJ celles des triangles BSC et BSA. On a d'abord



$$\overline{AC}^2 = 1 + 4 = 5,$$

puis

$$\overline{SA}^2 = 5 = \overline{AH}^2 + \overline{HS}^2 = \frac{5}{4} + \overline{HS}^2,$$

d'où l'on tire

$$\overline{HS}^2 = \frac{15}{4}.$$

On trouve ensuite, en considérant les triangles rectangles SHI et SHJ,

$$\overline{SI}^2 = \overline{HI}^2 + \overline{SH}^2 = \frac{15}{4} + \frac{1}{4} = 4, \qquad SI = 2,$$

$$\overline{SJ}^2 = \overline{HJ}^2 + \overline{SH}^2 = 1 + \frac{15}{4} = \frac{19}{4}, \qquad SJ = \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

Surface totale

aire ABCD $= AB \times BC = 2,$
deux triangles BSC $= BC \times SI = 4,$
deux triangles SAB $= AB \times SJ = \frac{\sqrt{19}}{2},$
surface totale $= 6 + \frac{1}{2}\sqrt{19}$
$= 8{,}1794...$

La surface, à 1^dm2 près, est donc 8^m2,18.

(JACQUES DEVISME, à Paris.)

[Bonnes solutions : Mlles M. Bourreau; G. David; MM. Aubert; A. Bordes; M. Boulvert; R. Bruneteau; J. Cartouzou; Ch. Caussin; L. Chapelon; B. Charles; R. Chasselut; M. Chatelier; J. Clamens; G. Clément; R. Collomb; G. Commune; M. Courboulay; C. Crépeau; E. Epailly; Ch. Feyrabend; H. Forait; Geffroy-Le Jan; F.-A. Gilly; Y. Guézelle; Hambert; G. Houalet; L. Huguet; J. Lacroix; J. Le Goff; P. Louon; J. Magnani; R. Marchant; Y. Maurice; Ménéchal; J. Moirez; A. Monjallon; J. Navel; L.-G. Papon; J. Patat; J. Périgault; G. Pichon; E. Pinlong; M. Pommerolle; M. Robineau; Roquet; Roset; J. Schilling; Ch. Vouilloux.]

ARITHMÉTIQUE

3912. — *Déterminer une progression arithmétique dont le premier terme est* 1 *et la raison un entier positif, sachant que les termes de rangs* 9 *et* 17 *sont des carrés.*

Quels sont les autres termes de la progression qui sont des carrés?

Le neuvième et le dix-septième terme de la progression sont respectivement égaux à $1 + 8r$ et $1 + 16r$. Il faut donc trouver un entier r tel que

$$1 + 8r = p^2 \qquad \text{et} \qquad 1 + 16r = q^2;$$

en multipliant la première équation par 2, et en retranchant ensuite membre à membre, on a

$$2p^2 - q^2 = +1. \qquad (1)$$

Cette équation est vérifiée par les nombres $p = 1$ et $q = 1$, mais cette solution est sans intérêt : elle donne $r = 0$. Si r est supérieur ou égal à 1, il faut que p soit au moins égal à 3. On peut apercevoir facilement une solution qui correspond à $r = 3$, car

$$1 + 3 \times 8 = 25 = 5^2 \qquad \text{et} \qquad 1 + 3 \times 16 = 49 = 7^2.$$

Cherchons les autres termes de cette progression qui sont carrés : il faut que

$$1 + 3n = k^2, \qquad \text{d'où} \qquad n = \frac{1}{3}(k^2 - 1) = \frac{1}{3}(k+1)(k-1);$$

un nombre n de cette forme est entier si $k + 1$ ou $k - 1$ est multiple de 3. Les nombres de la progression trouvée qui sont carrés sont donc ceux pour lesquels n se calcule en donnant à k dans la formule précédente toutes les valeurs qui ne sont pas multiples de 3;

pour $k =$ 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, ...
on a $n =$ 1, 5, 8, 16, 21, 33, 40, 56,

les rangs de ces termes sont supérieurs d'une unité à n, ce sont donc

1, 6, 17, 34, ... et 2, 9, 22, 41, ...

qui forment deux suites *du second ordre*, c'est-à-dire deux suites de nombres dont les différences sont en progression arithmétique.

Nous avons aperçu directement la solution du problème qui correspond à la plus petite valeur possible, non nulle de la raison.

N. B. — Nos correspondants ont également trouvé cette solution : nous ne sommes pas surpris qu'ils n'en aient pas indiqué d'autres, (bien qu'il y en ait un nombre infini) et n'aient pas su former par ordre de grandeur croissante, les valeurs de r qui satisfont aux conditions imposées. La difficulté de la question est en effet assez grande, comme on le verra par la solution générale qui suit.

Il s'agit de trouver deux entiers, p et q, qui vérifient l'équation

$$2p^2 - q^2 = +1, \qquad (1)$$

il y a pour cela une méthode générale, qui n'est pas élémentaire : on forme *la fraction continue* égale à $\sqrt{2}$ et l'on calcule ses réduites successives, qui sont (*)

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1\,393}{783}, \frac{3\,363}{1\,974}, \frac{8\,119}{4\,731} \cdots;$$

si l'on prend les fractions de cette suite dont le rang est impair, le numérateur est une valeur de q et le dénominateur une valeur de p qui vérifient l'équation (1).

On démontre que toutes les valeurs peuvent être formées par ce procédé, qui en donne, par ordre de grandeur croissante, un nombre illimité.

Comme $8r = p^2 - 1$, on aura les valeurs de r en divisant par 8 les nombres de la suite

$$1^2 - 1, \quad 5^2 - 1, \quad 29^2 - 1, \quad 169^2 - 1, \quad 783^2 - 1, \quad 4\,731^2 - 1, \ \ldots,$$

ce qui donne

$$r = 0, \quad 3, \quad 105, \quad 3\,570, \quad 76\,638, \quad 2\,797\,795, \ \ldots.$$

Dans les progressions formées avec ces différentes raisons, en partant de l'unité comme premier terme, les termes de rangs 9 et 17 sont respectivement :

rang 9	rang 17
1	1
$25 = 5^2$	$49 = 7^2$
$841 = 29^2$	$1\,681 = 41^2$
$28\,561 = 169^2$	$57\,121 = 239^2$
$613\,089 = 783^2$	$1\,940\,449 = 1\,393^2$.

On peut former les solutions en nombres entiers de l'équation (1) par une méthode moins directe, mais plus élémentaire et dont l'application est facile à vérifier.

Il faut d'abord trouver une solution formée de deux nombres p_1 et q_1, (dans le cas que nous étudions, on connaît la solution $p_1 = +1$, $q_1 = 1$). L'équation (1) peut être alors écrite

$$2p^2 - q^2 = 2p_1^2 - q_1^2; \qquad (2)$$

(*) On remarquera que le numérateur de toute fraction de cette suite est formé en faisant la somme du double du numérateur précédent et du numérateur antéprécédent : la même loi s'applique aux dénominateurs.

On a bien

$7 = 2 \times 3 + 1,$ $\quad 5 = 2 \times 2 + 1.$
$17 = 2 \times 7 + 3,$ $\quad 12 = 2 \times 5 + 2.$
$41 = 2 \times 17 + 7.$ $\quad 29 = 2 \times 12 + 5.$
$99 = 2 \times 41 + 17,$ etc... $\quad 70 = 2 \times 29 + 12,$ etc....

Voir la note en tête de ce numéro.

on cherche ensuite, par essais, un nombre z, tel que $2z^2+1$ soit le carré d'un entier t, d'où $2z^2+1=t^2$ et $t^2-2z^2=1$. Multiplions alors par t^2-2z^2 le second membre de l'égalité (2), on aura

$$\begin{aligned}2p^2-q^2 &= (2p_1^2-q_1^2)(t^2-2z^2)\\ &= +2q_1^2z^2+2p_1^2t^2-4p_1^2z^2-q_1^2t^2\\ &= 2(q_1z+p_1t)^2-(2p_1z+q_1t)^2.\end{aligned}$$

On voit que l'on a une autre solution de l'équation en prenant

$$p_2=q_1z+p_1t \qquad \text{et} \qquad q_2=2p_1z+q_1t;$$

chaque solution connue permettra donc d'en calculer une nouvelle, formée de nombres visiblement plus grands.

Il est facile de trouver le plus petit nombre z tel que $2z^2+1$ soit un carré : 1 ne convient pas, mais 2 donne $2\times4+1=3^2$. On peut donc prendre $z=2$ et $t=3$. Les nombres successifs sont alors donnés par les formules :

$$\begin{aligned}&p_n=2q_{n-1}+3p_{n-1}, &&q_n=4p_{n-1}+3q_{n-1},\\ &p_1=1, &&q_1=1,\\ &p_2=2+3=5, &&q_2=4+3=7,\\ &p_3=2\times7+3\times5=29, &&q_3=4\times5+3\times7=41,\\ &p_4=2\times41+3\times29=169, &&q_4=4\times29+3\times41=239.\end{aligned}$$

(J. MACHEREY, à Besançon.)

[Bonnes solutions : Mlles Bocquet; M. Calmon; MM. F. Bérenger; J. Boisgard; G. Bonname; M. Boulvert; Chauvalon; Devoge; F. Dupire; F.-A. Gilly; Henrion; R. Luce-Catinot; H.-L. M.; M., à Guéret; J. Millour; G. Pichon; Pierdet; R. Pochau; M. Pommerolle; Terracher.]

4195. — *Une personne possède un terrain triangulaire* ABC *dont la base* BC *a* 60m *de long et la hauteur* AH, 48m. *On trace une route de* 12m *de large qui doit passer sur ce terrain, l'un des côtés de la route coïncidant avec la base* BC. *La personne vend à la commune le terrain nécessaire à raison de* 8f *le mètre carré, puis elle cède le reste à un particulier à raison de* 6f *le mètre carré. Avec le total des sommes reçues, elle souscrit à l'emprunt* 5 % *1920 émis au pair. Quel revenu touchera-t-elle?*

(*B. S., Gironde, aspirants, mars* 1920.)

La surface du terrain est $\frac{1}{2}60\times48=1\,440^{m^2}$. Le terrain ADE qui reste, après le passage de la route, forme un triangle semblable au premier triangle ABC; le rapport des aires est le carré de $\frac{48-12}{48}$; on a $\left(\frac{36}{48}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$.

La superficie de la parcelle qui reste est donc $\frac{9}{16}1\,440=810^{m^2}$ et celle du terrain vendu pour l'établissement de la route est $1\,440-810=630^{m^2}$.

Ces deux parcelles sont vendues respectivement

$$\begin{aligned}&630\times8=5\,040 \text{ francs},\\ \text{et}\quad &810\times6=4\,860 \quad —\\ &\text{Total :}\quad 9\,900 \quad —\end{aligned}$$

avec lesquels on peut acheter $5\times99=495$ francs de rente.

(M. POMMEROLLES, à Fresnes, Nord.)

[Bonnes solutions : Mlles G. Boulay; M. Bourreau; G. David; S. David; M. Fontaine; M. Marignac; MM. P. Arbey; H. Aubert; Ayme-Brice; J. Barbot; M. Barny; L. Bisqué; M. Boulvert; V. Bourden; G. Brouet; Buchinx; P. Cadiou; E. Callec; J. Cartouzou; Ch. Caussin; R. Cassan; M. Castelain; L. Chapelon; B. Charles; R. Chasselut; E. Clanet; G. Clément; R. Collomb; G. Commune; C. Grard; M. Courboulay; G. Daudel; A. Delhan; G. Démaret; J. Deprat; G. Deverpe; J. Devismo; M. Dligatch; J. Dougados; A. Doutau; M. Ducluseau; P. Dujoux; E. Epailly; A. Eparvier; P. Faucheux; P. Fauré; A. Favard; L. Fixe; H. Forait; J. Forceville; G. Fouché; R. Fraissé; H. Gautran; Geffroy Le Jan; F.-A. Gilly; A. Goëlo; Goïcoechea; V. Goudeau; A. Grall; R. Grégoire; Guibaud; Guézelle; Guicheney; Guiot; Guitton; M. Hambert; R. Hénin; G. Houalet; L. Kerleroux; Lacroix; Lamoureux; Lanfant; M. Laporte; P. Lebrun; Le Goff; Lhourmeau; Ligier; L. Louis; Magnani; F. Maître; Marchant; Martin; Maurice; P. Mené; Ménéchal; H. Micard; A. Monjallon; R. Morel; J. Morin-Chantreau; Morvan; Navel; F. Negretzu; Nore; Ch. Norgolet; Papon; J. Patat; E. Paté; J. Perigault; Pichereau; Pichon; Pierdet; M. Pinot; G. Ponceau; A. Popu; Pouches; E. R., à Ajaccio; Rabelle; G. Rian; Riedel; Robba; Rosenstok; Roset; Q. Roty; E. Sage; M. Salomon; Sciaud; J. Schilling; Sibercot; L. Simon; J. Tesquet; G. Thibaux; Tomy-Trojani; P. Trompier; Teyssier; Vaillant R. Valli; N. Vedie; Ch. Vouilloux; J. Voyer.]

ALGÈBRE

4181. — *Calculer la valeur que prend la fonction*

$$y=x\sqrt{\frac{(1-x)}{(1+x)}} \qquad (1)$$

quand on y remplace x par la racine positive de l'équation

$$x^2+x-1=0. \qquad (2)$$

N. B. — Avant de commencer le calcul numérique, il convient de transformer l'expression en une autre, d'un calcul plus facile, au moyen des relations entre les racines de l'équation (2), et de celles qui existent entre les puissances d'une racine.

On n'introduira les valeurs des racines carrées dans l'expression qu'après l'avoir ainsi préparée.

Soit x' la racine positive, $x'=\frac{-1+\sqrt5}{2}$, elle a les propriétés suivantes qui résultent immédiatement de l'équation (2)

$$1-x'=x'^2 \qquad \text{et} \qquad x'(1+x')=1,$$
$$1+x'=\frac{1}{x'}.$$

L'expression

$$x'\sqrt{\frac{1-x'}{1+x'}}$$

devient donc

$$\sqrt{x'^2\frac{1-x'}{1+x'}}=\sqrt{x'^2\times x'^2\times x'}=\sqrt{x'^5}.$$

(ANDRÉ BAL.)

Cette expression se prête très bien au calcul logarithmique. On a

$$\begin{aligned}\sqrt5 &= 2{,}236068\\ \frac{\sqrt5-1}{2} &= 0{,}618034\\ \log 0{,}618030 &= \bar1{,}7910096\\ 4 \quad &\quad\ \ 28 \qquad (\Delta=70)\\ \log x' &= \bar1{,}7910124\\ \frac{5}{2}\log x' &= \bar1{,}4775310\\ \log 0{,}300280 &= \bar1{,}4775264\\ &\quad\ \ 46\\ 3 \quad &\quad\ \ 43{,}5 \qquad (\Delta=145)\\ 02 \quad &\quad\ \ 2{,}5\end{aligned}$$

Donc $y=0{,}3002832.$

Pour le calcul arithmétique, une autre forme est plus commode.

On a

$$\frac{1-x'}{1+x'}=\frac{(1-x')(1+x'')}{(1+x')(1+x'')}=\frac{1-x'x''-(x'-x'')}{1+x'x''+x'+x''},$$

en appelant x'' la racine négative. Or

$$x'x''=-1, \qquad x'+x''=-1, \qquad x'-x''=\sqrt5,$$

donc la quantité sous le radical est égale à $-2+\sqrt5$. D'autre part,

$$x'^2=1-x'=\frac{3-\sqrt5}{2},$$

donc

$$y'^2 = -\frac{(2-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{2} = -\frac{6-5\sqrt{5}+5}{2} = \frac{-11+5\sqrt{5}}{2};$$

on a donc

$$y' = \sqrt{\frac{5\sqrt{5}}{2} - \frac{11}{2}}.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{5} &= 2,2360679775 \\ \frac{5}{2}\sqrt{5} = \frac{10}{4}\sqrt{5} &= 5,590169939 \\ -\frac{11}{2} &= -5,5 \\ \hline y'^2 &= 0,090169939 \end{aligned}$$

La racine carrée de 0,090169939 est 0,3002839.

(JEAN LASSAVE, à l'Isle-en-Dodon, Haute-Garonne.)

[Bonnes solutions : M. M. J. Mizeret; Robba; A. Terrier.
Assez bonnes solutions : MM. J. Briquet; P. Louon; R. Marchant.
Solutions passables : Mlle A. Levifve; MM. M. Chatelier; G. Desmaret; H. Forait; Gabay; E. Guicheney; R. Guiot; M. Hambert; G. Meynaud; H. Micard; F. Négretzu; L.-G. Papon; Pierdet; M. Pommerolle; M. Robineau; G. Vimbert.

GÉOMÉTRIE

4171. — *On donne un morceau de carton ayant la forme d'un triangle équilatéral* ABC.

1° *Calculer sa surface sachant qu'il est inscriptible dans un cercle de rayon* R.

2° *On plie les angles autour des droites* MN, NP, PM, *qui joignent les milieux des côtés, de façon à former un tétraèdre régulier ayant pour base le triangle* MNP.

Calculer le volume du tétraèdre.

Application numérique :

$$R = 4^{\text{dm}}, \quad \sqrt{2} = 1,414, \quad \sqrt{3} = 1,732.$$

(*B. S., Haute-Saône, mars* 1920.)

1° Le rayon du cercle circonscrit à un triangle équilatéral étant R, le côté a est $R\sqrt{3}$. La hauteur du triangle est $\frac{3}{2}$R, car le côté BC est perpendiculaire au rayon OA′ (prolongement de AO) en son milieu.

La surface du triangle ABC est donc

$$\frac{1}{2}\frac{3R}{2}.R\sqrt{3} = R^2\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

2° En repliant les triangles comme l'indique l'énoncé, on forme un tétraèdre régulier dont le côté est $\frac{1}{2}a = \frac{R}{2}\sqrt{3}$.

La surface du triangle MPN, base de ce tétraèdre, est le quart de celle du triangle ABC. Le carré de la hauteur est $\frac{a^2}{4} - \frac{R^2}{4}$, car le rayon OP est $\frac{1}{2}$R; la hauteur est donc $\frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$ et la mesure du volume

$$\frac{1}{3}R^2\frac{3\sqrt{3}}{16} \times \frac{R\sqrt{2}}{2} = R^3\frac{\sqrt{6}}{32}.$$

Application. — Surface :

$$R^2\frac{3\sqrt{3}}{4} = 4 \times 3 \times 1,732 = 20^{\text{dm}^2},784;$$

Volume : $\quad 64 \times \frac{\sqrt{6}}{32} = 2\sqrt{6} = 4^{\text{dm}^3},898.$

(ADRIEN BOUGUER, école professionnelle de Périgueux.)

Remarque. — Il n'est pas plus long de calculer $\sqrt{6}$ que de faire la multiplication de 1,732 par 1,414; mais l'extraction de la racine carrée est bien préférable, car tous les chiffres qu'on en calcule sont exacts; l'erreur est inférieure à une unité de l'ordre du dernier chiffre décimal calculé. Il n'y a aucune discussion à faire.

On trouve

$$1,414 \times 1,732 = 2,449048,$$
$$\sqrt{6} = 2,449489.$$

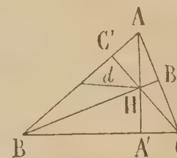
[Bonnes solutions de MM. A. Authier; M. Barraux; C. Beaujean; R. Bonhomme; A. Bordes; V. Bourden; Brouet; Ch. Caussin; R. Chasselut; M. Chatelier; G. Clément; C. Crépeau; A. Cieutat; J. Clamens; Claustre; M. Courboulay; P. Cuillier; J. Deportefaix; Ch. Dubort; A. Dubuc; A. F., à St-Pons; E. Faudou; H. Forait; G. Fouché; J. Gaillard; Geffroy-Le Jan; A. Goëlo; R. Guiot; R. Henin; G. Houalet; H. Jouanny; E. Laborde; M. Laporte; R. Legrand; G. Lenormand; L. Linemann; E. Longrée; P. Louon; F. Maitre; R. Marchant; E. Masdupuy; Y. Maurice; Ménéchal; A. Moreau; J. Navel; Olivier; L.-G. Papon; Ch. Parès; L. Pascal; E. Pinlong; A. Popu; M. Robineau; R. Roset; M. Saint-Juvin, Sagnès; H. Sarda; M. Sator; H. Sebban; R. Siberchicot; A. T., à Blanzy; G. Tilly; R. Vallée; M. Vetter; G. Vimbert; R. Weinzaepfel.
Assez bonnes solutions de MM. Ch. Andrei; A. Baune; G. Bénazet; M. Boulvert; J. Briquet; J.-E. Chantrelle; J. Constant; J. Devisme; M. Ducluseau; P. Dujoux; Farges; A. Favard; M. Juillet; P. Lavoine; J. Le Goff; M. Lhoumeau; Martin; G. Mouzon; Ch. Noël; Ch. Norgelet; G. Knoll; L. Sorgues.]

SOLUTIONS D'EXERCICES

4079. — *Soit* ABC *un triangle dont les hauteurs concourent en* H. *Calculer les produits*

$$HA \times HA', \qquad HB \times HB', \qquad HC \times HC'$$

en fonction de la distance d *de l'orthocentre au milieu du côté* AB = c *et de ce côté. Montrer que ces produits sont les mêmes.*



HA × HA′ est la puissance de H par rapport au cercle décrit sur AB comme diamètre, cercle qui passe en A′ et en B′. Il en résulte que les produits HA × HA′ et HB × HB′ sont égaux et que leur valeur commune est

$$\overline{HM}^2 - \overline{MA}^2 = \overline{HM}^2 - \frac{1}{4}\overline{BC}^2$$

(où M est le milieu de BC).

Si donc on appelle M, M′ et M″ les milieux des trois côtés et a, b, c leurs longueurs, la valeur commune des trois produits considérés est

$$\overline{HM}^2 - \frac{1}{4}a^2 = \overline{HM'}^2 - \frac{1}{4}b^2 = \overline{HM''}^2 - \frac{1}{4}c^2.$$

4080. — *Couper un cylindre de révolution par un plan parallèle à la base, de façon que la section soit moyenne géométrique entre les deux surfaces convexes déterminées.*

Nous interpréterons cet énoncé ainsi : on demande que le cercle, section du plan par le cylindre, soit moyenne géométrique entre les aires latérales des deux parties du cylindre.

Soient h la hauteur, R le rayon de la base, x et y les distances du plan sécant aux deux bases du cylindre. On doit avoir la relation

$$(\pi R^2)^2 = (2\pi Rx) \times (2\pi Ry),$$

d'où

$$R^2 = 4xy.$$

D'autre part,

$$x + y = h.$$

On est donc amené à calculer ou à construire deux longueurs, x et y, connaissant leur somme h et leur moyenne géométrique $\frac{1}{2}$R. Le problème est possible si $\frac{1}{2}R \leqslant \frac{1}{2}h$, donc si la hauteur du cylindre est supérieure ou égale au rayon.

4081. — *Construire un triangle* ABC *dont on connaît*

$$BC = a, \qquad \textit{l'angle } A = \alpha \qquad \textit{et} \qquad AB + nAC = l,$$

n étant un nombre donné.

Première solution. — Soit ABC le triangle demandé, prolongeons le

côté BA au delà de A d'une longueur AC_1 égale à nAC : la longueur BC_1 est alors égale à la longueur donnée l; de plus, le triangle C_1AC, dont l'angle en A est le supplément de l'angle α donné et dont les côtés AC et AC_1 ont un rapport égal à n, nombre donné, est semblable à un triangle connu, que l'on peut construire; on connaîtra ainsi l'angle CC_1B. Le problème est maintenant ramené à une construction classique : il s'agit de construire le triangle C_1BC, connaissant deux côtés, $C_1B = l$, $BC = a$, et l'angle C_1 opposé à l'un d'eux. On sait que ce problème peut avoir zéro, une ou deux solutions. Ce triangle étant construit, on déterminera A, soit par le rapport $\frac{AB}{AC_1}$, ou par l'angle CAB, ou mieux par l'angle C_1CA, que l'on a construit en même temps que $\hat{C}_1$.

Deuxième solution. — Plaçons le côté donné BC; un lieu de A est le segment capable de l'angle donné α, tracé sur la corde BC. Prolongeons BA de la longueur AC_1 égale à nAC. Le triangle C_1AC a en A un angle constant, égal à $\pi - \alpha$, et le rapport des côtés AC_1 et AC est égal à n; donc ce triangle reste toujours semblable à un triangle connu : l'angle en C_1 a une valeur que l'on peut construire. Un premier lieu de C_1 est donc le segment capable de cet angle tracé sur la corde BC; un second lieu est le cercle tracé autour du centre B avec le rayon donné l. Le problème peut admettre une ou deux solutions, ou être impossible, selon le nombre des points communs aux deux segments capables définis ci-dessus.

4082. — *Étant donné un triangle isocèle* AFG, *le cercle décrit de* O (*milieu de* FG) *comme centre et touchant les côtés* AF *et* AG, *on mène une tangente quelconque* BC. *Démontrer que le produit* $BF \times CG$ *est constant.*

Soient M, T et P les points de contact des tangentes AF, BC et AG. Les angles MOB et TOB, symétriques par rapport à OB, sont égaux, ainsi que COT et COP, symétriques par rapport à OC. Soit β la valeur des deux premiers, γ celle des autres. L'angle MOP est supplémentaire de FAG et vaut $2\beta + 2\gamma$; on a donc

$$2\beta + 2\gamma = \pi - A \quad \text{et} \quad \beta + \gamma = \frac{1}{2}\pi - \frac{A}{2}. \quad (1)$$

Considérons alors les triangles OFB et OCG.

L'angle MOF, complémentaire de F, est égal à $\frac{1}{2}A$, donc

$$BOF = \frac{1}{2}A + \beta = \frac{1}{2}\pi - \gamma,$$

en vertu de l'égalité (1).

Mais dans le triangle OPC, on voit que $OCP = \frac{1}{2}\pi - \gamma$; les deux triangles BOF, OCG sont donc semblables, comme ayant les angles en F et G égaux ainsi que les angles en O (du premier) et en C (du second).

La similitude de ces triangles permet d'écrire la proportion

$$\frac{BF}{OG} = \frac{OF}{CG}$$

qui donne, en égalant le produit des moyens à celui des extrêmes,

$$FB \times GC = OF \times OG = \overline{OF}^2.$$

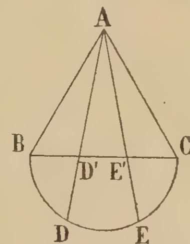
Quand la tangente devient parallèle à FG (fig. 2), les deux segments FB et GC deviennent égaux, leur valeur commune est donc égale à OF. Une autre position remarquable de la tangente est celle où le point de contact T vient en M; le point B, qui est sur la bissectrice de l'angle MOT est alors confondu avec M, et C est en A : la valeur constante du produit est donc égale à $FM \times GA$, ou à $FM \times FA$, puisque le triangle est isocèle. Il résulte de la comparaison des deux valeurs particulières trouvées ci-dessus que $\overline{FO}^2 = FM \times FA$: cette égalité a lieu en effet, car OM est la hauteur du triangle rectangle FOA.

EXAMENS ET CONCOURS DE 1920 (*Suite*).

EXAMENS ORAUX
des
ÉCOLES NATIONALES D'ARTS ET MÉTIERS (*).

Géométrie.

135. — Le produit de deux côtés d'un triangle est égal au produit de la hauteur relative au troisième côté par le diamètre du cercle circonscrit.



136. — [**4251** (**)]. On donne un triangle équilatéral ABC. Sur BC comme diamètre on décrit un demi-cercle BDEC qu'on partage en trois parties égales BD, DE, EC. Démontrer que AD, AE partagent BC en trois parties égales

$$BD' = D'E' = E'C.$$

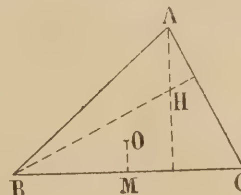
137. — Si deux plans sont perpendiculaires, toute perpendiculaire à l'un est parallèle à l'autre.

---

138. — Aire d'un parallélogramme. Aire du triangle équilatéral en fonction du côté.

139. — Volume du tronc de prisme triangulaire.

140. — [**4252**]. On donne deux sphères O, O'. Lieu géométrique des centres des sphères qui coupent les sphères O, O' chacune suivant un grand cercle.



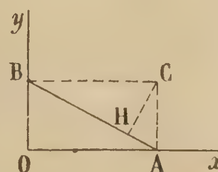
141. — Démontrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

142. — Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC, O le centre du cercle circonscrit. Démontrer que AH = 2OM, M désignant la projection de O sur BC.

143. — Volume de l'anneau sphérique.

---

144. — Segments de cercle; lieux des points d'où l'on voit un segment de droite sous un angle donné.



145. — [**4253**]. On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy sur lesquels on prend des points A et B tels que OA + OB = Cte. On construit le rectangle OBCA et de C on abaisse la perpendiculaire CH sur AB. Montrer que CH passe par un point fixe.

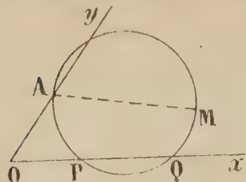
146. — Trois plans parallèles interceptent sur deux droites quelconques des segments proportionnels.

(*) Les questions posées à un même candidat sont comprises entre deux traits.

(**) Ce second numérotage ne porte que sur les questions dont nous avons l'intention de donner ici une solution. Ces questions seront résolues comme exercices : les abonnés ne devront pas en envoyer de solutions.

147. — Puissance d'un point par rapport à un cercle.

148. — [**1254**]. On donne deux droites Ox, Oy, un point A sur Oy et on prend sur Ox deux points P, Q tels que $OP.OQ = k^2$. Lieu du point M diamétralement opposé à A sur le cercle APQ.



149. — Volume de l'anneau sphérique.

150. — Construire un cercle passant par deux points donnés et tangent à un cercle donné.

151. — Par un point P on peut mener un plan perpendiculaire à une droite XY et un seul.

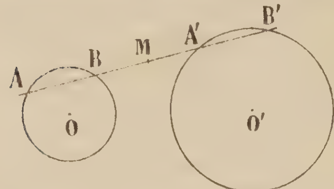
152. — Un triangle rectangle SAB a une hypoténuse égale à a, l'angle B égal à 36°. Ce triangle tourne autour du côté SA; trouver l'aire du cône de révolution engendré.

153. — Dans un triangle, le carré d'un côté opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres côtés moins deux fois le produit de l'un de ces côtés par la projection de l'autre sur lui.

154. — Étant donnés les quatre côtés d'un trapèze ABCD, calculer la diagonale AC.

155. — Si un angle droit se projette orthogonalement sur un plan parallèle à l'un de ses côtés, sa projection est un angle droit. Réciproques.

156. — Soit un trapèze ABCD; on trace la droite EF qui joint les milieux des côtés non parallèles; montrer qu'elle est égale à la demi-somme des bases.



157. — [**1255**]. Étant donnés deux cercles O, O′, tracer une sécante ABA′B′ telle que les segments interceptés par les deux cercles sur cette sécante soient égaux. Il y a une infinité de solutions. Soit M le milieu de A′B; lieu de ce point.

158. — Volume du segment sphérique.

CERTIFICAT D'APTITUDE AU PROFESSORAT DES ÉCOLES NORMALES ET DES ÉCOLES PRIMAIRES SUPÉRIEURES

Deuxième partie.

Aspirants.

SECTION DES SCIENCES APPLIQUÉES.

Mathématiques. I. — Construire la moyenne géométrique de deux longueurs données. En déduire la condition pour que la moyenne géométrique de deux longueurs variables dont la somme est constante soit aussi grande que possible.

Application : 1° x et t étant deux nombres entiers positifs et variables, tels que :

$$x + t = 175,$$

trouver la plus grande valeur que peut prendre le produit xt.

2° On considère l'expression

$$y = \frac{12(x-3)(t-3)}{xt},$$

où x et t sont deux nombres variables tels que :

$$x + t = 17.$$

Représenter graphiquement, en choisissant des échelles convenables, les variations de y en fonction de x, quand x prend toutes les valeurs possibles.

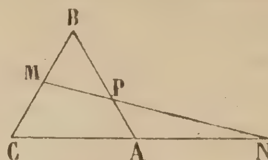
En particulier, indiquer la portion de la courbe qui correspond au cas où x et t ont des valeurs positives.

Quelle est la plus grande valeur de y :

a) en supposant que x et t sont positifs et quelconques?

b) en supposant que x et t sont positifs et entiers?

II. — **1256**. Soit un triangle équilatéral ABC, de côté a.



Mener une droite rencontrant les côtés BC et BA du triangle en M et P et le côté CA prolongé en N, de telle manière que les trois surfaces : triangle MPB, triangle ANP, quadrilatère CAPM, soient équivalentes.

En supposant que le triangle soit inscrit dans un cercle de rayon égal à 1m, calculer PM et PN en millimètres.

N. B. — Les candidats pourront, s'ils le veulent, poser

$$BM = x, \quad BP = y, \quad AN = z,$$

et calculer ces inconnues, soit en utilisant le théorème des transversales, soit en démontrant que la droite BN doit être parallèle à MA.

QUESTIONS PROPOSÉES

1257. — Une automobile part de A pour se rendre à B en suivant une route qui comprend des parties plates, des montées et des descentes. A l'aller dans le sens AB la longueur des montées est les $\frac{4}{5}$ de celle des descentes. La voiture a une vitesse de 40km en terrain plat, 25km en montée et 50km aux descentes. La distance AB est 85km. Sachant qu'au retour de B à A, elle met 6 minutes de plus qu'à l'aller, calculer le temps que met la voiture pour aller de A à B.

(*B. S., Dijon, aspirantes, juillet* 1920.)

1258. — Un terrain a été vendu en trois lots : le premier contenant le tiers du terrain, à raison de 40f l'are; le second, de 21a,10 de superficie, à 70f l'are; le troisième, à 80f l'are. La vente a produit 10 209f. Cette somme a été affectée à l'achat de rente française 5 % 1920. Avec 10 000f, on a acheté de la rente émise au pair entièrement libérée à la souscription. Le reste a servi au paiement du premier terme du plus grand nombre possible de titres libérables en quatre termes. Par titre de 5f de rente, le premier terme était de 25f et le prix total d'émission 101f.

On demande :

1° La surface du terrain;

2° Le montant de la rente acquise;

3° La somme à ajouter au prix de vente du terrain pour libérer les titres achetés à terme.

(*B. S., Paris, aspirantes, juillet* 1920.)

1259. — Une chaudière à vapeur est formée d'un cylindre droit à base circulaire terminé par deux calottes hémisphériques. La longueur du cylindre dépasse son rayon d'une longueur a.

1° Exprimer en fonction de a le rayon x du cylindre et des hémisphères pour que la surface totale de la chaudière soit égale à celle d'une sphère de rayon a.

2° Calculer a pour que cette surface soit $2^{m^2},544706$ et, dans cette hypothèse, calculer le volume du solide en litres.

(*B. S., Lyon, aspirants, juillet* 1920.)

1260. — Dans un triangle rectangle l'un des côtés de l'angle droit est égal à 28m,40 et la somme de l'hypoténuse et de l'autre côté est double de cette longueur.

On demande de calculer :

1° Les trois côtés de ce triangle;

2° Le rayon du cercle inscrit;

3° Le rayon du plus petit cercle exinscrit.

(*B. S., Caen, aspirants, juillet* 1920.)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie PAUL BRODARD.

23e Année. 1er Mai 1921. N° 15.

L'Éducation Mathématique

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

PRIX DU NUMÉRO : France et Colonies, **0 fr. 60**. Étranger, **0 fr. 70**.
ABONNEMENT ANNUEL : France et Colonies, **10 fr.** Étranger, **12 fr.**

Tous les abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, l'on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction : Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Abonnements : Librairie **Vuibert**, Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ARITHMÉTIQUE

4178. — *Trouver un nombre de deux chiffres, sachant que la somme de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique de ses chiffres est divisible par 9.*

En réalité, il s'agit de trouver deux nombres x et y tels que la somme S de leur moyenne géométrique et de leur moyenne arithmétique soit divisible par 9 : la condition qu'ils soient des chiffres n'intervient que pour limiter supérieurement x et y, qui doivent être égaux ou inférieurs à 9. Il est clair que l'on peut permuter x et y : si le nombre xy satisfait à la condition imposée, yx y satisfera aussi.

La relation

$$\frac{1}{2}(x+y)+\sqrt{xy}=m.9$$

montre que le produit xy doit être carré et que x et y sont de même parité. Deux hypothèses s'offrent donc : x et y sont égaux ou sont différents. Si x et y sont égaux, la somme S est égale à $2x$, et, pour qu'elle soit divisible par 9, il faut et il suffit que x soit 9. Le nombre 99 satisfait donc à la condition posée. Si x est différent de y, il faut que xy soit carré : or les seuls couples de nombres d'un chiffre, de même parité, dont le produit est carré sont 1 et 9, 2 et 8.

Le couple formé de 1 et 9 ne donne pas de solution, car la somme S des deux moyennes est 8. Le second couple donne une solution, la somme des moyennes étant 9.

Les deux nombres 28 et 82 répondent donc à la question. En résumé, les solutions sont

$$28, \qquad 82, \qquad 99.$$

(F. BAUJARD.)

Remarque. — Plusieurs correspondants n'ont pas aperçu la solution 99; d'autres n'ont trouvé que celle-là. Quelques-uns donnent comme réponse des nombres qui visiblement ne satisfont pas à la condition donnée, tels que 90 (la moyenne géométrique est nulle, mais la moyenne arithmétique n'est pas un entier), ou 66, et d'autres encore.

Autre solution. — La plus grande valeur que puisse avoir la somme $S=\frac{1}{2}(x+y)+\sqrt{xy}$ est obtenue en donnant à x et à y la valeur 9, c'est alors 18, qui est 2×9. Donc le nombre 99 est une solution.

Si x et y ne sont pas tous deux égaux à 9, S est inférieur à 18, il faut alors que

$$\frac{1}{2}(x+y)+\sqrt{xy}=9,$$

donc

$$x+y+2\sqrt{xy}=18;$$

on en déduit

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=18,$$
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=3\sqrt{2},$$

égalité qui n'est satisfaite que par $x=2$, $y=8$, ou inversement.

(E. PATE.)

[Bonnes solutions : Mlles M. Koch; A. Levifve; MM. Andrei; H. Aubert; A. Bal; Bonnéte; R. Bruneteau; G. Bruniquel; Ch. Caussin; J.-E. Chantrelle; B. Charles; R. Chasselut; G. Clément; M. Courboulay; J. Devisme; P. Durand; G. Fouché; Gabay; E. Garandel; Geffroy-Le Jan; F.-A. Gilly; R. Guiot; G. Houalet; M. Jumeau; Le Goff; R. Legrand; P. Louon; M., à Guéret; J. Majnani; A. Martin; R. Marchant; Y. Maurice; Ménéchal; Meynaud; H. Micard; J. Miserez; J. Moirez; R. Morel; J. Morin; Périgault-Fauché; Philizot; E. Pinlong; R. Renaud; R. Reynard; J. Schilling; H. Sebban; L. Soulier; A. Trojani; N. Vedie.

Assez bonnes solutions : MM. P. Arnavon; C. Beaujean; M. Boulvert; J. Cartouzou; M. Castelain; H. Forait; E. Guichenoy; L. Linémann; L.-G. Papon; Sambussy; H. Sciaud; G. Vimbert.]

4192. — *Trouver un nombre de deux chiffres égal au double du produit de ses chiffres. Existe-t-il un nombre de trois chiffres qui soit égal au double du produit de ses chiffres?*

On demande que

$$10x+y=2xy;$$

cette équation peut s'écrire

$$(2x-1)(y-5)=5.$$

$2x-1$ et $y-5$ sont des entiers; or 5 n'est décomposable en un produit de deux entiers que d'une façon, 1×5; il faut donc ou bien que $2x-1=1$ avec $y-5=5$ ou bien que $2x-1=5$, avec $y-5=1$; la première solution donne pour y une valeur trop grande. Il ne reste donc que la seconde, qui donne des valeurs acceptables, $x=3$, $y=6$. Le nombre demandé est 36, qui est bien tel que

$$36=2(3\times 6).$$

Il n'existe pas de nombre de trois chiffres égal au double du produit de ses chiffres : supposons en effet qu'on puisse trouver trois chiffres, x, y et z tels que

$$100x+10y+z=2xyz, \qquad (1)$$

on en déduit la valeur de x :

$$x=\frac{10y+z}{2(yz-50)};$$

pour que x soit entier, il faut d'abord que z soit pair, posons donc $z=2k$, avec $k\leqslant 4$.

Alors

$$x=\frac{5y+k}{2(ky-25)},$$

il faut encore que le numérateur soit pair, donc y et k sont de même parité, et que le dénominateur soit positif, donc $ky\geqslant 26$.

Alors, si $k=4$, il faut $y>6$, donc $y=8$;
— $k=3$, — $y>8$, — $y=9$.

Les autres valeurs de k exigeraient $y>10$; elles doivent donc être écartées.

Il n'y a donc que deux essais à faire :

$$k=4 \quad \text{donne} \quad z=8, \quad y=8,$$

mais le nombre

$$\frac{5y+k}{2(ky-25)} \quad \text{prend la valeur} \quad \frac{44}{14},$$

qui n'est pas entière; $k=3$ avec $y=9$ donne

$$\frac{5y+k}{2(ky-25)}=\frac{48}{4}=12,$$

qui est entier, mais supérieur à 10.

Il n'existe donc aucun nombre de trois chiffres ayant la propriété exprimée par l'équation (1).

(Solution analogue : Maurice POMMEROLLES, à Fresnes, Nord.)

[Bonnes solutions : Mlles M. Fontaine; M. Koch; M. Marignac; MM. P. Arnavon; A. Bal; C. Beaujean; G. Bénazet; V. Bourden; R. Bruneteau; J. Bugnard; Ch. Caussin; B. Charles; R. Chasselut; Cherpin; G. Clément; M. Courboulay; C. Crépeau; A. Favart; G. Février; L. Fixe; H. Forait; Gabay; Geffroy-Le Jan; F.-A. Gilly; E. Guichenoy; G. Houalet; G. Knoll; F. Lapeyrère; J. Lassave; P. Louon; M., à Guéret; Y. Maurice; Ménéchal; G. Meynaud; J. Moreau-Chanteau; G. Mouzon; F. Negretzu; C. Noël; Olivier; E. Paté; J. Périn; L. Philizot; G. Pichon; Pierdet; E. Pinlong; M. Pinot; A. Popu; R. Revel; R. Reynard; J. Schilling; H. Sciaud; H. Sebban; L. Soulier; Thémin; R. Vallé; N. Vedie; G. Vimbert.

Assez bonnes solutions : Mlle G. David; MM. M. Barny; G. Bitaine; G. Boulay; J. Cartouzou; R. Cazin; Dauriac; J. Devisme; J. Dougados; Geffroy-Le Jan; L. Kerleroux; M. Lhoumeau; R. Marchant; Ch. Norgelet; Pagès; F. R., à Ajaccio; E. Reynaud; L. Simon.]

ALGÈBRE

4216. — *Deux nombres étant liés par la relation*

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1, \qquad (1)$$

1° *entre quelles limites peut varier la quantité* x^2+y^2?
2° *entre quelles limites peut varier le produit* xy?

N. B. — La résolution de ces deux questions exige une discussion qui ne présente aucune difficulté, au point de vue des calculs, mais qui demande de l'attention et de la méthode, car on rencontre des inégalités, dont le sens dépend du signe de certains coefficients. Il est essentiel de distinguer différents cas, suivant le signe de ces coefficients. Pour avoir négligé de le faire, plusieurs de nos correspondants ont donné des résultats incomplets ou même faux.

1° Posons

$$x^2+y^2=r^2; \qquad (2)$$

si deux nombres algébriques x et y vérifiant la relation (1) sont tels que $x^2+y^2=r^2$, ces deux nombres sont une solution du système des équations (1) et (2). Donc, pour que la somme des carrés de deux nombres vérifiant l'équation (1) puisse atteindre la valeur r^2, il faut et il suffit que le système des équations (1) et (2) soit possible.

(C'est ce qu'on appelle la méthode indirecte de recherche des maxima et minima.)

Pour résoudre ce système d'équations, prenons comme inconnue auxiliaire le rapport $\frac{y}{x}$, que nous désignons par t. Si nous divisons membre à membre l'équation (1) par l'équation (2), nous trouvons une équation du second degré en t :

$$t^2\left(C-\frac{1}{r^2}\right)+2Bt+A-\frac{1}{r^2}=0; \qquad (3)$$

la condition d'existence des racines est

$$B^2-\left(C-\frac{1}{r^2}\right)\left(A-\frac{1}{r^2}\right)\geqslant 0; \qquad (4)$$

si t' et t'' sont les racines de cette équation, on aura les valeurs correspondantes de x et de y par les formules

$$x'^2=\frac{r^2}{1+t'^2}, \qquad y'^2=t'^2x'^2,$$

$$x''^2=\frac{r^2}{1+t''^2}, \qquad y''^2=t''^2x''^2.$$

Comme x', x'', y' et y'' sont connus par leurs carrés, (qui sont évidemment positifs), toute racine de l'équation (3) donne quatre solutions du système (1). La question est donc ramenée à la discussion de l'inégalité (4). Écrivons m au lieu de $\frac{1}{r^2}$, (m est essentiellement positif), la condition (4) se développe ainsi

$$m^2-m(A+C)+AC-B^2\leqslant 0; \qquad (5)$$

en égalant à zéro ce trinome en m, on forme une équation qui a toujours des racines, car la quantité sous le radical est

$$(A+C)^2-4AC+4B^2=(A-C)^2+4B^2;$$

elle est positive et nous ne pouvons même pas la supposer nulle, car cela entraînerait $A=C$ et $B=0$, la relation (1) serait alors $A(x^2+y^2)=1$; x^2+y^2 étant constant, le problème de la variation ne se poserait pas.

Mais maintenant trois cas peuvent se présenter :

a) Le trinome en m a *deux racines positives* m' et m'' : c'est-à-dire que $AC-B^2>0$ et $A+C>0$; comme la première inégalité montre que A et C ont même signe, il faut et il suffit que $AC-B^2>0$, $A>0$; l'inégalité (5) n'est vérifiée que si

$$m'\leqslant m\leqslant m'',$$

d'où

$$\frac{1}{m''}\leqslant r^2\leqslant\frac{1}{m'}.$$

Donc il existe dans ce cas un maximum et un minimum absolus de r^2. La somme x^2+y^2 peut prendre toute valeur comprise entre

$$\frac{2}{A+C+\sqrt{(A-C)^2+4B^2}} \quad \text{et} \quad \frac{2}{A+C-\sqrt{(A-C)^2+4B^2}}.$$

b) Le trinome en m a deux racines négatives, m' et m'', ce qui, d'après ce qui a été vu plus haut, est caractérisé par les conditions $AC-B^2>0$, $A<0$.

Alors la condition (5) ne peut être vérifiée que par des nombres compris entre m' et m'', qui sont négatifs; mais m est positif. Il en résulte que le système (1) est impossible, quel que soit m. Il est facile de se rendre compte de cette impossibilité, l'équation (1) peut s'écrire

$$\frac{1}{A}[(Ax+By)^2+(AC-B^2)y^2-A]=0,$$

tous les termes de la parenthèse sont positifs et l'un d'eux, A, n'est pas nul; cette équation est impossible.

c) Enfin l'équation peut avoir deux racines m' et m'', de signes contraires; ce cas est caractérisé par l'inégalité $AC-B^2<0$.

La condition (5) est vérifiée par les valeurs de m comprises entre m' et m'', mais d'autre part, m est positif. Donc m peut prendre toute valeur de l'intervalle $(0, m'')$, il en résulte que r^2 peut prendre toute valeur supérieure à

$$\frac{1}{m''}, \quad \text{ou à} \quad \frac{2}{A+C+\sqrt{(A-C)^2+4B^2}}.$$

Il y a donc, dans ce cas, un minimum absolu de x^2+y^2 et pas de maximum.

Résumé :

$AC - B^2 > 0$, $A < 0$, l'équation (1) est impossible;

$AC - B^2 > 0$, $A > 0$, la quantité $x^2 + y^2$ est comprise entre un maximum et un minimum absolus;

$AC - B^2 < 0$, elle a un minimum absolu et n'est pas limitée supérieurement.

2° La deuxième question est plus difficile, ou, du moins, la discussion présente plus de cas, mais le principe est exactement le même que celui de la solution précédente.

Pour que le produit xy puisse prendre une valeur m, il faut que le système

$$\text{(II)} \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1, \quad (1) \qquad xy = m \qquad (2)$$

ait au moins une solution.

Pour le résoudre, tirons la valeur de y de la seconde équation et portons-la dans la première : nous obtenons une équation bicarrée

$$Ax^4 + (2Bm - 1)x^2 + Cm^2 = 0. \qquad (3)$$

On est donc amené à discuter une équation bicarrée. On sait qu'une telle équation peut avoir zéro, deux ou quatre racines, (deux à deux égales et de signes contraires). Il faut donc poser les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle ait deux ou quatre racines, en excluant le cas où elle n'en aurait pas.

a) Cas de deux racines : il faut et il suffit que A et C soient de signes contraires : alors, quel que soit m, l'équation bicarrée donne deux valeurs pour x, et l'équation (2) leur fait correspondre deux valeurs de y.

Conclusion : si $AC < 0$, le produit xy peut prendre toute valeur et cela deux fois, pour des valeurs x', y' et pour $-x'$, $-y'$.

b) Cas où l'équation a quatre racines : il faut pour cela que trois conditions soient remplies :

Que l'équation en x^2 ait des racines, c'est-à-dire que

$$(2Bm - 1)^2 - 4ACm^2 \geqslant 0\,; \qquad (4)$$

Que la somme et le produit de ces racines soient positifs :

$$AC > 0, \quad (5) \qquad A(2Bm - 1) < 0; \quad (6)$$

en développant la condition (4), on obtient un trinome du second degré en m,

$$f(m) \equiv 4(B^2 - AC)m^2 - 4Bm + 1 > 0, \qquad (4')$$

qui a des racines, car la quantité sous le radical est 4AC, qui est positif (condition 5); mais, suivant le signe du coefficient du carré, l'inégalité est vérifiée par des valeurs intérieures ou par des valeurs extérieures à l'intervalle de ces racines.

Nous remarquons aussi que si l'on substitue dans ce trinome le nombre $m = \frac{1}{2B}$, le résultat obtenu, comme la forme (4) du trinome le montre immédiatement, est $f\left(\frac{1}{2B}\right) = -\frac{AC}{B^2}$: il est donc négatif. Nous avons ainsi préparé les éléments de la discussion : il y a d'abord deux cas à distinguer, $B^2 - AC > 0$ et $B^2 - AC < 0$ (dans tous les cas nous supposons maintenant que AC est positif).

1° $B^2 - AC < 0$. Il faut pour vérifier l'inégalité (4') que m prenne une valeur comprise entre m' et m'', racines du trinome. Ces deux racines ont des signes opposés, puisque leur produit est $\frac{1}{4(B^2 - AC)}$. D'autre part, puisque $f\left(\frac{1}{2B}\right) < 0$, $\frac{1}{2B}$ est extérieur à l'intervalle des racines. L'ordre est

$$m' < 0 < m'' < \frac{1}{2B}$$

si

$$B > 0;$$

au contraire, le classement est

$$\frac{1}{2B} < m' < 0 < m''$$

si

$$B < 0.$$

Considérons alors la condition (6),

$$A(2Bm - 1) < 0.$$

Si $AB > 0$, elle donne $m < \frac{A}{2AB}$ ou $m < \frac{1}{2B}$;

Si $AB < 0$, elle donne $m > \frac{A}{2AB}$ ou $m > \frac{1}{2B}$.

Soit alors $B > 0$ et $A > 0$, m doit satisfaire aux conditions

$$m' < m < m'' \qquad \text{et} \qquad m < \frac{1}{2B};$$

m', m'' et $\frac{1}{2B}$ sont classés dans l'ordre

$$m' < 0 < m'' < \frac{1}{2B};$$

pour satisfaire à ces conditions, il suffit que m soit compris entre m' et m''.

On arrive à une conclusion semblable si $B < 0$ et $A > 0$; car il faut dans ce cas concilier les conditions

$$m' < m < m'' \qquad \text{et} \qquad m > \frac{1}{2B},$$

le classement étant

$$\frac{1}{2B} < m' < 0 < m'';$$

il faut et il suffit que m soit compris entre m' et m''.

Conclusion : quand $B^2 - AC < 0$ avec $A > 0$, le produit xy peut prendre quatre fois toute valeur comprise entre un maximum positif m'' et un minimum négatif, m'.

Supposons au contraire $A < 0$, d'abord avec $B > 0$: les conditions

$$m' < m < m'' \qquad \text{et} \qquad m > \frac{1}{2B},$$

sont incompatibles, parce que le classement est

$$m' < 0 < m'' < \frac{1}{2B},$$

et de même quand $A < 0$ avec $B > 0$, les conditions

$$m' < m < m'' \qquad \text{et} \qquad m < \frac{1}{2B},$$

sont également inconciliables, parce que le classement est

$$\frac{1}{2B} < m' < 0 < m''.$$

Conclusion : quand $B^2 - AC < 0$ avec $A < 0$, le produit xy ne peut prendre aucune valeur; cela s'explique par la remarque qui a été faite dans la discussion du maximum de $x^2 + y^2$: quand ces inégalités ont lieu, l'équation (1) du système est impossible.

2° Soit maintenant $B^2 - AC > 0$; puisque $f\left(\frac{1}{2B}\right) < 0$, le nombre $\frac{1}{2B}$ est compris entre les racines m' et m'', qui, cette fois, ont même signe. Il faut concilier les conditions suivantes : m doit être extérieur à l'intervalle (m', m'') et doit être, suivant le signe de AB, supérieur ou inférieur à $\frac{1}{2B}$: ces conditions sont toujours compatibles : si $AB > 0$, il faut $m < \frac{1}{2B}$, il suffira donc que m soit inférieur à m'; si $AB < 0$, il faut $m > \frac{1}{2B}$, il suffira donc que m soit supérieur à m''.

Conclusion : quand $B^2 - AC > 0$, si $AB > 0$, m peut prendre toute valeur inférieure à un nombre m', qui est un maximum absolu; mais m n'a pas de limite inférieure. Si $AB < 0$, m peut

prendre toute valeur supérieure à m'', qui est un minimum absolu, et m n'a pas de limite supérieure.

Les nombres m' et m'' ont des valeurs simples :

si $$B^2 - AC > 0,$$

$$m' = \frac{2B - \sqrt{4AC}}{4(B^2 - AC)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B - \sqrt{AC}}{(B + \sqrt{AC})(B - \sqrt{AC})} = \frac{1}{2} \frac{1}{B + \sqrt{AC}},$$

$$m'' = \frac{1}{2} \frac{1}{B - \sqrt{AC}};$$

si $B^2 - AC < 0$, la racine positive est au contraire $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{B + \sqrt{AC}}$, et la racine négative, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{B - \sqrt{AC}}$.

Remarquons en effet que

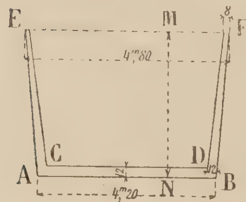
$$m'' - m' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{B - \sqrt{AC}} - \frac{1}{B + \sqrt{AC}}\right] = \frac{\sqrt{AC}}{B^2 - AC},$$

$m'' - m'$ a le signe de $B^2 - AC$.

[Bonne solution : M. M., à Guéret.
Solutions passables : MM. Adelle, à Bonneval; R. Marchant, athénée d'Anvers; G. Lebrun, athénée d'Ixelles-Bruxelles.]

GÉOMÉTRIE

4170. — *La coupe d'une cuve tronconique en béton a la forme ci-contre.*



L'épaisseur du fond est de 12^{cm}. *La paroi latérale a une épaisseur de* 12^{cm} *au niveau du fond intérieur CD et de* 8^{cm} *au bord supérieur. Le diamètre* $AB = 4^m,20$; *le diamètre* $EF = 4^m,80$. *La hauteur totale MN est égale au côté du carré inscrit dans la grande base EF du tronc.*

On demande : 1° le volume intérieur de la cuve; 2° le volume du béton.

(*B. S., Belfort, mars* 1920.)

N. B. — L'énoncé de cette question n'a pas toute la précision désirable : on peut, en effet, se demander ce qu'on doit entendre par *épaisseur* d'un solide limité par deux surfaces *qui ne sont pas parallèles* (comme le sont deux plans, deux sphères concentriques ou deux cylindres de révolution de même axe). Le fond de la cuve est compris entre deux plans parallèles, mais les parois sont comprises entre deux cônes de révolution de même axe. Il faut faire une hypothèse sur ce qu'on doit entendre par épaisseur de la paroi de la cuve : nous appellerons épaisseur en un point la différence entre les rayons des deux parallèles, suivant lesquels un plan perpendiculaire à l'axe mené par ce point coupe les cônes de révolution qui forment la surface extérieure et la surface intérieure. C'est ce que tous nos correspondants ont admis : on aurait pu encore dire que le point C est centre d'un cercle de 12^{cm} de rayon, tangent à AE et à AB.

Calculons d'abord le volume extérieur : c'est un tronc de cône, les rayons des bases sont $R = 24^{dm}$, $r = 21^{dm}$. La hauteur est $MN = \frac{1}{2} EF \sqrt{2} = 24\sqrt{2} = 33^{dm},94$.

Le volume est

$$\frac{1}{3}\pi \frac{\overline{EF}^2 + \overline{AB}^2 + EF.AB}{4} MN = \pi\sqrt{2}(\overline{24}^2 + \overline{21}^2 + 24.21)8;$$

on a

$24^2 =$	576	
$21^2 =$	441	$\pi = 3,1416$
$24 \times 21 =$	504	$\sqrt{2} = 1,4142$
Total	1 521	$\pi\sqrt{2} = 4,44285$
	8	
	12 168	

$$12\,168 \times 4,44285 = 54\,060^l,6.$$

Calculons ensuite le volume intérieur : la hauteur est

$$MN - 1,2 = 32,74.$$

Pour calculer C_1D_1, diamètre du cercle suivant lequel le plan de CD coupe le cône extérieur, appelons P le point où CD coupe MN, et appliquons la formule

$$C_1D_1 \times MN = AB \times MP + EF \times PN,$$

on en tire

$$MN.C_1D_1 = AB(MN - 1,2) + EF(1,2),$$
$$C_1D_1 = AB + 1,2\frac{EF - AB}{MN}$$
$$= AB + \frac{1,2}{24} \cdot \frac{6}{\sqrt{2}};$$

le rayon de ce parallèle est $\frac{1}{2} C_1D_1$, donc

$$21 + \frac{1,2}{24} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = 21 + \frac{3}{40}\sqrt{2} = 21,1060;$$

le rayon du cercle intérieur est plus petit de 1,2, c'est donc 19,9.

Le tronc de cône intérieur a pour dimensions :

rayon de la grande base	$24 - 0,8 = 23,2$
— petite base	19,9
hauteur	$MN - 1,2 = 32,74$

$(23,2)^2 =$	538,24
$(19,9)^2 =$	396,01
$19,9 \times 23,2 =$	461,68
	1 395,93

$$\frac{1}{3} 1\,395,93 \times \pi \times 32,74 = 47\,860.$$

Le volume extérieur est de	$54\,060^l$
— intérieur —	$47\,860^l$
— du béton est donc	$6\,200^l$.

(Charles Parès, adjoint technique des Ponts et Chaussées à Saint-Girons.)

Remarque. — Beaucoup de correspondants ont pris $CD = AB - 2,4$; cela n'est pas rigoureusement juste; la différence n'est pas négligeable, car on trouve ainsi $CD = 42 - 2,4 = 39,6$, dont la moitié est 19,8 (au lieu de 19,9).

[Bonnes solutions : MM. C. Beaujean; B. Charls; G. Clément; M. Courboulay; J. Devisme; R. Gils; R. Marchant; Y. Maurice; G. Mouzon; A. Terrier.
Assez bonnes solutions : MM. E. Arnaud; A. Authier; G. Bénazet; R. Bonhomme; Bonnet; A. Bordes; A. Bougrier; V. Bourden; J. Briquet; A. Chatelier; C. Crépeau; P. D.; Ch. Dubost; A. Dubuc; M. Ducluseau; A. F.; E. Faudou; A. Favard; H. Forait; G. Fouché; G. Knoll; M. Laporte; M. Lascoux; R. Legrand; P. Louon; A. Monjallon; L.-G. Papon; E. Paté; E. Pinlong; G. Remacle; C. Riedel; A. Robba; M. Robineau; M. Sator; R. Siberchicot; G. Vimbert; R. Weinzaepfel.]

4172. — *Trois circonférences* O_1, O_2, O_3 *se coupent deux à deux sous un même angle* 2θ *en M, N et P. Montrer que :*

1° MN, NP, PM *passent par des centres de similitude des trois circonférences;*

2° *le cercle* MNP, *de centre* ω, *coupe les trois circonférences* O_1, O_2, O_3 *sous l'angle* θ;

3° *les droites* ωM, ωN, ωP *sont bissectrices des angles en* M, N *et* P *de l'hexagone* AMBNCP, *qui est circonscrit à un cercle de centre* ω.

La résolution de cette question exige que l'on définisse bien au préalable ce qu'on entend par angle de deux cercles et que l'on élucide une question de signe.

Deux cercles forment une figure qui a pour axe de symétrie la ligne des centres.

Appelons angle des cercles l'angle que forment leurs tangentes en un point commun M, ces tangentes Mt_1 et Mt_2 étant menées dans la région du plan extérieure aux deux cercles : cette définition entraine que les tangentes considérées sont des demi-droites : leur angle est défini à deux droits près, comme celui de deux droites dirigées.

Si θ est l'angle de deux cercles de centres O_1 et O_2 qui se coupent en M, on forme, en tournant autour du point M la somme

$$\widehat{O_1Mt_1} + \widehat{t_1Mt_2} + \widehat{t_2MO_2} + \widehat{O_2MO_1} = 2\pi,$$

donc, puisque $\widehat{O_1Mt_1}$ et $\widehat{t_2MO_2}$ sont droits,

$$\widehat{t_1Mt_2} = \pi - \widehat{O_2MO_1};$$

l'angle des tangentes dirigées Mt_1 et Mt_2 et l'angle des rayons MO_2 et MO_1 sont donc supplémentaires.

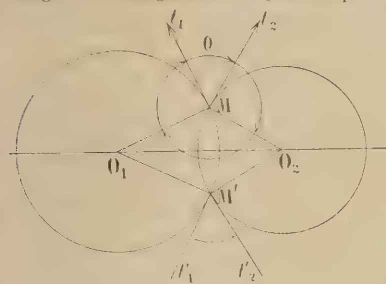


Fig. 1.

On peut se demander s'il est possible de définir un sens de l'angle de deux cercles, comme cela a lieu pour celui de deux droites dirigées; cela peut se faire, si l'on convient d'adopter un sens de parcours sur chacun des cercles : dans ce cas la ligne des centres n'est plus un axe de symétrie. Des cercles sur lesquels un sens de parcours a été adopté portent le nom de *cycles*. L'introduction de cette notion simplifie par la suite bien des problèmes. Cependant nous n'en ferons pas usage dans le cas qui nous occupe.

Étant données deux demi-droites OD et OD', on appelle angle de OD' avec OD celui dont il faut faire tourner OD pour l'amener à coïncider avec OD' : l'angle de OD avec OD' a même valeur absolue, mais son sens (et par suite son signe) sont opposés.

Considérons maintenant deux cercles : un premier cercle O_1 et un second cercle O_2; appelons angle de O_2 avec O_1 celui des tangentes dirigées à ces cercles en un point commun, cet angle étant défini comme il vient d'être dit pour l'angle de deux demi-droites : cet angle a un sens, mais au point M', symétrique de M, les deux cercles font un angle symétrique du précédent, donc de sens opposé. Il en résulte que l'angle de deux cercles n'a pas de sens.

1° Étant donnés trois cercles O_1, O_2, O_3, dont chacun coupe les deux autres en deux points, on peut associer les points de façon que les angles des tangentes aux cercles O_1 et O_2, O_2 et O_3, O_3 et O_1 aient tous trois le même sens (fig. 2). Prenons arbitrairement le point M, intersection de O_2 et O_3 : l'angle des tangentes Mt'_2 et Mt_3 a un certain sens : choisissons ensuite celui des deux points d'intersection des cercles O_3 et O_1 où l'angle $t'_3Nt'_1$ a même sens que t'_2Mt_3 (soit N ce point), puis celui des deux points d'intersection des cercles O_1 et O_2 où l'angle des tangentes a même sens que t'_2Mt_3 (soit P ce point); nous formerons un triangle MNP, tel que les angles formés par les tangentes aux cercles, mis dans l'ordre 1, 2, 3, aient partout le même sens.

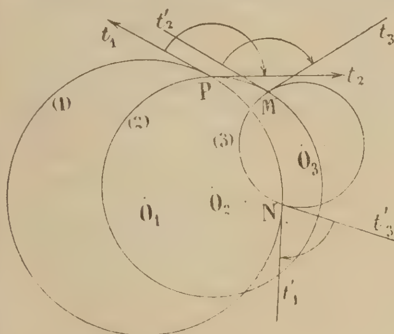


Fig. 2.

Considérons alors trois cercles O_1, O_2, O_3 qui se coupent deux à deux de façon que les angles aux points d'intersection soient égaux en valeur absolue à un même angle 2θ. Associons trois points M, N et P où les angles (O_2, O_3), (O_3, O_1), (O_1, O_2) ont même sens, comme il a été dit plus haut.

Considérons les deux points M et N (fig. 3) : les tangentes au cercle O_3 en M et N sont également inclinées sur MN, en sens contraires, c'est-à-dire qu'elles forment avec MN un triangle isocèle MtN; menons les tangentes Mt' et Nt'' aux cercles O_2 et O_1, si les angles $t'Mt(O_2, O_3)$ et $tNt''(O_3, O_1)$ sont de même sens, les angles tMt' et tNt'' ont des sens opposés, donc Mt' et Nt'' sont aussi symétriques par rapport à la perpendiculaire élevée à MN en son milieu : les tangentes tM et tN sont égales, M et N sont

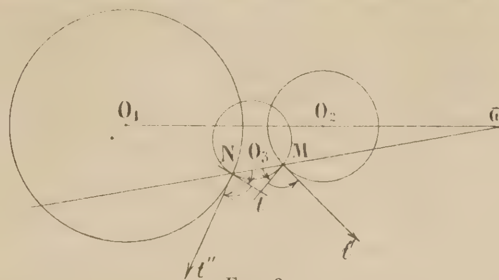


Fig. 3.

deux points anti homologues sur les cercles O_2 et O_1, la ligne MN passe par un centre de similitude ϖ de ces cercles (*).

Un raisonnement semblable prouve que P et M sont antihomologues sur les cercles O_2 et O_3, la droite PM passe par un centre de similitude de ces cercles; PN passe par un centre de similitude des cercles O_3 et O_1.

La ligne MN passant par un centre de similitude ϖ des cercles O_1 et O_2, P peut être regardé comme un point de O_1 qui coïncide avec son antihomologue de O_2 par rapport à ϖ; on a donc

$$\overline{\varpi P}^2 = \overline{\varpi N}\,.\,\overline{\varpi M},$$

le cercle MNP est donc tangent à la droite $P\varpi$ au point P ; pour

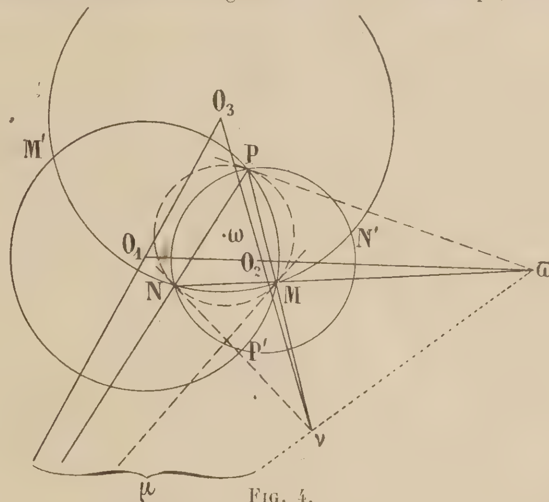


Fig. 4.

une raison semblable, ce cercle touche la droite μM en M et νN en N.

Les trois points ϖ, μ, ν sont donc les points où les tangentes au cercle (ω) aux sommets du triangle MNP, inscrit dans ce cercle, rencontrent les côtés opposés de ce triangle; par conséquent ils sont en ligne droite (**).

2° Le point P étant un point de O_1 qui coïncide avec son antihomologue de O_2 par rapport à ϖ, les tangentes à O_1 et à O_2 en P sont également inclinées sur $P\varpi$, mais en sens contraires,

(*) On voit que le raisonnement ne s'appliquerait pas à deux points tels que M et N' où les angles des tangentes aux cercles n'ont pas même sens.

(**) En effet, on a

$$\frac{\overline{\varpi N}}{\overline{\varpi M}} = \left(\frac{PN}{PM}\right)^2, \quad \frac{\overline{\nu M}}{\overline{\nu P}} = \left(\frac{NM}{NP}\right)^2, \quad \frac{\overline{\mu P}}{\overline{\mu N}} = \left(\frac{MP}{MN}\right)^2;$$

en faisant le produit, on voit que

$$\frac{\overline{\varpi N}}{\overline{\varpi M}} \times \frac{\overline{\nu M}}{\overline{\nu P}} \times \frac{\overline{\mu P}}{\overline{\mu N}} = +1.$$

La droite $\mu\nu\varpi$ est donc ce que l'on nomme un *axe de similitude* des trois cercles : des centres de similitude, 3 ou 1 sont des centres de similitude directe 0 ou 2 des centres de similitude inverse.

ce qui prouve que la tangente au cercle (ω) en P est une bissectrice de l'angle des tangentes en P aux cercles O_1 et O_2 : le rayon ωP est l'autre bissectrice.

Dans le cas que présente la figure 4, Pϖ est bissectrice extérieure de l'angle des tangentes aux cercles O_1 et O_2 menées dans la région extérieure aux deux cercles, il en résulte que l'angle du cercle (ω) avec O_1 et O_2 est $\frac{1}{2}\pi + \theta$; dans le cas que présente la figure 5, ϖP est bissectrice intérieure de l'angle des tangentes

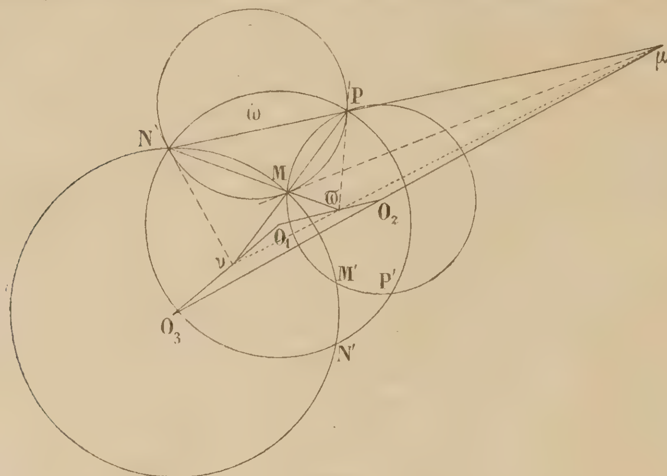


Fig. 5.

aux cercles O_1 et O_2 menées dans la région extérieure à ces cercles, l'angle de (ω) avec O_1 et O_2 est donc bien θ.

3° D'après ce qui précède, le point ω est équidistant des tangentes aux cercles O_1, O_2 et O_3 en M, N et P, car ces tangentes sont des cordes du cercle (ω), également inclinées sur les rayons ωM, ωN et ωP. Le centre ω est donc équidistant de ces cordes. Les six tangentes aux cercles O_1, O_2 et O_3 aux points M, N et P forment donc un hexagone circonscrit à un cercle dont ω est le centre. (Solution analogue : F. BAUJARD.)

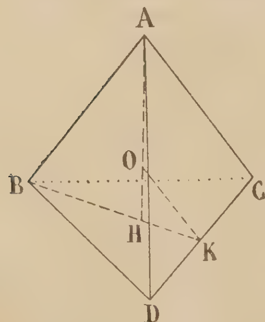
[Bonnes solutions : MM. Adelle, à Bonneval; A. Cieutat, à Montivilliers; Geffroy-Le Jan, école primaire supérieure de Guingamp; P. Louon, athénée d'Ixelle; M., à Guéret; G. Meynaud, école professionnelle de Périgueux; J. Millour; M. Pommerolle, à Fresnes.]

SOLUTIONS D'EXERCICES

4083. — *Étant donné un tétraèdre régulier, soit r le rayon de la sphère inscrite, R celui de la sphère circonscrite, ρ le rayon de la sphère tangente aux arêtes : démontrer que*

$$\rho^2 = Rr.$$

Soit K le milieu de l'arête DC, le plan BKA est un plan de symétrie perpendiculaire à DC; il contient la hauteur AOH. Le centre de la sphère circonscrite est le point O, qui est le centre commun des trois sphères, l'orthocentre et le centre de gravité du tétraèdre. Il en résulte que OA = R, OH = r et OK = ρ. La face BDC est un triangle équilatéral, inscrit dans le cercle de rayon HB : si nous posons HB = a, nous avons



$$HK = \frac{1}{2}a, \qquad AD = DC = a\sqrt{3},$$

donc

$$\overline{AH}^2 = 3a^2 - a^2 = 2a^2,$$

d'où

$$AH = a\sqrt{2}, \qquad AO = \frac{3}{4}AH = \frac{3a\sqrt{2}}{4}, \qquad OH = \frac{1}{4}a\sqrt{2};$$

enfin

$$\overline{OK}^2 = \frac{a^2}{4} + \overline{OH}^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} = \frac{3a^2}{8}, \quad \text{d'où} \quad OK = \frac{a\sqrt{3}.\sqrt{2}}{4}.$$

En comparant les valeurs

$$OA = \frac{3a\sqrt{2}}{4}, \qquad OH = \frac{a\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad OK = \frac{a\sqrt{3}\sqrt{2}}{4},$$

on voit que l'on a bien $\overline{OK}^2 = OA \times OH$.

4114. — *Résoudre le système*

$$x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = 32, \qquad (1)$$
$$x^4y^2 + x^2y^4 = 128. \qquad (2)$$

Définition des fonctions symétriques : emploi d'inconnues auxiliaires.

La première équation peut être écrite

$$x^3 + y^3 + xy(x + y) = 32,$$

et la seconde

$$x^2y^2(x^2 + y^2) = 128.$$

On voit que les premiers membres sont des fonctions symétriques des inconnues x et y : on peut les exprimer au moyen du produit $xy = p$ et de la somme $s = x + y$; on a

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = s^3 - 3ps,$$
$$x^2 + y^2 = s^2 - 2p.$$

Avec ces nouvelles inconnues, le système devient

$$s^3 - 3ps + ps = s^3 - 2ps = 32, \qquad (1')$$
$$p^2(s^2 - 2p) = 128; \qquad (2')$$

(la quantité $s^2 - 2p$ est $x^2 + y^2$); en divisant les deux termes de la seconde équation par ceux de la première, on fait disparaître le facteur $s^2 - 2p$ et l'on trouve

$$\frac{p^2}{s} = \frac{128}{32} = 4.$$

Remplaçons s par $\frac{p^2}{4}$ dans la première équation, on trouve

$$\frac{p^2}{4}\left(\frac{p^4}{16} - 2p\right) = 32,$$

ou

$$p^3(p^3 - 32) = 2\,048;$$

c'est une équation du second degré en p^3 :

$$(p^3)^2 - 32p^3 - 2\,048 = 0,$$

dont les racines sont les nombres

$$16 \pm \sqrt[2]{256 + 2\,048} = 16 \pm \sqrt{2\,304},$$

ce qui donne

$$16 + 48 = 64 \qquad \text{et} \qquad 16 - 48 = -32;$$

cela fournit

$$p^3 = 64, \quad \text{d'où} \quad p = 4,$$

et

$$p^3 = 32, \quad \text{d'où} \quad p = 2\sqrt[3]{4}.$$

La première solution donne $s = 4$, les nombres cherchés x et y sont les racines de l'équation

$$x^2 - 4x + 4 = 0;$$

ils sont l'un et l'autre égaux à 2.

La seconde solution donne $s = 2\sqrt[3]{2}$; les nombres sont racines de

$$x^2 - 2\sqrt[3]{2}x + 2\sqrt[3]{4} = 0;$$

mais cette équation n'a pas de racines, car $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 - 2\sqrt[3]{4} = -\sqrt[3]{4} < 0$.

4115. — *Résoudre l'inégalité*

$$(1 + m + m^2)^2 < 3(1 + m^2 + m^4).$$

On a

$$(1 + m + m^2)^2 = 1 + m^2 + m^4 + 2(m + m^2 + m^3)$$
$$= 1 + m^2 + m^4 + 2m(1 + m + m^2);$$

on peut donc mettre l'inégalité sous la forme

$$(1 + m + m^2)^2 < 3(1 + m + m^2)^2 - 6m(1 + m + m^2)$$

et diviser par $1 + m + m^2$ les deux membres, car ce trinome, qui n'a pas de racines, est toujours positif; l'inégalité ne change pas de sens et devient

$$1 + m + m^2 < 3(1 + m + m^2) - 6m,$$

ou

$$m^2 - 2m + 1 > 0.$$

Le premier membre étant le carré de $m-1$, l'inégalité est vérifiée pour toute valeur de m, cependant, pour $m=1$, les deux membres sont égaux. Donc, quel que soit m, on a

$$(1+m+m^2)^2 \leqslant 3(1+m^2+m^4),$$

l'égalité ayant lieu pour $m=1$. En effet, quand on remplace m par 1, les deux membres deviennent égaux à 9.

EXAMENS ET CONCOURS DE 1920 (*Suite*).

EXAMENS ORAUX des ÉCOLES NATIONALES D'ARTS ET MÉTIERS (*)

Géométrie (*Suite*).

159. — Cas d'égalité des triangles rectangles.

160. — Aire engendrée par un segment de droite AB tournant autour d'un axe XY situé dans son plan et ne traversant pas AB. Énoncer la série des théorèmes qui conduisent à l'aire de la sphère.

161. — [**4261** (**)]. On donne deux sphères concentriques et par leur centre commun O, on fait passer une sphère de rayon variable. Montrer que la zone interceptée par cette sphère sur les deux autres a une aire constante.

---

162. — D'un point variable D de la base BC d'un triangle isocèle ABC, on abaisse les perpendiculaires sur les deux autres côtés. Montrer que la somme de ces perpendiculaires est constante. Cas où le point D est pris sur le prolongement du côté.

163. — La somme des faces d'un angle polyèdre convexe est inférieure à quatre angles droits.

164. — Construire deux longueurs connaissant leur différence et leur moyenne géométrique.

---

165. — On donne un cercle O, un point S et un rapport d'homothétie k. Construire le cercle homothétique du cercle O par rapport au centre S et avec la raison k.

166. — [**4262**]. On donne deux cercles O, O′. De l'un de leurs centres d'homothétie S on mène une sécante quelconque SABA′B′ coupant O en A, B et O′ en A′, B′. On trace les tangentes MA, MB en A et B au cercle O, les tangentes M′A′, M′B′ en A′ et B′ au cercle O′. Montrer que la droite MM′ passe par un point fixe.

167. — Énoncer la série des théorèmes qui conduisent au volume de la sphère.

---

168. — Trièdres symétriques. Montrer qu'ils ne sont pas superposables.

169. — Lieu des points de l'espace équidistants de deux droites concourantes.

170. — Construire un triangle rectangle connaissant un côté de l'angle droit et la hauteur.

---

171. — Mesure de l'angle inscrit dans une circonférence.

172. — [**4263**]. On donne un cercle (O) et un point A de ce cercle. Un angle BAC de grandeur donnée tourne autour de A et intercepte sur (O) la corde BC. 1° Lieu géométrique du point de rencontre des médianes du triangle ABC. 2° Lieu géométrique de l'orthocentre de ce triangle.

173. — Volume du parallélépipède oblique.

174. — On donne les trois côtés a, b, c d'un triangle. Calculer la surface S et les rayons r, r', r'', r''' des cercles inscrit et exinscrits. Montrer que l'on a

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''} \qquad \text{et} \qquad s=\sqrt{rr'r''r'''}.$$

175. — Les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre sont concourantes. Quelle particularité doit présenter le tétraèdre pour que ces trois droites forment un trièdre trirectangle?

---

176. — Volume du tronc de cône.

177. — On donne un triangle BAC rectangle en A. Du pied H de la hauteur issue de A on abaisse les perpendiculaires HE, HF sur les côtés de l'angle droit AB, AC. Montrer que la médiane issue de A est perpendiculaire à EF et que le quadrilatère BEFC est inscriptible. Calculer le rayon de la circonférence BEFC.

---

178. — Construire un triangle équivalent à un polygone ABCDE. Étant donné un triangle, construire un quadrilatère convexe équivalent.

179. — Volume du cône de révolution.

180. — On fait tourner successivement un triangle rectangle autour de l'hypoténuse et des côtés de l'angle droit. Montrer que les volumes engendrés A, B, C sont tels que

$$\frac{1}{A^2}=\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}.$$

---

181. — Théorèmes qui conduisent au volume de la sphère.

182. — Qu'appelle-t-on polygone régulier? Montrer qu'à un polygone régulier on peut inscrire et circonscrire une circonférence.

183. — On considère un tronc de pyramide dont les bases sont des parallélogrammes. Démontrer que ses quatre diagonales sont concourantes.

---

184. — Propriétés du triangle isocèle.

185. — Construire un triangle isocèle connaissant l'angle au sommet et la somme de la base et de la hauteur.

186. — Le côté d'un tétraèdre régulier étant égal à a, calculer le rayon de la sphère inscrite.

(*A suivre.*)

ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS

Cours techniques secondaires : 1re année.

Arithmétique.

I. — **4264.** Quand on divise un nombre par 175, on a 73 comme reste; si on le divise par 177, on a 11 comme reste, le quotient restant le même. Quel est le dividende et quel est le quotient? (La solution algébrique ne sera pas admise.)

II. — **4265.** Le périmètre d'un terrain rectangulaire mesure 126^{m} et la longueur a 7^{m} de plus que la largeur. Au milieu du terrain, on creuse un bassin circulaire de $2^{m},50$ de rayon et de 6^{dm} de profondeur. Puis on répand la terre extraite sur la partie restante du terrain. Calculer à 1^{mm} près l'épaisseur moyenne de la couche de terre répandue, en admettant que la terre remuée augmente de $\frac{1}{5}$ du volume qu'elle avait. Évaluer en décalitres le volume du bassin.

(*Durée : 2 heures.*)

Géométrie.

I. — Démontrer que dans un triangle, la médiane relative à un côté est plus petite que la demi-somme des deux autres côtés et plus grande que l'excès de cette demi-somme sur la moitié du troisième côté.

(*) Les questions posées à un même candidat sont comprises entre deux traits.

(**) Ce second numérotage ne porte que sur les questions dont nous avons l'intention de donner ici une solution. Ces questions seront résolues comme exercices; les abonnés ne devront pas en envoyer de solutions.

II. — **1266**. Construire un parallélogramme de telle manière que deux sommets opposés soient en deux points donnés A et B et que les deux autres soient sur une circonférence donnée C.

(*Durée : 1 heure.*)

Algèbre.

Effectuer le produit

$$\frac{1-x^2}{1+2y+y^2} \times \frac{1-y^2}{x^2-2xy+y^2}\left(\frac{x}{1-x}-\frac{y}{1-y}\right).$$

(*Durée : 1/2 heure.*)

Cours techniques secondaires : 2ᵉ année.

Arithmétique.

I. — Établir les caractères de divisibilité par 18.

II. — Pour qu'un nombre soit divisible par le produit de deux nombres premiers, il faut et il suffit qu'il soit divisible par chacun d'eux.

En conclure le caractère de divisibilité par 33.

III. — Démontrer que les fractions :

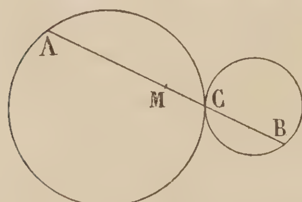
$$\frac{n-1}{n}, \quad \frac{n}{2n+1}, \quad \frac{2n+1}{2n(n+1)}$$

sont irréductibles.

(*Durée : 1 heure 1/2.*)

Géométrie.

I. — **1267**. On donne deux cercles tangents en C, une sécante ACB. Trouver le lieu de M milieu de AB quand ACB pivote autour de C.



II. — On donne la grandeur unité (u).

Construire

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad \sqrt{5}, \text{ etc.}$$

Construire

$$\sqrt{2} \times \sqrt{5}.$$

III. — Trouver le rayon d'une sphère équivalente au volume d'un tétraèdre régulier de côté a.

(*Durée : 1 heure 1/2.*)

Algèbre.

I. — Résoudre

$$\begin{aligned} 2x+3y-5z+2t&=145,\\ x+2y-z&=2,\\ 7x-11y+5z&=0,\\ 11x+12y-4z&=23. \end{aligned}$$

II. — **1268**. Résoudre

$$\begin{aligned} x+y+z&=0,\\ \frac{a^2x}{a-d}+\frac{a^2y}{a-d}+\frac{b^2z}{b-d}&=0,\\ \frac{ax}{a-d}+\frac{ay}{a-d}+\frac{bz}{b-d}&=0. \end{aligned}$$

III. — Résoudre géométriquement, séparément, puis simultanément,

$$(x-2)(y-3)>0,$$
$$(x+y-1)(x-y+1)(x-5)>0.$$

(*Durée : 2 heures.*)

Trigonométrie.

I. — Calculer les lignes trigonométriques de

$$\frac{\pi}{8}, \quad \frac{\pi}{16}.$$

II. — Trouver la valeur de

$$2(\cos^6 x+\sin^6 x)-3(\cos^4 x+\sin^4 x).$$

III. — Vérifier que, quel que soit $x>0$, on a

$$\text{arc sin}\sqrt{\frac{x}{x+a}}=\text{arc tg}\sqrt{\frac{x}{a}}.$$

(*Durée : 1 heure.*)

Physique et chimie.

I. — Loi de Mariotte; sa démonstration expérimentale. — Formules qui l'expriment.

II. — Le chlore; sa préparation, ses propriétés physiques et chimiques; ses usages.

III. — Deux barres de laiton et de fer sont juxtaposées et fixées invariablement à une de leurs extrémités. On les place dans la glace et on marque un trait perpendiculaire à la longueur à la fois sur les deux barres et à une distance de 1 mètre de l'extrémité fixée. On chauffe l'ensemble à 100°; le laiton se dilate davantage et les traits s'écartent de $0^{mm},74$.

Le coefficient de dilatation du fer étant 0,0000118; quel est le coefficient k de dilatation du laiton?

(*Durée : 2 heures.*)

Section administrative : 1ʳᵉ année.

Arithmétique.

I. — Si un nombre est la somme de deux carrés, son double est aussi une somme de deux carrés et réciproquement.

II. — Démontrer que les fractions

$$\frac{42}{53}, \quad \frac{4242}{5353}, \quad \frac{424242}{535353}$$

sont équivalentes.

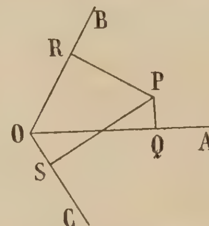
III. — Quel est le maximum du reste dans une opération de racine cubique? Pourquoi?

(*Durée : 1 heure 1/2.*)

Géométrie.

I. — **1269**. Soient dans le plan de la feuille OA, OB, OC, trois droites telles que l'on ait

$$\widehat{COA}=\widehat{AOB}=60°.$$



On abaisse d'un point quelconque P, situé dans l'angle AOB les perpendiculaires PQ, PR, PS respectivement sur OA, OB, OC. Montrer que l'on a, quel que soit P,

$$PQ+PR=PS.$$

II. — **1270**. Lieu géométrique des points tels que la somme de leurs distances à deux plans non parallèles P et Q est constante.

(*Durée : 1 heure 1/2.*)

Algèbre.

I. — Si α, β, γ sont trois nombres distincts, satisfaisant aux relations

$$\begin{aligned} \alpha^3+p\alpha+q&=0,\\ \beta^3+p\beta+q&=0,\\ \gamma^3+p\gamma+q&=0, \end{aligned}$$

prouver que

$$\alpha+\beta+\gamma=0.$$

II. — α et β étant racines de l'équation $x^2+px+q=0$, on demande de calculer

1° $\quad \dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha},$

2° $\quad \alpha^3+\beta^3.$

III. — Calculer la limite de la somme

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

quand n croît indéfiniment.

(*Durée : 2 heures.*)

Trigonométrie.

Résoudre un triangle rectangle connaissant

$$b=4\,387^m,56, \qquad c=1\,790^m,08.$$

(*Durée : 1 heure.*)

Physique et Chimie.

I. — Siphons.

II. — Préparations de l'anhydride sulfureux et de l'acide sulfhydrique.

(*Durée : 2 heures.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie Paul BRODARD.

23e Année. 15 Mai 1921. N° 16.

L'Éducation Mathématique

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

PRIX DU NUMÉRO : France et Colonies, 0 fr. 60. Étranger, 0 fr. 70.
ABONNEMENT ANNUEL : France et Colonies, 10 fr. Étranger, 12 fr.

Tous les abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, l'on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction : Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Abonnements : Librairie **Vuibert**, Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

ARITHMÉTIQUE

4191. — *Quel est le plus petit multiple de 17 qui ait la propriété que sa racine carrée à l'unité près par défaut soit inférieure de 29 unités au reste?*

On peut se proposer de trouver l'expression générale des multiples de 17 qui possèdent la propriété indiquée. Soit $17a$ un tel multiple, r sa racine à l'unité près par défaut; on aura, par définition de cette racine,

$$r^2 \leqslant 17a < (r+1)^2;$$

le reste est la différence $17a - r^2$, il faut donc que r et a satisfassent à l'égalité

$$r = 17a - r^2 - 29$$

ou

$$r^2 + r + 29 = 17a,$$

qui peut s'écrire

$$r^2 + r = 17(a-2) + 5 = \text{mult. } 17 + 5; \qquad (1)$$

cela prouve que le reste de la division de $r^2 + r$ par 17 doit être 5. D'autre part, l'inégalité

$$17a < (r+1)^2$$

ou

$$r^2 + r + 29 < r^2 + 2r + 1$$

montre que

$$r > 28. \qquad (2)$$

D'ailleurs, on voit sans peine que tout nombre r qui satisfait à l'équation (1), où a désigne un entier, ainsi qu'à l'inégalité (2), fournit une solution du problème.

Si deux nombres r et r' sont tels que $r^2 + r$ et $r'^2 + r'$ divisés par 17 donnent le même reste

$$(r^2 - r'^2) + (r - r'),$$

qui s'écrit

$$(r - r')(r + r' + 1),$$

est un multiple de 17; réciproquement, si ce produit est multiple de 17, $r'^2 + r'$ et $r^2 + r$, divisés par 17, donnent le même reste. Pour que 17, nombre premier, divise le produit, il faut qu'il divise un des facteurs, c'est-à-dire ou bien que

$$r' = \text{m. } 17 + r \quad \text{ou bien que} \quad r' = \text{m. } 17 - r - 1.$$

Les restes de la division de $r^2 + r$ par 17, pour les premières valeurs de r, sont

pour $r =$	1	2	3	4	5	6	7	...
respectivement	2	6	12	3	13	8	5	....

Les valeurs de r supérieures à 28, telles que $r^2 + r$ soit mult. $17 + 5$ sont donc données par les deux formules

$$r = 34 + 7 + p.\,17 = 41 + p.\,17,$$
$$r = 34 + 9 + q.\,17 = 43 + q.\,17,$$

p et q désignant des entiers positifs ou nuls. La plus petite est fournie par la première formule, pour $p = 0$, c'est $r = 41$; le nombre demandé est alors 1 751. La valeur suivante est celle que fournit l'autre formule, pour $q = 0$, $r = 43$; le nombre demandé est 1 921.

L'expression générale des multiples de 17 qui satisfont à la condition posée est

$$(42 + p.\,17 \pm 1)^2 + 29.$$

(M., à Guéret.)

[Bonnes solutions : Mlles G. Boulay; M. Koch; MM. Ch. Caussin; R. Chasselut; G. Février; E. Garandel; A. Goëlo; E. Guicheney; J. Lassave; P. Louon; Ménéchal; G. Meynaud; J. Moirez; G. Mouzon; L. Philizot; M. Pommerolle; H. Sebban; L. Soulier.
Assez bonnes solutions : MM. A. Bal; J. Devisme; Geffroy-Le Jan; R. Marchant.]

4215. — *Trouver un nombre entier qui soit égal à mille fois sa racine cubique à l'unité près par défaut.*

Soit N le nombre, a sa racine cubique à l'unité près par défaut; elle est définie par la double inégalité

$$a^3 \leqslant N < (a+1)^3. \qquad (1)$$

Or, si $N = 1\,000a$, cette double inégalité devient

$$a^3 \leqslant 1\,000a < (a+1)^3;$$

on peut l'écrire

$$a^2 \leqslant 1\,000 < (a+1)^2\left(1 + \frac{1}{a}\right). \qquad (2)$$

Le nombre $\left(1 + \frac{1}{a}\right)$ est supérieur à l'unité, les inégalités (2) sont donc vérifiées si

$$a^2 \leqslant 1\,000 \leqslant (a+1)^2,$$

c'est-à-dire si a est la racine carrée de 1 000 à l'unité près par défaut. Cette racine est 31, la valeur de N est 31 000.

Mais il n'est pas *a priori* impossible que des nombres inférieurs à 31 vérifient les inégalités (2).

L'inégalité

$$1\,000 < (a+1)^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)$$

donne

$$a^2 + 3a + 3 + \frac{1}{a} > 1\,000;$$

elle exige que

$$a^2 + 3a + 4 > 997$$

et par conséquent que a soit supérieur ou égal à la racine positive du trinome $a^2 + 3a - 996$. Cette racine est irrationnelle et

légèrement supérieure à 30 : il faut donc que a soit au moins égal à 31. La solution $a = 31$ est donc la seule.

(MARGUERITE KOCH.)

N. B. — Beaucoup de correspondants ont commis la faute de remplacer l'inégalité $1\,000 < (a+1)^2 \left(1 + \frac{1}{a}\right)$ par $1\,000 \leqslant (a+1)^2$.

La seconde entraîne la première, mais la réciproque n'est pas vraie. Quelques correspondants donnent pour réponse 31 622, ce qui est manifestement faux, puisque 31 622 n'est pas divisible par 1 000.

[Bonnes solutions : MM. R. Chasselut; A. Cieutat; Geffroy-Le Jan; F. Gilly; P. Louon; M., à Guéret; G. Meynaud; Moirez; G. Olivier; E. Paté; R. Pantz; J. Perin; Philizot; F. R., à Ajaccio.

Assez bonnes solutions : MM. Bitaine; A. Bordes; R. Bruneteau; M. Chatelier; J. Clamens; J. Devisme; P. Faucheux; E. Guicheney; R. Marchant; Ménéchal; E. G. Mitard; G. Remacle; G. Tilly.]

4224. — *Trouver un nombre de six chiffres, carré parfait, tel que les neuf chiffres avec lesquels le nombre et sa racine carrée s'écrivent, dans le système de base* 10, *soient tous différents, aucun n'étant zéro.*

N. B. — Il ne paraît pas exister de méthode générale pour résoudre directement une question de ce genre, c'est-à-dire pour trouver immédiatement les nombres cherchés : il s'agit donc de trouver des moyens d'éliminer le plus rapidement possible les nombres qui n'ont pas la propriété requise; pour employer la comparaison qui a fait nommer « crible d'Eratosthène » le procédé que l'on emploie pour exclure de la suite des entiers ceux qui ne sont pas premiers, il faut passer les nombres au crible, de manière à en mettre hors cause la plus grande quantité possible à chaque opération. C'est ce que l'on a réussi à faire d'une façon assez satisfaisante dans la solution suivante.

Soit $N = \overline{abc}$ le nombre de trois chiffres demandé; son carré N^2 s'écrit par hypothèse avec des chiffres différents les uns des autres et différents de a, b et c. Si $N^2 = defghi$, on a

$N + N^2 = N(N+1) = \text{mult. de } 9 + a + b + c + d + e + f + g + h + i,$

$a, b, c, d, e, f, g, h, i$ sont les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, rangés dans un ordre quelconque; leur somme est 45 : il en résulte que $N(N+1)$ est multiple de 9; or de deux nombres consécutifs un seul peut être divisible par 3, le produit $N(N+1)$ ne peut être divisible par 9 que si N ou $N+1$ l'est. Deux cas sont donc à examiner, $N = m.9$ et $N = m.9 - 1$, par conséquent $a + b + c = m.9$ ou $m.9 - 1$.

1° $N = m.9$; $a + b + c$ est au plus égal à $9 + 8 + 7 = 24$, donc la somme $a + b + c$ est 9 ou 18.

Cherchons d'abord de combien de façons on peut faire une somme égale à 9 avec trois chiffres différents, dont aucun n'est nul.

Sans nous occuper pour le moment de l'ordre des chiffres, appelons a le plus petit, b, le suivant par ordre de grandeur, c est alors le plus grand.

Si $a = 1$, on peut avoir $b = 2$ et $c = 6$, ou $b = 3$ et $c = 5$.

Si $a = 2$, b est 3 avec $c = 4$; il n'y a pas d'autre moyen de former 9 comme somme de trois chiffres différents, non nuls.

Soit maintenant $a + b + c = 18$. Si $a = 1$, les autres chiffres ne peuvent être que 8 et 9; si $a = 2$, les autres sont 7 et 9; si $a = 3$, on peut avoir

$$b = 6,\ c = 9, \qquad \text{ou} \qquad b = 7,\ c = 8,$$

si $a = 4$, on peut avoir

$$b = 5,\ c = 9, \qquad \text{ou} \qquad b = 6,\ c = 8.$$

Enfin avec $a = 5$, on ne peut prendre que $b = 6$ et $c = 7$; et c'est tout, car si trois nombres différents ont pour somme 18, l'un d'eux au moins est inférieur à 6.

Nous avons ainsi les 10 nombres :

126 135 234 189 279 369 378 459 468 567; (I)

il faudra permuter leurs chiffres de toutes les façons possibles, ce qui donnerait six nombres pour chacun de ceux qui sont inscrits; mais nous pouvons commencer à « cribler » : un nombre terminé par 1, 5 ou 6 a un carré terminé par le même chiffre; il faut donc éliminer tout nombre dont le chiffre des unités est 1, 5 ou 6.

Il faut éliminer aussi tout nombre qui contient un 4 et qui est terminé par 2 ou par 8, car son carré est aussi terminé par 4; et de même on doit exclure tout nombre terminé par 3 ou 7 s'il contient un 9, tout nombre terminé par 4 s'il contient un 6; par 9 s'il contient un 1.

Des 60 nombres que fournirait la permutation des chiffres de ceux du tableau (I), il ne reste que

153 *	324	459	549	639	729	783	837 *	918 *	954 *
162 *	369	513	567	657	738	792	873 *		972 *
198 *	378		594						
234 *	387		612						
243 *	423								
279 *									

(II)

Mais la racine carrée à l'unité près par défaut de 100 000, qui est le plus petit nombre de six chiffres, est 316; donc aucun nombre inférieur à 317 ne peut convenir. Les racines carrées par défaut de

1×10^5 2×10^5 3×10^5 4×10^5 5×10^5 6×10^5 7×10^5 8×10^5 9×10^5

sont 316 447 547 632 707 774 836 894 948.

Le premier chiffre du carré d'un nombre compris entre 316 et 448 est 1, celui d'un nombre compris entre 447 et 548 est 2, et ainsi de suite; on doit donc écarter tout nombre compris entre 316 et 447, qui a un chiffre 1, tout nombre compris entre 447 et 547 qui a un chiffre 2, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive aux nombres compris entre 948 et 1 000, qui ont un chiffre 9.

On écarte ainsi tous les nombres du tableau (II) qui sont marqués d'un astérisque. Il reste encore dix-huit nombres.

324	459	549 *	639	729	783 *
369 *	513	567	657	738 *	792 *
378 *		594			
387		612 *			
423 *					

(III)

Nous avons porté notre attention sur le dernier chiffre, puis sur le premier; étudions maintenant le chiffre des dizaines. Les deux chiffres de droite du carré de $100a + 10b + c$ sont les mêmes que ceux du carré de $10b + c$; il faut donc écarter tout nombre qui se termine par $10b + c$ si le carré de $10b + c$ se termine à droite par deux chiffres non différents, ou dont l'un est soit b, soit c, soit zéro, soit a.

Or le carré de 69 se termine par 61,

celui de 78 par 84,
— 23 — 29,
— 49 — 01,
— 12 — 44,
— 38 — 44,
— 83 — 89,
— 92 — 04;

cela élimine du tableau (III) les nombres marqués d'un astérisque; il ne subsiste plus que neuf nombres,

324, 459, 567, 639, 729,
387, 513, 594, 657,

qu'il faut maintenant essayer en formant leurs carrés : on trouve ainsi qu'un seul a la propriété requise, c'est 567 :

$$567^2 = 321\,489.$$

On traitera de la même façon les nombres que l'on forme en partant des hypothèses $a+b+c=8$ et $a+b+c=17$.

On ne trouve ainsi qu'un autre nombre, qui est 854.

$$854^2 = 729\,316.$$

(Solution analogue : René CHASSELUT, à Corbigny.)

[Bonne solution : M., à Guéret.
Assez bonnes solutions : MM. J. Devisme; A.-F., à St-Pons; R. Marchant; L.-G. Papon.]

4227. — *Deux cyclistes parcourent une même piste circulaire. Ils partent en même temps d'un même point. L'un d'eux dépasse immédiatement l'autre et le rattrape 25 minutes $\frac{2}{7}$ après le départ.*

Sachant que le moins rapide des deux cyclistes met 1 minute 11 secondes pour faire un tour de piste, on demande combien de temps met l'autre pour faire aussi un tour.

(*B. S., Grenoble, aspirantes, 1re session* 1920.)

Lorsque le second cycliste est rattrapé par le premier, ils ont roulé tous deux pendant $25^{\text{min}}\frac{2}{7}$ ou $\frac{177}{7}$ de minute.

Le cycliste le moins rapide fait un tour en $1^{\text{min}}\,11^{\text{sec}}$, soit en $\frac{71}{60}$ de minute; il aura donc fait $\frac{177\times 60}{7\times 71}=\frac{10\,620}{497}$ de tour de piste; or l'autre aura fait, dans le même temps, un tour de plus, soit $\frac{10\,620+497}{497}=\frac{11\,117}{497}$.

Et, par conséquent, pour faire un tour de piste, il met

$$\frac{177\times 497}{7\times 11\,117}=\frac{12\,567}{11\,117}=1^{\text{min}}+\frac{1\,450}{11\,117};$$

1 450 et 11 117 sont premiers entre eux, la fraction de minute est donc réduite à sa plus simple expression; elle donne 7^{sec} et $\frac{8}{10}$ de seconde.

La réponse est donc $1^{\text{min}}7^{\text{sec}}8$; ou $1^{\text{min}}7^{\text{sec}}\frac{4}{5}$.

(L. PAPON, collège de Clamecy.)

Remarque. — Plusieurs abonnés donnent les réponses suivantes, qui *théoriquement* sont justes,

$$1^{\text{min}}7^{\text{sec}}\frac{9\,181}{11\,117} \quad \text{et} \quad 1^{\text{min}}\frac{1\,450}{11\,117};$$

mais *pratiquement* cela ne répond à rien qui puisse être observé ou mesuré : le moment où un cycliste dépasse l'autre est celui où, par rapport à un observateur placé au centre de la piste, l'un des cyclistes sera caché par l'autre. Ce moment sera noté au moyen d'un chronomètre (tel qu'en ont les hommes de sport), marquant le cinquième de seconde. Toute précision plus grande est illusoire et inutilisable.

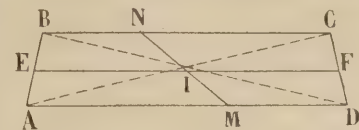
[Bonnes solutions : Mme Blondel; Mlles Boulay; M. Bourreau; M. Perrier; MM. A. Aubry; J. Barbot; L. Bisqué; A. Bordes; A. Bougrier; J. Bugnard; Carthieux; J. Cartouzou; R. Cazin; J. E. Chantrelle; R. Chasselut; J. Cherpin; A. Cieutat; R. Clément; R. Cluzand; G. Démaret; J. Devisme; H. Forait; J. Gaillard; F.-A. Gilly; L. Guillet; R. Guiot; Hambert; R. Henry; R. Henrion; G. Knoll; P. Louon; R. Marchant; J. Mazeau; F. Morvan; F. Négrétzu; Ch. Norgelet; G. Olivier; C. Pagès; L. G. Papon; J. Patat; E. Pinlong; M. Pinot, Robba; J. Rosec; Roset; M. Roy; M. Sator; J. Schilling; Stoeffler; A. Tilloy; Trébouta-Le Minous; Valló; F. Villarzel; G. Vimbert.]

ALGÈBRE

4168. — *Le croquis représentant un champ ayant la forme d'un trapèze porte les indications suivantes :*

$$\textit{grande base } AD = a = 170^{\text{m}},$$
$$\textit{petite base } BC = b = 150^{\text{m}},$$
$$\textit{angle } ABD = \textit{angle } ACD = 1 \textit{ droit}$$

et mentionne la position d'une source en M sur AD à une distance AM = m du sommet A.



1. Démontrer que le trapèze ABCD est isocèle et indiquer les constructions graphiques à effectuer pour dessiner l'épure du champ à l'échelle de $\frac{1}{1\,000}$.

2. On se propose de diviser le champ ABCD en deux parties équivalentes par une droite MN issue de la source M et rencontrant la petite base BC en un certain point N.

Déterminer la droite MN en prenant pour inconnue BN = x qu'on calculera en fonction de AD = a, BC = b, AM = m.

Entre quels points de AD doit se trouver la source M pour que le problème soit possible?

Donner la valeur numérique de x pour $m = 100^{\text{m}}$.

3. Soient E et F les milieux des côtés non parallèles. Montrer que le point de rencontre I de MN avec EF est le milieu de EF et en déduire une construction pratique de MN sur le terrain.

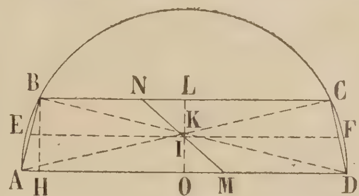
4. On veut faire placer le long de l'alignement MN une clôture revenant à 2f le mètre.

Pour évaluer la dépense, on construit la droite MN sur l'épure et l'on trouve en mesurant sur le dessin la droite ainsi obtenue qu'elle a une longueur de $52^{\text{mm}},5$.

Déterminer l'erreur de dépense ainsi commise par ce procédé, en calculant MN dans la figure ABCD en fonction des longueurs $a = 170^{\text{m}}$, $b = 150^{\text{m}}$, $m = 100^{\text{m}}$.

(*B. S. Creuse, aspirants, mars* 1920.)

1° Le trapèze est inscrit dans le demi-cercle décrit sur AD comme diamètre : il a donc pour axe de symétrie la perpendiculaire à ce diamètre élevée au centre et par conséquent il est isocèle.



Pour tracer l'épure du champ, à l'échelle du millième, on portera sur une droite indéfinie un segment AD de 170^{mm} et l'on tracera le cercle qui a AD pour diamètre. De part et d'autre du centre O, on portera les segments OI et OJ, égaux à la moitié de 150^{mm}, soit à $7^{\text{cm}},5$; les perpendiculaires élevées à AD en I et J couperont le demi-cercle en B et C.

2° Soit $BN = x$; la hauteur du trapèze étant h, sa surface est $\frac{1}{2}(a+b)h$; celle du trapèze BNMA qui a même hauteur et dont les bases sont m et x est $\frac{1}{2}(m+x)h$. Il faut donc que x vérifie l'équation

$$\frac{1}{2}(m+x)h = \frac{1}{4}(a+b)h,$$

d'où l'on tire, après avoir divisé les deux membres par $\frac{1}{2}h$,

$$x = \frac{1}{2}(a+b-2m).$$

Pour que le problème soit possible, il faut que x soit positif et inférieur à b, ce qui donne

$$0 \leq \frac{1}{2}(a+b-2m) \leq b,$$

d'où

$$\frac{1}{2}(a-b) \leq m \leq \frac{1}{2}(a+b).$$

Avec les données de l'énoncé,

$a=170, \quad b=150, \quad m=100,$ on trouve $x=60.$

3° Soit I le point où MN rencontre EF; la ligne EI parallèle à AM joint les milieux des côtés non parallèles du trapèze BNMA; elle est égale à la demi-somme des bases. La surface du trapèze BNMA est le produit de la hauteur h par la longueur EI : pour qu'elle soit la moitié de celle de ABCD, il faut et il suffit que I soit le milieu de EF.

Pratiquement, on pourra arpenter la base BC (on choisit la plus courte) et en déterminer le milieu L : avec l'équerre d'arpenteur, on déterminera l'alignement LO perpendiculaire à BC. Un jalon sera mis au point de concours de l'alignement AD avec la ligne de visée LO. On arpentera LO et on en prendra le milieu I. Puis, ayant mis un jalon en I, on cherchera, sur la droite BC, le point qui est sur l'alignement des jalons M et I : ce sera le point N.

4° Si la longueur MN est de 52mm,5 sur l'épure, elle est de 52m,5 sur le terrain, le prix de la clôture est de 105f.

Pour calculer la longueur exacte, remarquons que

$$\overline{MN}^2 = \overline{BH}^2 + (HM - BN)^2 = h^2 + (30)^2$$

et que

$$\overline{BO}^2 = 85^2 = \overline{BH}^2 + \overline{HO}^2 = h^2 + (75)^2;$$

en remplaçant h^2 par sa valeur dans la première équation, on trouve

$$\overline{MN}^2 = (35)^2 + (85)^2 - (75)^2 = 2\,500 = (50)^2.$$

Donc MN = 50m; il y a une erreur de 5f sur l'estimation de la dépense faite d'après la mesure prise sur l'épure.

(Georges KNOLL, à Clermont-Ferrand.)

Remarques. — I. Une erreur aussi forte sur une longueur construite graphiquement n'est pas normale, l'ordre de l'erreur relative est du centième, dans les cas où la grandeur à construire est déterminée par des lignes se coupant sous un angle assez grand.

II. — Sur beaucoup de dessins, même sur ceux qui sont exécutés à l'échelle du millième, qui donnait une figure assez grande, il semblerait que la droite MN concoure avec les diagonales en K. Il n'en est rien cependant; si la ligne MK coupe BC en P, on a

$$\frac{PB}{MD} = \frac{PC}{MA}, \quad \text{ou} \quad \frac{PB}{70} = \frac{PC}{100} = \frac{150}{170},$$

donc $BP = 70 \times \frac{15}{17} = 61{,}76$, ce qui est différent de $BN = 60$.

[Bonnes solutions : MM. Authier; M. Barny; G. Bénazet; M. Boulvert; J. Briquet; R. Bruneteau; Ch. Caussin; A. Cieutat; J. Clamens; G. Clément; M. Courboulay; C. Crépeau; J. Devisme; M. Didier; P. Durand; P. Faucheux; Ch. Feyrabend; Fiévet; H. Forait; Geffroy-Le Jan; F.-A. Gilly; E. Guicheney; G. Houalet; G. Jugain; E. Laborde; M. Laporte; R. Legrand; L. Linémann; P. Louon; R. Marchant; E. Masdupuy; Y. Maurice; J. Mazeau; Ménéchal; C. Meynaud; H. Micard; Michem; G. Mouzon; G. Olivier; E. Paté; Philizot; A. Popu; A. Robba; M. Robineau; H. Sebban; L. Simon; L. Soulier; A. Terrier; R. Weinzaepfel.]

4186. — *Avec trois canons placés aux points* B, D *et* C *sur la ligne droite* BE, *un chef de batterie doit battre un poste de commandement ennemi situé en* A.

La longueur du segment de droite BC *est de* 112m *et le point* D *est au milieu de* BC. *Les droites* AB *et* AC *font avec la droite* BE *les angles* ABE = 45° *et* ACE = 60°.

On demande de calculer à 1m *près, la distance à laquelle le chef de batterie doit faire tirer chacun des trois canons pour que les projectiles convergent sur le poste de commandement.*

(*B. S. Lille, aspirants, mars* 1920.)

Posons $DE = x$ et $EA = y$. Le triangle BEA est isocèle, donc

$$EA = BE \quad \text{ou} \quad y = x + 56. \qquad (1)$$

Le triangle CEA a un angle de 60° en C, donc

$$EA = EC\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad y = (x-56)\sqrt{3}; \qquad (2)$$

en égalant les valeurs de y tirées de ces deux équations, on a

$$x + 56 = (x-56)\sqrt{3},$$

d'où

$$x = 56\,\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 56(2+\sqrt{3}) = 208{,}992;$$

comme une différence de quelques centimètres est sans importance dans l'application, on peut prendre $x = 209$, ce qui donne $y = 265$. On a ensuite

$$BA = \sqrt{2}(x+56) = 56(3\sqrt{2}+\sqrt{6}) = 375,$$

$$CA = 2CE = 2(x-56) = 2 \times 56(1+\sqrt{3}) = 306.$$

La valeur exacte de DA est donnée par un calcul un peu compliqué :

$$\overline{DA}^2 = x^2 + y^2 = (56)^2(4 + 4\sqrt{3} + 3 + 9 + 6\sqrt{3} + 3)$$
$$= (56)^2(19 + 10\sqrt{3});$$

mais si l'on se contente des valeurs simples, très suffisamment approchées, que l'on a trouvées pour x et pour y, on a

$$\overline{DA}^2 = 209^2 + 265^2 = 113\,906,$$
$$DA = 337.$$

Les distances que le chef de batterie donnera aux chefs de pièces seront donc

$BA = 375^m, \qquad DA = 337^m, \qquad CA = 306^m.$

(Solution analogue : M. HAMBERT, école Hanley, à Thiais.)

Remarque. — Des canons de tranchée, comme ceux dont il s'agit ici, se pointent tout au plus au mètre près : d'ailleurs, il suffit que le projectile tombe dans un rayon d'un mètre ou deux autour du point visé pour que l'effet voulu soit produit. Les décimètres et centimètres, que quelques abonnés ont cru devoir donner, n'ont donc aucune signification pratique.

[Bonnes solutions : MM. H. Aubert; A. Authier; A. Bal; M. Barny; Bonnet; A. Bordes; Bruneteau; Carthieux; J.-E. Chantrelle; L. Chapelon; J. Clamens; Claustre; C. Crépeau; G. Démaret; J. Devisme; Ch. Dubost; P. Durand; Ch. Feyrabend; L. Fiévet; G. Fouché; Gabay; Geffroy-Le Jan; A. Goëlo; Guicheney; R. Guiot; J. Lacroix; F. Lapeyrère; M. Laporte; M. Lascoux; R. Legrand; L. Linémann; P. Louon; R. Marchant; A. Martin; Ménéchal; G. Meynaud; J. Miserez; A. Monjallon; G. Mouzon; F. Negretzu; Ch. Noël; G. Nore; Ch. Norgelet; E. Paté; J. Périgault; E. Pinlong; Pinot; M. Pommerolle; A. Popu; R. Renaud; A. Robba; M. Robineau; Roset; M. Saint-Juvin; P. Salvagnac; J. Schilling; H. Sebban; Siberchicot; L. Simon; A. Vaudroy; G. Vimbert.

Assez bonnes solutions : Mlle M. Marignac; MM. C. Beaujean; G. Bitaine; J. Briquet; J. Cartouzou; M. Courboulay; P. Dujoux; H. Forait; F.-A. Gilly; J. Magnani; Marchal; Maurice; L.-G. Papon; J. Patat; Pierdet; A. Pierreuse; Planet; H. Sciaud; L. Soulier.]

4223. — *Les élèves d'une école de filles, pour remédier à la cherté de la vie, ont élevé, en* 1919, *des poules, des canards et des lapins. Ces animaux, achetés très jeunes, au printemps, ont été vendus à la fin de l'année. Le prix d'achat moyen a été de* 10f *pour une poule, de* 4f *pour un canard, de* 2f *pour un lapin, et le prix de vente moyen a été de* 18f *pour une poule, de* 12f *pour un canard et de* 13f *pour un lapin. — Les poules ont pondu* 221 *œufs, que les élèves ont vendus à raison de* 10f *le* 1/2 *quarteron* (13 *œufs.*) — *La*

basse-cour et les clapiers ont été installés par la municipalité sans frais pour l'école, et les animaux ont été nourris avec les résidus de la cuisine apportés par les élèves, mais l'école a dû acheter des provisions pour compléter la nourriture des poules et des canards, qui lui a coûté 5f par poule et 1f par canard. — Le bénéfice de l'élevage, versé par les élèves à l'association des pupilles de l'école publique, a été de 656f.

La directrice de l'école a compté que si ses élèves avaient élevé deux fois moins de canards et deux fois plus de lapins elles auraient pu verser 944f et que si elles avaient élevé deux fois plus de canards et deux fois moins de lapins le bénéfice n'aurait été que de 575f. On demande combien l'école a élevé de poules, de canards et de lapins.

(*B. S., Lille; aspirantes, 1re session* 1920.)

Désignons les nombres de poules, de canards et de lapins par x, y et z. Le bénéfice de la vente des œufs est connu : il est de 2 210 : 13 = 170f; celui qui provient de la vente des animaux se calcule, dans les trois cas, en retranchant 170 du bénéfice total fait par les élèves.

Une poule a donné 18 — 10 — 5 = 3f, un canard 12 — 4 — 1 = 7f, un lapin 13 — 2 = 11f. Les trois bénéfices possibles, indiqués par l'énoncé, seraient donnés par les équations

$$3x + 7y + 11z = 656 - 170 = 486,$$

$$3x + \frac{7y}{2} + 22z = 944 - 170 = 774,$$

$$3x + 14y + \frac{11z}{2} = 575 - 170 = 405.$$

Ces équations forment un système du premier degré, qui se résout facilement en éliminant d'abord x par soustraction : on trouve ainsi deux équations qui ne contiennent plus que les inconnues y et z :

$$11z - \frac{7y}{2} = 774 - 486 = 288, \qquad \Big| \; 2 \quad 4$$

$$7y - \frac{11z}{2} = 405 - 486 = -81. \qquad \Big| \; 4 \quad 2$$

Multiplions les deux membres de la première équation par 2, ceux de la seconde par 4 et ajoutons membre à membre, z est éliminé : il reste

$$21y = 576 - 324 = 252, \qquad \text{d'où} \qquad y = 12;$$

si l'on multiplie les deux membres de la première équation par 4, ceux de la seconde par 2 et si l'on ajoute membre à membre, y est éliminé, et il vient

$$33z = 1\,152 - 162 = 990, \qquad \text{d'où} \qquad z = 30.$$

On en déduit $x = 24$.

(Mlle S. DAVID, à Saint-Omer.)

[Bonnes solutions : Mlles G. Boulay; M. Bourreau; MM. L. Bisqué; G. Bonhoure; A. Bordes; M. Boulvert; A. Bourson; R. Bruneteau; J. Bugnard; Carthieux; J. Cartouzou; L. Chapelon; R. Chasselut; A. Cicutat; R. Clément; R. Cluzaud; J. Debray; J. Devisme; A. Dantan; P. Faucheux; Ch. Feyrabend; H. Forait; F.-A. Gilly; E. Guicheney; M. Hambert; R. Henrion; L. Guillet; R. Guilbert; M. Jayat; G. Knoll; P. Lebrun; R. Legrand; M. Lhoumeau; L. Louis; P. Louon; A. Malléus; R. Marchant; J. Martin; H. Michem; F. Morvan; F. Negretzu; Ch. Noël; G. Olivier; Ch. Norgelet; C. Pagès; R. D. Pantz; L. G. Papon; J. Patat; J. Périgault; E. Pinlong; G. Remacle; A. Robba; L. Rogement; Rosenstock; Roset; Rougeboul; Roy; Saint-Juvin; Sator; J. Schilling; L. Simon; Stœffler; Trebouta; Treuillet; R. Vallé; F. Villarzel; G. Vimbert.]

GÉOMÉTRIE

4182. — *Trouver sur le prolongement de la petite base* BC *d'un trapèze* ABCD *isocèle un point* P *tel que l'angle* BPA *soit double de l'angle* CPD.

L'angle BPA étant inférieur à deux droits (fig. 1), il faut que l'angle BPD soit aigu; il faut encore que le point A et le point B soient séparés par la droite DP. Le point P ne peut donc être cherché que sur le prolongement de CB au delà de B.

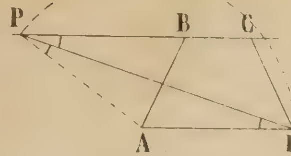


Fig. 1.

Les angles DPB et PDA sont égaux comme alternes-internes : pour que DPA et DPB soient égaux, il est donc nécessaire et suffisant que les angles à la base du triangle PAD soient égaux, donc que AP = AD; par conséquent, le point P est un point d'intersection du cercle qui a A comme centre et AD pour rayon avec le prolongement de CB.

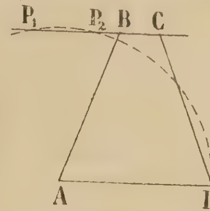


Fig. 2.

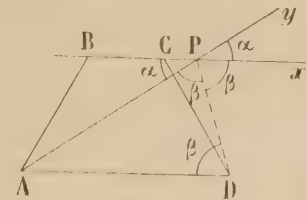


Fig. 3.

Le problème peut admettre deux solutions si AD est inférieur à AB, mais supérieur à la hauteur du trapèze (fig. 2); il admettra une solution si AD est supérieur à AB (fig. 1).

Considérons un point d'intersection P, situé sur BC ou sur son prolongement du côté de C; on a vu précédemment que la droite PD ne peut être bissectrice intérieure de l'angle APB; demandons-nous sous quelle forme subsiste la propriété du point P.

Les angles APD et ADP sont égaux, puisque le triangle PAD est isocèle (fig. 3); ADP et DPx sont égaux comme alternes-internes; enfin BPA et xPy sont égaux comme opposés par le sommet.

L'angle *plus grand que deux droits* BPy est donc le double de BPD, car

$$\text{BPD} = \alpha + \beta$$

et

$$\text{BPD} + \text{DP}y = \alpha + \beta + \beta + \alpha;$$

on peut dire encore que l'angle BPD est la moitié de l'un des angles que font les droites BP et AP, mais il faut prendre ce dernier angle plus grand que deux droits.

(C. CRÉPEAU, à Sainte-Cécile, Vendée.)

Autre solution. — Traçons (fig. 4) le cercle dont le centre est D et qui a pour rayon la distance de D au côté BC : la ligne PBI étant tangente au cercle, la droite symétrique de PI par rapport au diamètre PD est la seconde tangente menée de P. D'après l'énoncé, cette droite doit passer en A.

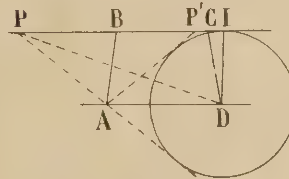


Fig. 4.

Le point P est donc un point d'intersection de BC, avec les tangentes au cercle (D) menées de A.

Le problème est impossible si DI > DA.

Il a deux solutions si P et P′ sont du même côté de BC (fig. 5);

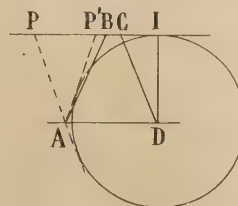


Fig. 5.

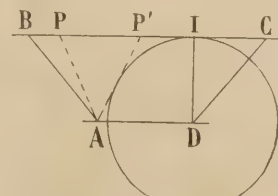


Fig. 6.

une seule, si P et P′ sont séparés par B, ou par B et C, il n'en a pas si P et P′ sont du même côté de B que C (fig. 6).

(P. SALVAGNAC, école Monteil, à Rodez.)

Troisième solution. — On pouvait encore remarquer que le symétrique de A par rapport à PD doit être sur la droite illimitée BC; d'autre part, il appartient au cercle tracé de D comme centre avec DA pour rayon.

[Bonnes solutions : Mlles S. David; M. Koch; M. Marignac; MM. H. Aubert; M. Barny; F. Baujard; Beaujean; G. Bitainc; E. Blanpain; V. Bourdon; A. Boyer; J. Briquet; R. Bruneteau; Carthieux; J. Cartouzou; M. Castelain; J.-E. Chantrelle; A. Chatelier; M. Chatelier; L. Cochin; R. Collomb; Dardillac; J. Devisme; Dougados; P. Dujoux; P. Durand; R. Fanichet; P. Faucheux; G. Février; Ch. Feyrabend; H. Forait; J. Forceville; G. Fouchó; Gabay; E. Garandel; Gaudron; Geffroy-Le Jan; F.-A. Gilly; A. Got; C. Grard; Y. Guézello; E. Guicheney; R. Guiot; M. Hambert; M. Laporte; G. Jugain; M. Lascoux; E. Lebeuf; E. Leclercq; J. Le Goff; R. Legrand; Linemann; P. Louon; J. Magnani; Marchal; R. Marchant; E. Masdupuy; Ph. Matchesseau; J. Mazeau; Ménéchal; G. Meynaud; H. Micard; J. Moirez; A. Monjallon; F. Négretzu; Ch. Noël; G. Olivier; L.-G. Papon; Perigault; Fauché; J. Périn; Philizot; M. Pommerolle; J. Raffin; R. Renaud; R. Revel; R. Rives; A. Robba; Roquet; Roset; V. Roux; J. Schilling; H. Sciaud; H. Sebban; L. Simon; L. Soulier; R. Vallé; A. Vandrey; G. Vimbert.]

4193. — *Démontrer, par des théorèmes du premier et du second livre, qu'un triangle dont les côtés sont mesurés par les nombres* 3, 4 *et* 5 *est rectangle.*

N. B. — Cette question paraît avoir attiré l'attention de nos lecteurs : nous en avons reçu des solutions nombreuses et variées; toutefois, nous avons dû en écarter un bon nombre, soit en raison de fautes de raisonnement graves, cercles vicieux, ou hypothèses admises sans justification, soit parce qu'elles ne répondaient pas aux conditions posées : l'emploi du théorème de Pythagore était évidemment exclu, ainsi que celui de la surface du triangle, des relations entre cette surface et le rayon du cercle inscrit, des propriétés des segments que la bissectrice d'un angle détermine sur le côté opposé. Tous ces théorèmes dépendent de la similitude et figurent dans le 3e livre de Géométrie.

Il serait intéressant d'étudier cette question au point de vue historique : ce triangle rectangle est en effet connu depuis la plus haute antiquité, et a peut-être été découvert avant le théorème de Pythagore. Il est d'ailleurs évident qu'il ne pouvait rester inconnu dès que ce théorème eut été énoncé; c'en est une conséquence immédiate.

Première solution. — On peut construire un triangle avec les côtés 3, 4 et 5, l'un quelconque des côtés étant plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence : nous voulons démontrer que ce triangle est rectangle; il revient au même de prouver que si un triangle a un angle droit compris entre deux côtés dont les mesures sont 3 et 4, son hypoténuse est égale à 5. Considérons donc un triangle abc, dont l'angle a est droit, les côtés ab et ac respectivement égaux à 3 et 4; on peut, en juxtaposant $1+3+5=9$ de ces triangles, comme l'indique la figure 1, former un triangle rectangle BAC, rectangle en A, dans lequel on a

Fig. 1.

$$\hat{B}=\hat{b}, \quad \hat{C}=\hat{c}, \quad AB=3\times 3, \quad AC=4\times 3.$$

D'autre part, on peut, en juxtaposant $1+3+5+7=16$ de ces triangles, comme l'indique la figure 2, former un triangle $B_1A_1C_1$ rectangle en A_1, où $\hat{B}_1=\hat{b}$, $\hat{C}_1=\hat{c}$ et $A_1B_1=4\times 3$, $A_1C_1=4\times 4$. Nous pouvons maintenant juxtaposer BAC et $B_1A_1C_1$, de façon à faire coïncider C avec B_1 et A_1 avec A, car $CA=3\times 4=B_1A_1$. Le triangle ainsi formé BB_1C_1 (fig. 3) sera rectangle en B_1, car les angles qui se trouvent adjacents en B sont égaux respectivement à $\hat{b}$ et à $\hat{c}$. Le côté BC_1 de ce triangle est égal à $9+16=25$. D'autre part, on peut juxtaposer

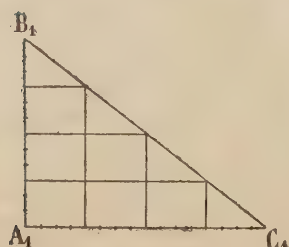


Fig. 2.

$$1+3+5+7+9=25$$

triangles égaux à abc, comme l'indique la figure 4, pour

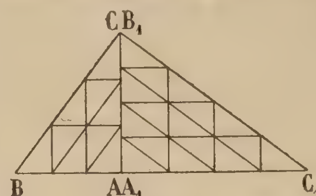


Fig. 3.

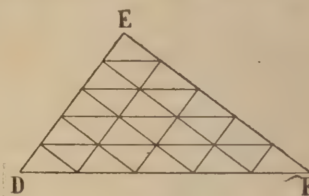


Fig. 4.

former un triangle DEF, dont les côtés de l'angle droit sont 5×3 et 5×4, et l'hypoténuse $DF=5bc$.

Transportons le triangle DEF sur le triangle BB_1C_1, de façon à faire coïncider les sommets B_1 et E où les angles sont droits, le côté ED prenant la direction B_1B et EF celle de B_1C_1; le triangle occupera la position D′EF′; le côté D′F′ sera alors parallèle à BC_1, puisque les angles en B et en D′ sont égaux à $\hat{b}$ (fig. 5).

Fig. 5.

Mais les deux triangles BB_1C_1 et D′EF′ contiennent chacun 25 triangles égaux à bac : il faut donc que BC_1 coïncide avec D′F′, car si D′F′, parallèle à BC_1, coupait EB entre E et B, et EC_1 entre E et C_1, le triangle BB_1C_1 surpasserait le triangle DEF. Donc D′F′ coïncide avec BC_1, ce qui prouve que $5bc=25$, donc que $bc=5$.

(M., à Guéret.)

Remarque. — Cette démonstration a un caractère de grande simplicité, presque d'évidence; toutefois, bien qu'elle ne se serve pas de la mesure d'une surface, elle fait appel à un axiome de grandeur, qui est à la base de la notion d'aire et qu'on peut énoncer ainsi : si deux aires planes sont décomposées en parties deux à deux superposables, elles sont équivalentes, et par conséquent, il est impossible qu'avec des morceaux de l'une on puisse *couvrir une étendue plane qui surpasse ou dépasse l'autre.*

Dans le cas présent, nous regardons comme évident que les triangles BB_1C_1 et DEF, qui sont l'un et l'autre formés de 25 triangles égaux à bac sont équivalents, et que par suite l'un des triangles ne peut couvrir l'autre et en outre le dépasser.

Deuxième solution. — Soit ABC le triangle dont les côtés sont

$$AB=3a, \quad AC=4a, \quad BC=5a.$$

Traçons le cercle de centre B, dont le rayon est BA; il coupe le grand côté BC en D et E, on a $CE=8a$, donc si A′ est le milieu de CE, $CA'=CA=4a$. D'autre part, D est le milieu de CA′; car $CD=5a-3a=2a$. Soit alors D′ le milieu de CA; la ligne D′A′, qui joint les milieux des côtés du triangle EAC, est parallèle à EA (*).

D'autre part, les triangles ADC et A′D′C sont égaux comme ayant un angle commun, l'angle en C, compris entre côtés égaux,

$$CD=CD'=2a \quad \text{et} \quad CA'=CA=4a.$$

On trouve donc sur cette figure quatre angles égaux, α :

BEA = BAE, (le triangle EBA est isocèle, par construction),
CA′D′ = CEA, parce que A′D′ est parallèle à EA,
CA′D′ = CAD, parce que les triangles CA′D′ et CAD sont égaux.

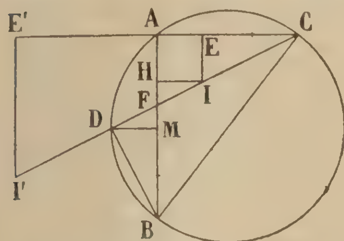
(*) On démontre, par des théorèmes du premier livre, que la droite qui joint les milieux des côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et égale à sa moitié.

Il en résulte que les angles BAC et EAD, qui coïncideraient par une rotation de l'angle α autour de A sont égaux.

On peut dire aussi que si l'on ajoute à l'angle BAD les angles BAE et DAC égaux à α, on obtient des angles égaux; or l'un de ces angles est BAC, l'autre est EAD, qui est droit.

(LOTARD-DOAZAN, école pratique d'Agen.)

Troisième solution. — Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, D le milieu de l'arc AB du cercle circonscrit à ce triangle, M le milieu du côté AB, I' le centre du cercle exinscrit dans l'angle C du même triangle : le point de contact de ce cercle avec le côté CA est E' : on sait que la longueur CE' est égale au demi-périmètre p, c'est-à-dire à $6a$. L'angle I'E'C est droit, et A est le milieu de E'C. La bissectrice CI' coupe AB en F; si nous démontrons que F est le milieu de CI', la droite AF, joignant le milieu de CE' à celui de CI', sera parallèle à E'I', donc perpendiculaire à CE'.



Soit E le point de contact du cercle inscrit avec CA, et M le milieu de BA : ce dernier point est la projection de D sur AB; on sait que $CE = p - AB = 6a - 4a = 2a = BM$.

Il en résulte que les triangles BDM et CEI sont égaux : ils sont en effet rectangles, l'un en E, l'autre en M, les angles en C et en B ont même mesure sur la circonférence BDAC et BM = CE.

Donc DB = IC; or on sait que DI' = DB = DI, donc DI' = IC.

De l'égalité des triangles résulte aussi que IE = DM, or IE = IH; les points I et D étant équidistants de AB, le milieu F de DI est sur AB; or IC = DI', donc F est aussi le milieu de CI', ce qui démontre le théorème.

(JEAN CLAMENS, école pratique d'Agen.)

Quatrième solution. — Soit ABC le triangle tel que $AB = 3a$, $AC = 4a$, $CB = 5a$.

Portons

$$CE = AC = 4a, \qquad BD = AB = 3a.$$

Marquons les points qui divisent CB en cinq parties égales à a, soit D le deuxième, E le quatrième point de division à partir de C; menons les droites AD et AE. Les triangles ACE et ABD sont isocèles. Soient H, G et F les milieux de AE, AD et AC : ces points sont alignés sur une parallèle à BC et l'on sait que $HG = \frac{1}{2} ED = BE$. La figure EBHG est donc un parallélogramme, EH et BG se coupent en leur milieu commun I et par conséquent DI, qui joint le milieu de EH à celui de EC, est parallèle à CH et perpendiculaire à EA, puisque le triangle ACE est isocèle.

D'autre part, BG est la médiane du triangle isocèle ABD, donc BG est perpendiculaire sur AD et il en résulte que ID = IA et que le triangle DIA est rectangle et isocèle. L'angle DAE est de 45°. Or les droites BIO et COH sont les bissectrices intérieures des angles en B et en C du triangle donné : elles sont perpendiculaires à AD et AE dont l'angle aigu est de 45°; l'angle aigu de ces droites est donc 45° et leur angle obtus 135°; or, l'angle aigu est $\frac{1}{2}(B + C)$, donc $B + C = 90°$.

On voit que le point O est le centre du cercle inscrit.

(X., à Limoges.)

N. B. — Cette solution intéressante met en lumière plusieurs propriétés remarquables du triangle rectangle considéré.

[Bonnes solutions : MM. H. Aubert, lycée de Tours; Baurens, école pratique d'Agen; J. Devisme, Paris; H. Sebban, école primaire supérieure de Batna (Constantine).]

SOLUTIONS D'EXERCICES

4146. — *Déterminer m pour que l'équation*

$$mx^2 - 2(m-1)x + m = 0 \qquad (1)$$

ait des racines x' et x'' satisfaisant à la condition

$$\frac{x'}{x''} + \frac{x''}{x'} = 4.$$

La relation que doivent vérifier les racines s'écrit

$$x'^2 + x''^2 = 4x'x''$$

ou

$$(x' + x'')^2 = 6x'x'';$$

or on connait

$$x' + x'' = \frac{2(m-1)}{m}$$

et

$$x'x'' = 1.$$

La relation qui doit exister entre les racines entraine donc

$$4(m-1)^2 = 6m^2 \qquad (2)$$

ou

$$f(m) \equiv m^2 + 4m - 2 = 0,$$

ce qui fournit deux valeurs de m :

$$m' = -2 + \sqrt{6} \qquad \text{et} \qquad m'' = -2 - \sqrt{6}.$$

Si la relation (2) est vérifiée par une valeur de m, il en résulte que l'équation (1) a des racines en x : la condition d'existence des racines de l'équation (1) est

$$(m-1)^2 - m^2 \geqslant 0 \qquad \text{ou} \qquad 1 - 2m \geqslant 0,$$

or l'équation $f(m) = 0$ peut s'écrire

$$f(m) = m^2 + 2(2m - 1) = 0;$$

si une valeur de m la vérifie,

$$1 - 2m = \frac{m^2}{2} > 0,$$

donc pour cette valeur de m l'équation en x a des racines.

4146. — *Trouver le reste de la division par 11 du produit* $8\,381^{529} \times 237^{421}$.

Cherchons d'abord le reste de la division par 11 de 8 381 et de ses puissances. On a

$$8\,381 = \text{mult. } 11 + 3 + 1 - 8 - 8 = \text{mult. } 11 - 1;$$

il en résulte que toute puissance paire de 8 381 est un multiple de 11 augmenté de l'unité et que toute puissance impaire de 8 381 est mult. 11 — 1.

Donc $8\,381^{529} = m.11 - 1$.

Opérons de même pour l'autre facteur :

$$\begin{aligned} 237 &= m.11 + 9 - 3 = m.11 + 6, \\ 237^2 &= m.11 + 36 = m.11 + 3, \\ 237^3 &= m.11 + 18 = m.11 - 4, \\ 237^5 &= m.11 - 12 = m.11 - 1, \\ 237^{10} &= m.11 + 1. \end{aligned}$$

Or $421 = 42 \times 10 + 1$; on a vu que $237^{10} = m.11 + 1$, donc

$$237^{421} = (m.11 + 1)(m.11 + 6) = m.11 + 6$$

et

$$8\,381^{529} \times 237^{421} = (m.11 - 1)(m.11 + 6) = m.11 - 6.$$

Le reste demandé est 5.

4147. — *Simplifier la fraction*

$$\frac{ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)}{ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)}.$$

On peut écrire le numérateur

$$ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2) \equiv (ax + by)(bx + ay)$$

et le dénominateur

$$ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2) \equiv (ax - by)(bx + ay);$$

les deux termes de la fraction sont donc divisibles par $(bx + ay)$; après avoir divisé par ce facteur commun, la fraction se réduit à

$$\frac{ax + by}{ax - by}.$$

1148. — *La somme des cubes de trois entiers consécutifs est divisible par le terme moyen et divisible aussi par* 9.

Soit a le terme moyen; la somme considérée est

$$\begin{aligned}(a-1)^3+a^3+(a+1)^3 &= a^3-3a^2+3a-1+a^3+a^3+3a^2+3a+1\\ &= 3a^3+6a\\ &= 3a(a^2+2).\end{aligned}$$

L'expression est donc divisible par 3 et par a; mais de plus le produit $a(a^2+2)$ est divisible par 3, car, ou bien a est divisible par 3 ou bien a est $m.3 \pm 1$ et a^2+2 est alors $m.3+1+2=m.3$.

EXAMENS ET CONCOURS DE 1920 (*Suite*).

EXAMENS ORAUX des ÉCOLES NATIONALES D'ARTS ET MÉTIERS (*)

Géométrie (*Suite*).

187. — Tangentes communes à deux cercles O, O'.

188. — [**4271** (**)]. On donne un demi-cercle ADB de diamètre AB; on prend sur AB entre A et B un point C et l'on trace les demi-cercles de diamètres AC et CB. Soit CD la tangente en C à ces demi-cercles. Par le point D où elle rencontre le demi-cercle ADB on trace les droites DAA', DBB', qui coupent les demi-cercles de diamètres AC et CB en A' et B'. Démontrer que : 1° A'B' = CD; 2° A'B' est tangente commune aux deux demi-cercles.

189. — Montrer que par quatre points non situés dans un même plan, on peut faire passer une sphère et une seule.

---

190. — Énoncé des théorèmes relatifs à la mesure des angles. Mesure de l'angle formé par deux sécantes à un cercle.

191. — [**4272**]. Deux cercles O, O' se coupent en deux points A et B. On prend un point quelconque M sur le cercle O'; on mène les droites MA, MB qui coupent le cercle O en C et D.

1° Lieu du milieu de la corde CD quand M décrit le cercle O'.

2° Démontrer que MO' est perpendiculaire à CD.

192. — Montrer que les volumes engendrés par un parallélogramme ABCD tournant autour des côtés AB, BC sont liés par la relation

$$\frac{\text{vol. AB}}{\text{vol. BC}} = \frac{\text{BC}}{\text{AB}},$$

en désignant par vol. AB, vol. BC les volumes respectivement engendrés par le parallélogramme en tournant autour de AB et BC.

---

193. — Volume du tronc de prisme triangulaire.

194. — Construire la polaire d'un point par rapport à un cercle.

195. — On donne un demi-cercle de diamètre AB et un point quelconque M de son plan. On trace MA et MB, qui coupent le demi-cercle en C et D. On mène les tangentes en C et D au demi-cercle; soit I leur point d'intersection. Montrer que : 1° MI est perpendiculaire à AB; 2° l'angle CID est double de l'angle AMB.

---

196. — Dans un triangle le carré du côté opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres côtés moins deux fois le produit de l'un de ces côtés par la projection de l'autre sur lui.

197. — On donne un demi-cercle de diamètre AB et un point P sur ce diamètre. On trace la sécante CD parallèle à AB. Montrer que l'on a $\overline{PC}^2+\overline{PD}^2 =$ const. quand CD varie en restant parallèle à AB.

198. — Cas d'égalité des trièdres. Démonstration.

(*) Les questions posées à un même candidat sont comprises entre deux traits.

(**) Ce second numérotage ne porte que sur les questions dont nous avons l'intention de donner ici une solution. Ces questions seront résolues comme exercices; les abonnés ne devront pas en envoyer de solutions.

199. — Puissance d'un point par rapport à un cercle.

200. — [**4273**]. On trace deux droites parallèles AX, BY et une perpendiculaire AB à ces droites. Sur AX on prend un point C et sur BY de l'autre côté de AB par rapport à C un point D tels que $\text{AC}.\text{BD} = \overline{\text{AB}}^2$.

Montrer que le cercle de diamètre CD passe par deux points fixes quand C et D varient.

201. — Quand un trièdre a deux dièdres égaux les faces opposées à ces dièdres sont égales.

---

202. — Ligne de plus grande pente d'un plan par rapport à un autre plan.

203. — On donne un carré ABCD et soit une droite AX de l'espace faisant avec les côtés AB et AD des angles de 60°. Trouver sur AX un point S tel que l'angle BSD soit un angle droit. Montrer que l'angle de AS avec le plan du carré est égal à 45°.

204. — Propriétés d'un parallélogramme. Démontrer que les diagonales se coupent en leurs milieux.

---

205. — La différence des carrés des deux côtés d'un triangle est égale à deux fois le produit du troisième côté par la projection de la médiane correspondante sur ce côté.

206. — On donne un cercle de centre O et une corde BC. Déterminer sur ce cercle un point A tel que l'on ait $\overline{\text{AB}}^2-\overline{\text{AC}}^2 = 2\text{OB}.\text{BC}$. Montrer que l'orthocentre du triangle ABC est le symétrique de A par rapport à BC.

207. — Par un point donné mener une perpendiculaire à un plan donné.

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4274. — Un propriétaire possède un terrain à bâtir ayant la forme d'un carré dont le côté a 72^{m}. La ville veut ouvrir une rue large de 16^{m}, qui aura pour axe une des diagonales du carré. La ville donne au propriétaire le choix entre deux propositions :

1° Elle lui paiera à raison de 50^{f} le m^2 le terrain de la rue, et lui laissera le reste.

2° Elle prendra tout le terrain à raison de 45^{f} le m^2. Le propriétaire, s'il accepte la première proposition, est assuré de vendre le reste de son terrain 42^{f} le m^2.

Quelle est la proposition la plus avantageuse?

(*B. S., Nancy, aspirantes, juillet* 1920.)

4275. — Le même jour, deux trains ont été dirigés de Paris sur Tours : le premier, A, est parti à 8 heures avec une vitesse de 51^{km} à l'heure; le second, B, est parti à $8^{h}\,20^{m}$ avec une vitesse de 45^{km}. La distance de Paris à Tours est de 237^{km}. On demande : 1° à quelle heure le train A sera à égale distance du train B et d'un troisième train, C, parti à 8 heures de Tours, pour aller à Paris avec une vitesse de 54^{km} à l'heure; 2° à quelles distances de Paris, les trois trains se trouveront à ce moment-là.

(*B. S., Paris, aspirantes, juillet* 1920.)

4276. — Un tronc de cône a pour bases deux cercles dont les rayons sont 30^{cm} et 50^{cm}. Sa hauteur est 60^{cm}. On demande de le partager en trois parties, par des plans parallèles aux bases, de manière que les surfaces latérales des trois portions soient égales entre elles.

(*B. S., Poitiers, aspirants, juillet* 1920.)

4277. — Dans un carré de côté égal à a, on inscrit un triangle équilatéral dont un sommet coïncide avec un sommet du carré; calculer le côté et l'aire de ce triangle équilatéral.

Appliquer les formules au cas où $a = 5^{cm}$.

(*B. S., Paris, aspirants, juillet* 1920.)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie PAUL BRODARD.

23e Année. 1er Juin 1921. N° 17.

L'Éducation Mathématique

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

PRIX DU NUMÉRO : France et Colonies, 0 fr. 60. Étranger, 0 fr. 70.
ABONNEMENT ANNUEL : France et Colonies, 10 fr. Étranger, 12 fr.

Tous les abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, l'on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction : Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Abonnements : Librairie **Vuibert**, Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

SUR LES TRIANGLES HOMOTHÉTIQUES

par M. **V. Thébault**, à Ernée (Mayenne).

1. Soient deux triangles homothétiques ABC, A'B'C'; a, b, c et h_a, h_b, h_c les côtés et les hauteurs du premier, d_a, d_b, d_c les distances des côtés homologues, positives ou négatives suivant que le point A et la droite B'C', par exemple, sont du même côté de BC ou non.

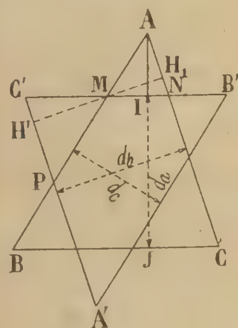


Fig. 1.

Considérons les triangles AMN et C'MP formés par les droites B'C', CA, AB et B'C', C'A', AB. Désignons par S_1, S_2 les aires de ces triangles, par S et S' celles de ABC et A'B'C', les mesures de ces aires étant regardées comme des grandeurs algébriques, ayant un signe suivant leur orientation, le sens de ABC est pris pour sens positif, ce qui fait que $S > 0$.

Le rapport de similitude des triangles AMN et ABC a pour valeur algébrique

$$\frac{AI}{AJ} = \frac{AJ - IJ}{AJ} = 1 - \frac{IJ}{AJ} = 1 - \frac{d_a}{h_a},$$

donc

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{h_a - d_a}{h_a}\right)^2 = \left(1 - \frac{d_a}{h_a}\right)^2.$$

Ce rapport est toujours positif, car AMN et ABC ont même sens, dans tous les cas.

La hauteur MH_1 du triangle AMN relative à AN est $h_b\left(1 - \frac{d_a}{h_a}\right)$; MH', hauteur du triangle C'MP relative à C'P, est

$$d_b - \overline{MH}_1 = d_b - h_b\left(1 - \frac{d_a}{h_a}\right).$$

On a donc

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{MH'}{MH_1}\right)^2 = \left[\frac{d_b - h_b\left(1 - \frac{d_a}{h_a}\right)}{h_b\left(1 - \frac{d_a}{h_a}\right)}\right]^2 = \left[1 - \frac{d_b}{h_b\left(1 - \frac{d_a}{h_a}\right)}\right]^2,$$

et

$$\frac{S_1}{S} \times \frac{S_2}{S_1} = \frac{S_2}{S} = \left(1 - \frac{d_a}{h_a}\right)^2 \times \left[1 - \frac{d_b}{h_b\left(1 - \frac{d_a}{h_a}\right)}\right]^2$$

$$= \left(1 - \frac{d_a}{h_a} - \frac{d_b}{h_b}\right)^2.$$

En recherchant ainsi le rapport de similitude des triangles C'MP et A'B'C', on obtient finalement

$$\frac{S'}{S} = \left(1 - \frac{d_a}{h_a} - \frac{d_b}{h_b} - \frac{d_c}{h_c}\right)^2, \qquad (1)$$

expression remarquable du rapport d'homothétie de deux triangles en fonction des hauteurs de l'un d'eux et des distances des côtés homologues. Ce rapport est positif, car deux triangles homothétiques sont toujours de même sens.

Si l'on remplace dans cette formule, h_a, h_b, h_c par leurs valeurs $\frac{2S}{a}$, $\frac{2S}{b}$, $\frac{2S}{c}$, elle devient

$$S.S' = \left(S - \frac{1}{2}ad_a - \frac{1}{2}bd_b - \frac{1}{2}cd_c\right)^2 (*). \qquad (2)$$

Remarques. — *a*) Cette relation contient implicitement ce théorème bien connu :

On considère un triangle A"B"C" inscrit à un triangle ABC. Par les sommets de ABC on mène les parallèles aux côtés du triangle A"B"C" qui déterminent un triangle $\alpha\beta\gamma$. L'aire du triangle ABC est moyenne proportionnelle entre celles des triangles A"B"C" et $\alpha\beta\gamma$.

b) Lorsque $S' = S$, l'expression (1) donne

$$\frac{d_a}{h_a} + \frac{d_b}{h_b} + \frac{d_c}{h_c} = 0.$$

2. Posons dans (2), $\frac{1}{2}ad_a + \frac{1}{2}bd_b + \frac{1}{2}cd_c = K$, il vient

$$SS' = (S - K)^2,$$

soit

$$K = S \pm \sqrt{SS'} = \sqrt{S}(\sqrt{S} \pm \sqrt{S'}),$$

les signes $\pm$ correspondant à une homothétie inverse ou directe; d'où cette propriété connue :

On donne, dans un plan, deux triangles homothétiques. Soient a, b, c les côtés de l'un d'eux, et d_a, d_b, d_c les distances des côtes homologues. La quantité

$$ad_a + bd_b + cd_c$$

reste constante lorsque les triangles se déplacent.

On aurait de même

$$\frac{1}{2}a'd_a + \frac{1}{2}b'd_b + \frac{1}{2}c'd_c = \sqrt{S'}(\sqrt{S'} \pm \sqrt{S}),$$

et

$$\frac{1}{2}(ad_a + bd_b + cd_c) - \frac{1}{2}(a'd_a + b'd_b + c'd_c) = (S - S'). \quad (3)$$

3. Théorème. — *Si par les sommets A, B, C d'un triangle on mène des parallèles $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ aux côtés B'C', C'A', A'B' d'un autre*

(*) M. Neuberg a publié une relation analogue pour deux tétraèdres homothétiques dans un journal japonais, 1913.

triangle A'B'C' *et que par* A', B', C' *on mène des parallèles* $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\beta'$ *à* BC, CA, AB, *les aires des triangles* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ *déterminés satisfont à la relation*

$$\overline{ABC} \times \overline{\alpha'\beta'\gamma'} = \overline{A'B'C'} \times \overline{\alpha\beta\gamma}\,(^*).$$

Inscrivons au triangle ABC un triangle A''B''C'' homothétique au triangle $\alpha\beta\gamma$,

$$\frac{\overline{ABC}}{\overline{\alpha\beta\gamma}} = \frac{\overline{A''B''C''}}{\overline{ABC}}.$$

Les figures (ABC, A''B''C'') et ($\alpha'\beta'\gamma'$, A'B'C') sont semblables; par conséquent

$$\frac{\overline{ABC}}{\overline{\alpha\beta\gamma}} = \frac{\overline{A''B''C''}}{\overline{ABC}} = \frac{\overline{A'B'C'}}{\overline{\alpha'\beta'\gamma'}},$$

d'où

$$\overline{ABC} \times \overline{\alpha'\beta'\gamma'} = \overline{A'B'C'} \times \overline{\alpha\beta\gamma}.$$

4. Ces triangles ABC et $\alpha'\beta'\gamma'$, A'B'C' et $\alpha\beta\gamma$ forment deux couples de triangles homothétiques. Soient S et s', S' et s leurs aires,

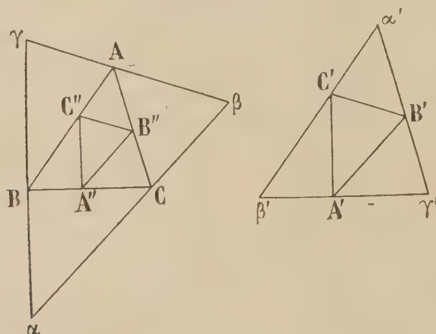


Fig. 2.

a, b, c et d_a, d_b, d_c, a', b', c' et d'_a, d'_b, d'_c les côtés de ABC, A'B'C' et les distances des côtés homologues de ABC et $\alpha'\beta'\gamma'$, de A'B'C' et $\alpha\beta\gamma$.

Si l'on joint les extrémités des côtés BC, CA, AB et B'C', C'A', A'B' aux sommets A', B', C' et A, B, C, les aires des triangles ainsi obtenus sont

$$\frac{1}{2}ad_a, \quad \frac{1}{2}bd_b, \quad \frac{1}{2}cd_c \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a'd'_a, \quad \frac{1}{2}b'd'_b, \quad \frac{1}{2}c'd'_c.$$

Puisque $Ss' = S's$, on déduit de (2) que :

$$S - \frac{1}{2}ad_a - \frac{1}{2}bd_b - \frac{1}{2}cd_c = S' - \frac{1}{2}a'd'_a - \frac{1}{2}b'd'_b - \frac{1}{2}c'd'_c,$$

relation qui, avec (3), permet d'énoncer ces résultats assez curieux :

Deux triangles quelconques ABC, A'B'C' *étant dans un même plan, on a la relation d'aires*

$$\overline{ABC} - \overline{BCA'} - \overline{CAB'} - \overline{ABC'} = \overline{A'B'C'} - \overline{B'C'A} - \overline{C'A'B} - \overline{A'B'C}.$$

Si les deux triangles se déplacent dans le plan, la quantité précédente et la suivante :

$$(\overline{BCA'} + \overline{CAB'} + \overline{ABC'}) - (\overline{B'C'A} + \overline{C'A'B} + \overline{A'B'C}),$$

restent constantes.

(*) Ce théorème est un cas particulier d'un cas plus général que nous avons donné dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*, 43e année, question 8920.

CERTIFICAT D'APTITUDE AU PROFESSORAT DES CLASSES ÉLÉMENTAIRES DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Concours de 1920.

Session normale.

4230. — *Un commerçant a acheté* 85 *bouteilles de vin fin en trois lots qui valent respectivement* 4f, 7f *et* 10f *la bouteille. Il revend le tout avec un bénéfice brut de* 25 %, *mais les frais de transport réduisent ce bénéfice brut de* 10 % *de sa valeur, de sorte que le bénéfice net n'est plus que de* 152f,10. *Sachant que le deuxième lot contient trois fois moins de bouteilles que le troisième, dites :* 1° *le prix d'achat total;* 2° *combien il y a de bouteilles dans chaque lot.*

N. B. — *On donnera :* 1° *une solution arithmétique;* 2° *une solution algébrique de ce problème.*

Solution arithmétique. — Le bénéfice net, 152,10, n'est que les $\frac{9}{10}$ du bénéfice brut, lequel, par conséquent, est

$$\frac{10}{9}152{,}10 = 169.$$

Le prix d'achat est quadruple, c'est $4 \times 169 = 676$.

D'autre part, associons trois bouteilles à 10f avec une bouteille à 7f : ce groupe de quatre bouteilles pourrait être remplacé par quatre bouteilles au prix moyen $\frac{1}{4}(3 \times 10 + 7) = 9{,}25$, sans changer le nombre total de bouteilles, ni le prix total. Or 85 bouteilles à 4f coûteraient seulement 340f, soit 336f de moins que les 85 bouteilles effectivement achetées : si l'on remplace une bouteille à 4f par une autre coûtant 9f,25, la somme dépensée croît de 5,25 : autant de fois 5,25 est contenu dans 336, autant de bouteilles à 4f ont été remplacées par des bouteilles plus chères. On trouve que le quotient 336 : 5,25 est égal à 64. Ce nombre est bien, comme il le fallait, divisible par 4, de façon que les 64 bouteilles au prix moyen de 9f,25 se répartissent en 48 bouteilles à 10f et 16 à 7.

Il y a donc	21 bouteilles à 4f,	valant	84f
	16 — à 7f,	—	112f
	48 — à 10f,	—	480f
Total	85 bouteilles,	valant ensemble	676f.

(Gaston COUSTILLAS, école professionnelle de Périgueux.)

Solution algébrique. — Le problème revient à résoudre un système d'équations du premier degré à trois inconnues, qui sont les nombres de bouteilles de chaque prix : le nombre total en est connu :

$$x + y + z = 85, \qquad (1)$$

on sait que

$$3y - z = 0; \qquad (2)$$

le prix total est 676f, ce qui donne

$$4x + 7y + 10z = 676; \qquad (3)$$

en ajoutant les deux premières équations, on a

$$x + 4y = 85;$$

en remplaçant dans la dernière, z par $3y$, on a

$$4x + 37y = 676;$$

on porte dans la dernière équation la valeur de x tirée de la première, ce qui donne

$$340 + 21y = 676;$$

d'où $21y = 336$ et $y = 16$, ce qui fournit $x = 21$ et $z = 48$.

(P. LEBRUN, athénée d'Ixelles, Belgique.)

[Bonnes solutions : Mme Blondel; Mlles G. Boulay; M. Bourreau; Perrier; MM. A. Bordes; J. Cartouzou; Cherpin; R. Deschamps; J. Devismo; Ch. Feyra-

bend; Geffroy-Le Jan; Gilly; Guichenot; Guiot; R. Henry; P. Lebrun; R. Legrand; P. Louon; A. Mallens; R. Marchant; Michem; J. Navel; C. Norgelet; Olivier; L.-G. Papon; J. Patat; E. Paté; Philizot; Robba; Rosenstock; M. Roy; H. Sebban; L. Simon; Stoffler; Trebouta-Le Minous; Villarzel.]

SESSION SPÉCIALE DE JUIN.

4231. — *Un négociant entreprend un commerce avec un certain capital, qu'il augmente chaque année, par ses bénéfices, de $\frac{1}{4}$ de la valeur qu'il avait au début de l'année. Il prélève annuellement sur ses bénéfices 8 000f pour les dépenses de sa maison. Sachant qu'au bout de trois ans il possède net 92 500f, on demande quel capital il possédait au début de la première année.*

N. B. — *On donnera de ce problème : 1o une solution arithmétique; 2o une solution algébrique.*

Solution arithmétique. — La somme 92 500 est égale à la différence entre la valeur acquise par le capital, placé à 25 % au bout de 3 ans, et le capital qui serait constitué au bout de ce temps par des annuités de 8 000f. Ce dernier capital est

$$8\,000\left[1+\frac{5}{4}+\left(\frac{5}{4}\right)^2\right],$$

car la première annuité est restée placée pendant deux ans; sa valeur est $8\,000\left(\frac{16+20+25}{16}\right)=8\,000\,\frac{61}{16}=30\,500$. La somme que posséderait le commerçant, s'il n'avait pas fait de prélèvements, serait $92\,500+30\,500=123\,000$. La valeur de ce capital, trois ans auparavant, était $123\,000\times\left(\frac{4}{5}\right)^3=62\,976$.

Remarque. — Cette solution arithmétique ne diffère pas essentiellement dans sa marche de la solution algébrique qu'on trouvera ci-dessous : on peut en donner une qui va plus naturellement du connu à l'inconnu, ce qui est le propre du procédé arithmétique.

Autre solution arithmétique. — Le capital possédé par le commerçant était :

A la fin de la troisième année,	$92\,500+8\,000=100\,500$;
à la fin de la seconde,	$\frac{4}{5}.100\,500+8\,000=\ \ 88\,400$;
à la fin de la première,	$\frac{4}{5}.\ 88\,400+8\,000=\ \ 78\,720$;
au commencement de la première,	$\frac{4}{5}.\ 78\,720=62\,796$.

Le capital dont le commerçant disposait, quand il s'est établi, était donc de 62 796f.

(JACQUES DEVISME, à Paris.)

Solution algébrique. — Soit C le capital avec lequel le commerçant a commencé ses affaires; supposons qu'il prélève 8 000f à la fin de l'exercice : la somme C_1 dont il dispose au commencement du nouvel exercice est

$$C_1=\frac{5}{4}C-8\,000.$$

A la fin du deuxième exercice, ce capital s'est accru d'un quart; il est donc multiplié par la fraction $\frac{5}{4}$: le commerçant fait un nouveau prélèvement de 8 000f, on a donc

$$C_2=\frac{5}{4}C_1-8\,000=\left(\frac{5}{4}\right)^2C-8\,000\left(1+\frac{5}{4}\right);$$

à la fin de la troisième année, on calculera de même le capital

$$C_3=\frac{5}{4}C_2-8\,000=\left(\frac{5}{4}\right)^3C-8\,000\left[1+\frac{5}{4}+\left(\frac{5}{4}\right)^2\right]=92\,500.$$

En faisant la réduction des fractions, on obtient l'équation

$$\frac{125}{64}C-8\,000\,\frac{16+20+25}{16}=92\,500,$$

d'où l'on tire

$$C=\frac{123\,000\times64}{125}=\frac{123\,000\times512}{1\,000}=62\,976.$$

(HENRI SEBBAN, à Batna, Constantine.)

[Bonnes solutions : Mlles G. Boulay; M. Bourreau; Perrier; MM. A. Bordes; J. Cartouzou; J. Cherpin; J. Danton; Deschamps; Feyrabend; R. Guiot; R. Legrand; P. Louon; Michem; F. Morvan; J. Navel; Ch. Norgelet; Olivier; E. Paté; Robba; Rosenstock; Roy; F. Villarzel.]

ARITHMÉTIQUE

4234. — *Trouver le plus petit nombre tel que son produit par 9 s'écrive (dans le système de base 10), avec les mêmes chiffres que le nombre, mais dans l'ordre inverse.*

Nous supposons le nombre cherché différent de zéro.

Il est facile de voir qu'il a au moins quatre chiffres significatifs; l'égalité

$$9(10a+b)=10b+a$$

est impossible, car elle donne, après développement,

$$89a=b,$$

ce qui ne peut avoir lieu, a et b étant des chiffres.

De même, l'égalité

$$9(100a+10b+c)=100c+10b+a$$

donne

$$899a+80b=91c;$$

or, comme a est au moins égal à 1, le premier membre est supérieur ou égal à 899, tandis que $91c$ est inférieur ou égal à $91\times9=819$. Mais on peut trouver un nombre de quatre chiffres et un seul, possédant la propriété demandée : ce nombre sera évidemment le plus petit, puisque s'il en existe d'autres, ils ont au moins cinq chiffres. Posons

$$9(1\,000a+100b+10c+d)=1\,000d+100c+10b+a,$$

ce qui donne, en réunissant les termes semblables,

$$8\,999a+890b=10c+991d;$$

le second membre ne peut dépasser $90+9\times991=9\,009$; or si $a=1$ avec $b=0$, le premier membre atteint déjà 8 999.

On ne peut donc donner à a et b que les valeurs 1 et 0, ce qui exige $d=9$, alors

$$8\,999=10c+8\,919,$$

ce qui donne $10c=80$; il se trouve ainsi que la valeur de c est entière et dans les limites imposées; il y a donc une solution qui s'écrit avec quatre chiffres, c'est 1 089.

En effet $1\,089\times9=9\,801$.

(JEAN PÉRIN, école supérieure professionnelle de Rambouillet.)

Deuxième solution. — Il faut que

$$(\overline{ab\ ..\ hk})\times9=\overline{kh\ ..\ ba},$$

le nombre qui s'écrit avec les chiffres $\overline{kh\ ..\ ba}$ est donc multiple de 9 et le nombre $\overline{ab\ ..\ hk}$, qui s'écrit avec les mêmes chiffres, est aussi multiple de 9.

Pour que le produit d'un nombre de p chiffres par 9 ait aussi p chiffres significatifs, il faut qu'il soit compris entre 10^p et le nombre qui s'écrit avec p chiffres égaux à 1, car le produit de ce dernier nombre par 9 s'écrit avec p chiffres 9 : c'est le plus grand nombre de p chiffres.

Le premier chiffre à droite du nombre cherché étant un 1, le chiffre des unités est un 9, car 9 est le seul nombre d'un chiffre dont le produit par 9 ait 1 pour chiffre d'unités. Le nombre cherché s'écrit donc 1 .. 9.

19 ne convient pas, étant supérieur à 11. Entre 100 et 111, nous avons 109, mais ce nombre n'est pas divisible par 9.

Comme nombres de quatre chiffres, de la forme $10x9$ ou $11x9$, divisibles par 9, on ne peut prendre que 1 089, car 1 179 est supérieur à 1 111; 1 089 satisfait à la question, car $1\,089\times9=9\,801$.

En continuant de même, on trouve un nombre de cinq chiffres, 19 089, car $10\,989 \times 9 = 98\,901$, et l'on reconnaît que tous les nombres de la forme

$$109 \ldots 89$$

(les points, en nombre quelconque, étant remplacés par des 9), ont la propriété demandée.

[Bonnes solutions : Mlles M. Bourreau ; Perrier ; MM. H. Baumbach ; A. Bordes ; Bruniquel ; J. Cartouzou ; Chasselut ; J. Danton ; Devisme ; P. Faucheux ; Gilly ; Guicheney ; R. Hacquin ; A. Hugueville ; G. Luxcey ; M., à Guéret ; R. Marchant ; G. Olivier ; C. Pagès ; E. Passebois ; Philizot ; E. Piette ; E. Renaud ; H. Sebban ; Stoeffler.

Assez bonnes solutions : MM. G. Cellier ; P. Louon ; Trebouta.]

4235. — *Un propriétaire met en vente une maison et reçoit les propositions de trois acquéreurs : le premier, A, offre 25 000f comptant et 35 000f payables à la fin de la troisième année ; le second, B, offre 15 000f comptant, plus 50 000 à la fin de la cinquième année ; le troisième, C, offre 20 000f comptant, 30 000f à la fin de la première année, plus 2 000f à la fin de chacune des quatre années suivantes.*

Quelles sont les valeurs des prix proposés, le taux d'intérêt étant de $4\frac{1}{2}$ % et la capitalisation des intérêts se faisant à la fin de chaque année ?

Quelle est l'offre la plus avantageuse ?

La valeur actuelle de la somme offerte par A est

$$25\,000 + 35\,000\,\frac{1}{(1{,}045)^3};$$

l'offre de B vaut

$$15\,000 + 50\,000\,\frac{1}{(1{,}045)^5};$$

enfin celle de C vaut

$$20000 + 30000\,\frac{1}{1{,}045} + 2000\left(\frac{1}{(1{,}045)^2} + \frac{1}{(1{,}045)^3} + \frac{1}{(1{,}045)^4} + \frac{1}{(1{,}045)^5}\right);$$

on peut calculer par logarithmes les puissances de $\frac{1}{1{,}045}$ jusqu'à la cinquième ; on les trouve calculées avec six décimales dans les tables classiques de Dupuis :

$$(1{,}045)^{-1} = 0{,}956938,$$
$$(1{,}045)^{-2} = 0{,}915730,$$
$$(1{,}045)^{-3} = 0{,}876297,$$
$$(1{,}045)^{-4} = 0{,}838561,$$
$$(1{,}045)^{-5} = 0{,}802451.$$

On calcule alors la valeur actuelle de l'offre de A :

comptant	25 000
valeur actuelle de 35 000	30 670,40
	55 670,40

Valeur actuelle de l'offre de B :

comptant	15 000
valeur actuelle de 50 000	40 122,55
	55 122,55

Valeur actuelle de l'offre de C :

comptant	20 000
valeur actuelle de 30 000	28 708,14
valeur actuelle des annuités	6 866,22
	55 574,22

On reconnaît que les offres des trois acheteurs se classent dans l'ordre suivant : la plus avantageuse est celle de A, puis vient celle de C, qui s'en rapproche beaucoup ; l'offre de B est la moins élevée.

(L. CHAPELON.)

Remarque. — Ce calcul donne une idée de ceux que font les « experts » des pays alliés, pour comparer les offres de l'Allemagne avec les demandes des puissances de l'Entente. On comprend ainsi que l'on arrive à des résultats si difficiles à comparer — en tant que valeurs actuelles — puisque le taux d'intérêt, les époques de versement ne sont pas déterminées avec précision.

Enfin le cours futur des changes est complètement inconnu ; et c'est un facteur par lequel les totaux doivent être multipliés. On conçoit que dans toute discussion sur ce sujet il s'agit de dizaines de milliards, et qu'il n'en résulte aucune lumière.

N. B. — Le calcul devait être fait en tenant compte des intérêts composés, les intérêts simples atteignant plusieurs centaines de francs par an.

[Bonnes solutions : MM. J. Devisme ; Gilly ; Guicheney ; L. Guillet ; P. Lagache ; Le Lan ; P. Louon ; L.-G. Papon ; J. Patat ; M. Roy ; H. Sebban ; Tilloy ; G. Vimbert.

Assez bonnes solutions : MM. Geffroy ; Messan ; A. Robba.]

ALGÈBRE

4236. — *Résoudre et discuter le système d'équations :*

$$\sqrt{x + \frac{1}{y}} + \sqrt{x + y - 1} = a, \tag{1}$$

$$2x + y + \frac{1}{y} = b. \tag{2}$$

Application numérique : $a = \frac{11}{2}$, $b = \frac{65}{4}$.

Posons

$$u = \sqrt{x + \frac{1}{y}} \quad \text{et} \quad v = \sqrt{x + y - 1},$$

u et v étant positifs : on aura, en vertu de l'équation (1),

$$u + v = a, \tag{1'}$$

et, comme

$$u^2 = x + \frac{1}{y}, \qquad v^2 = x + y - 1,$$

la deuxième équation donnera

$$u^2 + v^2 = b - 1, \tag{2'}$$

ce que l'on peut écrire

$$(u + v)^2 + (u - v)^2 = 2(b - 1);$$

en remplaçant $(u + v)^2$ par sa valeur connue, on trouve

$$(u - v)^2 = 2(b - 1) - a^2.$$

La condition de réalité de u et v est donc

$$2(b - 1) - a^2 \geqslant 0; \tag{3}$$

si cette condition est remplie, on a deux solutions pour u et v :

1° $u + v = a$, $u - v = +\sqrt{2(b-1) - a^2}$; 2° $u + v = a$, $u - v = -\sqrt{2(b-1) - a^2}$.

Ces deux systèmes donnent, le premier

$$u = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{2(b-1) - a^2}\right), \qquad v = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{2(b-1) - a^2}\right),$$

le second les mêmes valeurs permutées.

Il faut qu'elles soient positives, donc que uv et $u + v$ le soient, ce qui donne $2a^2 - 2(b - 1) > 0$ et $a > 0$. En réunissant ces conditions avec la condition de réalité, on voit qu'il faut que a soit positif et $2(b - 1)$ compris entre $2a^2$ et a^2. Ayant u et v, on calculera y par

$$v^2 - u^2 = y - \frac{1}{y} - 1 = a\sqrt{2(b-1) - a^2};$$

cette équation du second degré en y a toujours des racines, le

premier terme étant y^2 et le dernier -1; y étant connu, x se calcule par une équation du premier degré,

$$x = v^2 + 1 - y,$$

qui donne une valeur de x pour chaque valeur de y; les valeurs de y peuvent être associées deux à deux de façon que leur produit soit -1. Les conditions

$$a > 0, \qquad a^2 < 2(b-1) < 2a^2$$

sont donc nécessaires et suffisantes pour l'existence de quatre solutions du système proposé.

Application numérique. — Avec $a = \frac{11}{2}$, $b = \frac{65}{4}$, on a

$$2(b-1) - a^2 = 2\frac{61}{4} - \frac{121}{4} = \frac{1}{4}.$$

Première solution :

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{2} + \frac{1}{2}\right) = 3, \qquad v = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2},$$

$$v^2 - u^2 = -\frac{11}{4},$$

$$y - \frac{1}{y} - 1 = -\frac{11}{4};$$

les valeurs de y sont racines de

$$y^2 + \frac{7}{4}y - 1 = 0,$$

$$y_1 = \frac{-7 + \sqrt{113}}{8} = 0{,}4537 \quad \text{avec} \quad x_1 = \frac{65 - \sqrt{113}}{8} = 6{,}7962,$$

$$y_2 = \frac{-7 - \sqrt{113}}{8} = -2{,}2307 \quad \text{avec} \quad x_2 = \frac{65 + \sqrt{113}}{8} = 9{,}4537.$$

Deuxième solution :

$$u = \frac{5}{2}, \qquad v = 3, \qquad v^2 - u^2 = +\frac{11}{4},$$

$$y - \frac{1}{y} - 1 - \frac{11}{4} = 0,$$

$$y_3 = \frac{+15 + \sqrt{289}}{8} = 4, \qquad x_3 = 6,$$

$$y_4 = \frac{+15 - \sqrt{289}}{8} = -\frac{1}{4}, \qquad x_4 = \frac{41}{4}.$$

On peut vérifier la solution x_3, y_3 :

$$x + \frac{1}{y} = 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}, \qquad \sqrt{x + \frac{1}{y}} = \frac{5}{2},$$

$$x + y - 1 = 9, \qquad \sqrt{x + y - 1} = 3;$$

on a bien

$$\frac{5}{2} + 3 = \frac{11}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{25}{4} + 9 + 1 = \frac{65}{4}.$$

(J. LASSAVE, à Lisle-en-Dodon.)

[Bonnes solutions : MM. Bruniquel; J. Devisme; G. Fouché; P. Louon; M., à Guéret; R. Marchant; J. Schilling; R. Weinzaepfel.
Assez bonnes solutions : Mlle G. Boulay; MM. Blanco; J. Dirand; P. Faucheux; Ch. Norgelet; M. Roy.]

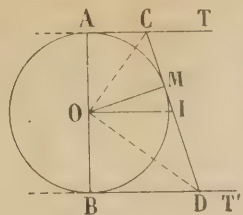
GÉOMÉTRIE

4183. — *Par les extrémités A et B d'un diamètre d'un cercle O de rayon R, on mène les tangentes AT et BT'. Déterminer sur AT un point C tel qu'en menant CD tangente au cercle O, l'aire du trapèze ACDB ait une valeur donnée k^2. Discuter.*

(*B. S., Haute-Loire, aspirants, mars* 1920.)

Pour que la ligne CD touche le cercle (O) décrit sur le diamètre AB, il faut que $AC \times BD = R^2$.

La condition est nécessaire : en effet, si M est le point de contact de la tangente, OC et OD, bissectrices des angles AOM et BOM, qui sont adjacents et supplémentaires, font un angle droit COD. Le triangle COD étant rectangle, la hauteur OM est moyenne géométrique entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse,



$$CM \times MD = \overline{OM}^2;$$

or $\quad CM = CA \quad$ et $\quad MD = DB,$

donc $\quad AC \times BD = R^2.$

La condition est suffisante : soit en effet C un point pris sur AT; de ce point on peut mener au cercle (O) une tangente autre que CA, cette tangente coupe BT' en E; soit D le point de BT' tel que $BD \times AC = R^2$; d'après le théorème précédent, on aura $BE \times AC = R^2$, donc E coïncide avec D, c'est-à-dire que la ligne CD touche le cercle (O).

Posons alors $AC = x$ et $BD = y$; on connaît le produit $xy = R^2$; d'autre part, la surface du trapèze est

$$k^2 = \frac{1}{2}(x + y)\,2R = R(x + y); \qquad (2)$$

le problème est donc ramené à calculer ou à construire deux longueurs dont on connaît la somme et la moyenne géométrique. x et y sont les racines de l'équation

$$Z^2 - \frac{k^2}{R}Z + R^2 = 0,$$

qui a deux racines positives, à la seule condition que

$$k^4 \geqslant 4R^4$$

ou

$$k^2 \geqslant 2R^2 \qquad \text{ou enfin} \qquad k \geqslant R\sqrt{2}.$$

(L. PAPON, collège de Clamecy.)

REMARQUE I. — On peut construire le trapèze qui répond à la question; menons par le centre O la parallèle à AT, qui coupe CD en I; la surface du trapèze est égale à celle d'un rectangle dont la base est OI et la hauteur AB. OI est donc connu et égal à $\frac{k^2}{2R}$.

Il suffit de mener au cercle (O) des tangentes par le point I; il en existe deux, si $\frac{k^2}{2R} > R$, mais les trapèzes formés avec ces tangentes sont symétriques par rapport à OI et ne constituent pas deux solutions différentes, du moins en grandeur.

(G. BROUET, collège Chaptal.)

REMARQUE II. — On peut remarquer que la médiane OI du triangle rectangle COD est égale à la moitié de l'hypoténuse, donc on peut construire C et D en traçant autour du centre I le cercle de rayon IO; C et D sont deux points d'intersection de ce cercle avec AT et BT', qui sont diamétralement opposés.

[Bonnes solutions : Mlle Marignac; MM. Authier; M. Barny; G. Bitaine; Bonnet; Bourdeu; Boyer; J. Briquet; R. Bruneteau; Bussière; J. Cartouzou; Ch. Cadaert; Castelain; Castelbou; Ch. Caussin; J.-E. Chantrelle; R. Chasselut; B. Charles; A. Chatelier; M. Chatelier; J. Clamens; G. Clément; L. Cochin; R. Collomb; M. Courboulay; C. Crépeau; Dardillac; A. de Batz; G. Démaret; J. Devisme; Ch. Dubost; Ducluseau; Dujoux; S. Durand; Fanichet; Farges; P. Faucheux; Ch. Feyrabend; L. Fiévet; H. Forait; Geffroy-Le Jan; Gilly; A. Got; Guézelle; E. Guicheney; Hambert; G. Houalet; Kohn; F. Lapeyrère; M. Laporte; M. Lascoux; R. Legrand; Linimann; P. Louon; Marchal; R. Marchant; J. Martin; E. Masdupuy; J. Mazeau; Ménéchal; G. Meynaud; H. Micard; J. Miserez; Monjallon; A. Moreau; R. Morel; G. Mouzon; F. Négretzu; Ch. Norgelet; G. Olivier; J. Patat; Perigault; J. Périn; Philizot; Pierdet; E. Pinlong; Planet; A. Popu; M. Potez; H. Raillat; A. Robba; Roquet; Rosenstock; Roset; P. Salvagnac; Sambussy; H. Sciaud; J. Schilling; H. Sebban; L. Simon; L. Soulier; A. Terrier; A. Tabary; R. Valló; A. Vandroy; M. Vetter; G. Vimbert; R. Weinzaepfel.]

4196. — *Un terrain a la forme d'un trapèze ABCD. Les angles C et D valent respectivement 60° et 45°. On donne $AC = 2a$ et $CD = 4a$.*

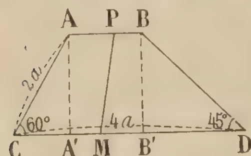
1° Calculer en fonction de a : la hauteur, la base AB et la surface du trapèze.

2° *On désire partager ce trapèze en deux parties équivalentes par une droite issue d'un point* M *pris sur* CD *de telle manière que* $CM = \frac{3a}{2}$. *A quelle distance de* B *cette droite rencontrera-t-elle la base* AB?

3° *Faire les calculs pour* $a = 20^m$. (*Les longueurs seront évaluées à* 1^{cm} *près et la surface sera exprimée en ares.*)

(*B. S., Lot-et-Garonne, aspirants, mars* 1920.)

1° Soient A′ et B′ les projections de A et de B sur le côté CD. Le triangle BB′D est rectangle isocèle. Le triangle A′CA est la moitié d'un triangle équilatéral dont le côté est $2a$. Donc



$$CA' = a, \qquad A'A = a\sqrt{3}.$$

Il en résulte que

$$\overline{BD}^2 = 2\overline{A'A}^2 = 6a^2,$$

$$BD = a\sqrt{6}, \qquad B'D = a\sqrt{3},$$

et enfin $AB = 4a - a - a\sqrt{3} = a(3 - \sqrt{3}) = a \times 1{,}26795$.

La surface est

$$S = \frac{1}{2}a\sqrt{3}[4a + a(3 - \sqrt{3})]$$

$$= \frac{a^2}{2}(7\sqrt{3} - 3) = a^2 \times 4{,}56217.$$

2° Les trapèzes MCAP et MPBD ayant même hauteur, il faut et il suffit pour que leurs aires soient égales, que

$$AP + CM = PB + MD,$$

ou

$$AP - PB = MD - CM = \frac{5a}{2} - \frac{3a}{2} = a,$$

d'autre part,

$$AP + PB = AB = a(3 - \sqrt{3});$$

en ajoutant ces deux équations membre à membre, on obtient AP; en faisant la différence, on a PB.

$$AP = a\left(2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = a \times 1{,}13398,$$

$$PB = a\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = a \times 0{,}13398.$$

3° Si l'on remplace a par 20^m, les résultats précédents donnent les valeurs numériques :

$AB = 25^m{,}36$,
$S = 18^a{,}25$, à 1/2 centiare près,
$PB = 2^m{,}68$.

(TRÜONG VAN CAM, lycée de Montpellier.)

[Bonnes solutions : Mlles G. David; M. Marignac; MM. Arbey; H. Aubert; J. Barbot; M. Barny; Baurens; J. Briquet; G. Buckinx; Bussière; Carthieux; Cartouzou; M. Castelain; L. Chapelon; R. Chasselut; Chatelier; J. Clamens; Clément; M. Courboulay; P. Crosse; G. Dautel; G. Démarct; Dewerpe; J. Devisme; M. Dligatch; J. Dougados; A. Doutau; Dujoux; A. Éparvier; P. Faucheux; A. Favard; Forait; J. Forceville; L. Fixe; G. Fouché; R. Fraïssé; Geffroy-Le Jan; R. Gils; Gilly; Goïcœchea; V. Goudeau; R. Grégoire; Y. Guézelle; E. Guicheney; Guiot; Hambert; L. Kerleroux; P. Lebrun; P. Louon; J. Magnani; Margouet; Martin; P. Maurel; Y. Maurice; P. Mené; L. Messan; H. Micard; Monjallon; G. Mouzon; F. Négretzu; C. Noël; Ch. Norgelet; C. Pagès; J. Patat; E. Paté; Philizot; Picherau; Pichon; Pierdet; Pinlong; Pinot; Ponceau; Popu; F. R.; E. Reynaud; Robba; Roset; E. Sage; M. Saint-Juvin; H. Sciaud; H. Sebban; Siberchicot; L. Simon; P. Teyssier; G. Thiébaux; Thoreux; P. Trompier; R. Vallé; Ch. Vouilloux; Voyer.

Assez bonnes solutions : Mme Clot; MM. R. Bernard; L. Bonnet; Bruneteau; Caussin; Gabay; A. Goëlo; R. Henry; G. Houalet; Kolm; Lapeyrère; R. Marchant; Marchesseau; Ménéchal; A. Moreau; Olivier; L.-G. Papon; M. Robineau; J. Schilling; Vaillant; G. Vimbert; R. Weinzaepfel.]

4219. — *Soit un trapèze* ABCD *de bases* $AB = b$, $CD = b'$ *et de hauteur* h. *On demande de le partager en deux parties équivalentes :*

1° *par une droite passant par* E, *sur* CD, *tel que* $CE = \frac{1}{3}CD$;

2° *par une droite issue du milieu* F *du côté oblique* AC;

3° *par une droite* MN *parallèle aux bases.* (*On prendra* $MN = x$ *pour inconnue.*)

(*B. S., Eure-et-Loir, aspirants, mars* 1920.)

1° Soit E′ le point de AB auquel il faut joindre le point E pour partager la surface en deux parties équivalentes, posons $AE' = y$ et soit h la hauteur du trapèze, il faut que

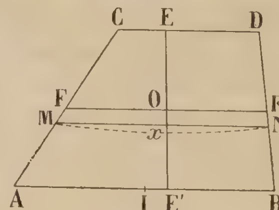


Fig. 1.

$$\frac{1}{2}h\left(\frac{b'}{3} + y\right) = \frac{1}{4}h(b + b');$$

on en déduit

$$y = \frac{b}{2} + \frac{1}{6}b',$$

valeur toujours acceptable, car elle est positive et inférieure à b; on voit que $IE' = \frac{1}{2}CE$.

Deux trapèzes de même hauteur sont équivalents quand la demi-somme des bases a la même longueur : pour construire le côté EE′, il suffit donc de joindre E au milieu O de FF′.

2° Soit FI (*fig.* 2) la droite demandée et FF′ la parallèle aux bases menée par F; il faut qu'entre les aires on ait la relation

$$FCDF' + FF'I = FABF' - FF'I;$$

l'aire du triangle FF′I doit donc être la moitié de la différence entre celles des trapèzes FABF′ et FCDF′; d'autre part, si l'on mène par F′ la droite F′G parallèle à AC, le triangle F′GB est aussi la demi-différence entre les trapèzes considérés; il faut donc que FF′I soit équivalent à F′BG; les hauteurs de ces triangles, perpendiculaires à AB, doivent être dans le rapport inverse des

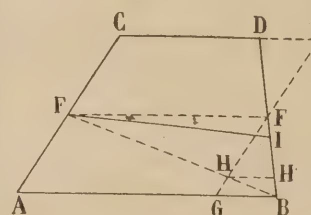


Fig. 2.

bases, qui sont $FF' = \frac{1}{2}(b + b')$ et $GB = \frac{1}{2}(b - b')$. La ligne FB croise F′G en H : la droite HH′, parallèle à FF′ menée par H, coupe F′B en H′; on aperçoit facilement la proportion

$$\frac{H'B}{H'F'} = \frac{HB}{HF} = \frac{BG}{FF'} = \frac{IF'}{IB};$$

il en résulte que le point I cherché se construit en prenant $F'I = BH'$; le milieu de IH′ coïncide avec celui de BF′.

3° Si l'on suppose les côtés non parallèles du trapèze prolongés jusqu'à leur point de concours S, les aires des triangles SCD, SMN et SAB sont entre elles comme $\overline{CD}^2$, $\overline{MN}^2$ et $\overline{AB}^2$ ou comme b'^2, x^2, b^2. Il faut que l'on ait

$$2SMN = \overline{SAB} + \overline{SCD}.$$

En remplaçant les trois termes de cette égalité homogène par des quantités proportionnelles, cela donne

$$2x^2 = b^2 + b'^2.$$

Autre solution des questions 1 et 2. — Par C menons une parallèle à EA, jusqu'au point M où elle coupe le prolongement de AB; de même, par D menons DN parallèle à EB; les triangles ACE et AME étant équivalents, ainsi que BDE et BNE, pour que les trapèzes ACEE′ et BDEE′ soient équi-

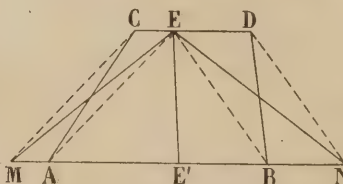


Fig. 3.

valents, il faut et il suffit que les triangles MEE' et NEE' le soient, donc que E' soit le milieu du segment connu MN.

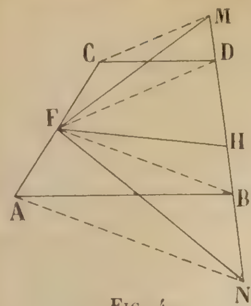


Fig. 4.

Nous cherchons maintenant FH, tel que les quadrilatères AFHB et FCDH soient équivalents; menons CM, parallèle à FD et AN parallèle à FB; les triangles FMD et FCD sont équivalents, ainsi que FAB et FNB; il en résulte que les quadrilatères FCDH et FABH sont respectivement équivalents aux triangles FMH et FNH. Pour que les quadrilatères soient égaux, il faut et il suffit que H soit le milieu du segment connu MN.

(Roger MOREL, école St-Joseph au Mans.)

La solution de la troisième question fournit aussi une construction de la droite FH qui répond à la seconde; si MN, parallèle aux bases, divise le trapèze en deux parties équivalentes, menons la droite FO par le milieu de MN et prolongeons-la jusqu'au point H où elle coupe DB; le point H ainsi construit est celui qui satisfait à la condition 2, car les deux triangles FHN et FMN sont équivalents (les deux sommets étant sur une parallèle à la base commune); si nous en détachons la partie commune FON, il reste des triangles équivalents FOM et HON, les trapèzes MCDN et MABN étant équivalents, il en sera de même des quadrilatères CFHD et AFHB. Cette construction rattache la solution du troisième problème à celle du second; il est clair que si l'un des problèmes est résolu, une construction simple fournit la solution de l'autre.

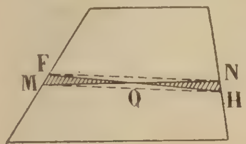


Fig. 5.

(Charles NORGELET, à Salau, Ariège.)

[Bonnes solutions : MM. A. F.; R. Bernard; Ch. Bertrand; Ch. Caussin; L. Chapelon; R. Chasselut; J. Cherpin; H. Chirol; A. Cieutat; G. Clément; R. Cluzaud; G. Commune; M. Courboulay; J. Devisme; J. Dirand; P. Faucheux; Geffroy-Le Jan; Y. Guézello; E. Guicheney; Guitton; F. Lapeyrère; R. Legrand; P. Louon; R. Marchant; Y. Maurice; Ménéchal, F. Négretzu; J. Patat; M. Potez; A. Robba; J. Schilling; P. Trompier; A. Wehrung.
Assez bonnes solutions : MM. J. Barbot; G. Bitaine; Breuzard; J. Bugnard, A. Got; H. Gros; W. Kipfer; L.-G. Papon; Pierdet; M. Siraud; Ch. Vouilloux.]

SOLUTIONS D'EXERCICES

4149. — *Résoudre le système*

$$x^2 + xy + y^2 = 39, \qquad (x-y) \qquad (1)$$
$$y^2 + yz + z^2 = 201, \qquad (y-z) \qquad (2)$$
$$z^2 + zx + x^2 = 147. \qquad (z-x) \qquad (3)$$

Première solution. — Multiplions les deux membres de chaque équation par le multiplicateur inscrit à côté, puis ajoutons membre à membre; à gauche, nous avons

$$x^3 - y^3 + y^3 - z^3 + z^3 - x^3 = 0;$$

à droite, nous trouvons

$$39(x-y) + 201(y-z) + 147(z-x);$$

nous obtenons donc une équation du premier degré

$$108x - 162y + 54z = 0$$

ou, en divisant tous les coefficients par 54,

$$2x - 3y + z = 0. \qquad (4)$$

(On en déduit

$$\frac{x-y}{1} = \frac{y-z}{2} = \frac{z-x}{-3}.)$$

En retranchant la troisième équation de la seconde, on trouve

$$y^2 - x^2 + z(y-x) = 54$$

ou

$$(y-x)(x+y+z) = 54.$$

En portant dans cette équation la valeur de z tirée de l'équation (4), on obtient une équation entre x et y,

$$(y-x)(4y-x) = 54,$$

qui, jointe à la première équation du système donné, forme un autre système de deux équations homogènes à deux inconnues, x et y :

$$\begin{cases} y^2 + xy + x^2 = 39, \\ 4y^2 - 5xy + x^2 = 54. \end{cases}$$

Divisons membre à membre et prenons pour inconnue $\frac{y}{x} = u$, nous obtenons une équation du second degré en u,

$$\frac{4u^2 - 5u + 1}{u^2 + u + 1} = \frac{54}{39} = \frac{18}{13},$$

qui, développée et ordonnée, s'écrit

$$34u^2 - 83u - 5 = 0;$$

ses racines sont $\frac{83 \pm \sqrt{7569}}{68} = \frac{83 \pm 87}{68}$,

donc $\frac{170}{68} = \frac{5}{2}$ et $-\frac{4}{68} = -\frac{1}{17}$.

La racine $u = \frac{5}{2}$ donne

$$y = \frac{5}{2}x,$$
$$z = 3y - 2x = \frac{11}{2}x,$$

et ces valeurs, portées dans la première équation du système, fournissent

$$x^2\left(1 + \frac{5}{2} + \frac{25}{4}\right) = x^2\frac{39}{4} = 39,$$

donc $x = \pm 2$.

Le système admet les deux solutions :

(1) $x = 2, \quad y = 5, \quad z = 11;$
(2) $x = -2, \quad y = -5, \quad z = -11.$

La racine $u = -\frac{1}{17}$ donne

$$y = -\frac{x}{17}, \qquad z = 3y - 2x = -\frac{37}{17}x.$$

Ces valeurs, portées dans la première équation du système, fournissent

$$x^2\left[1 + \left(\frac{1}{17}\right)^2 - \frac{1}{17}\right] = 39,$$

d'où $273x^2 = 39 \times \overline{17}^2;$

en divisant les deux membres par 39,

$$x^2 = \frac{17^2}{7},$$

d'où la solution $x = \pm\frac{17}{\sqrt{7}};$

le système admet donc encore les solutions

(3) $x = +\frac{17}{\sqrt{7}}, \quad y = \frac{-1}{\sqrt{7}}, \quad z = -\frac{37}{\sqrt{7}},$

(4) $x = -\frac{17}{\sqrt{7}}, \quad y = +\frac{1}{\sqrt{7}}, \quad z = +\frac{37}{\sqrt{7}}.$

Deuxième solution. — En retranchant membre à membre l'équation (1) de (2), on forme

$$z^2 - x^2 + y(z-x) = 201 - 39$$

ou

$$(x+y+z)(z-x) = +162;$$

en retranchant l'équation (2) de (3), puis (3) de (1), on trouve de même

$$(x+y+z)(x-y) = -54$$

et

$$(x+y+z)(y-z) = -108,$$

d'où l'on déduit que $x-z$, $y-x$ et $z-y$ sont proportionnels à -162, $+54$ et $+108$, ou bien, en divisant par 54, à -3, $+1$ et $+2$.

On peut alors appeler t la valeur commune des trois rapports

$$\frac{x-z}{-3} = \frac{y-x}{1} = \frac{z-y}{2} = t$$

on en tire

$$z = x + 3t,$$
$$y = x + t.$$

En portant ces valeurs de z et de y dans deux des équations du système, on a

$$x^2 + (x+t)x + (x+t)^2 = 39$$

ou

$$3x^2 + 3tx + t^2 = 39, \qquad (5)$$

et

$$x^2 + (x+3t)x + (x+3t)^2 = 147$$

ou

$$3x^2 + 9tx + 9t^2 = 147,$$

ce qui donne, en divisant les deux membres par 3,

$$x^2 + 3tx + 3t^2 = 49. \qquad (6)$$

Les équations (5) et (6) forment un système homogène en x et t,

que l'on peut résoudre en prenant $\frac{t}{x}$ comme inconnue, ainsi qu'on a fait dans le cas précédent.

On obtient l'équation

$$\frac{3v^2+3v+1}{v^2+3v+3}=\frac{49}{39},$$

ou $$68v^2-30v-108=0,$$

ou $$34v^2-15v-54=0.$$

Les racines sont

$$\frac{15\pm\sqrt{225+4\times 54\times 34}}{68}=\frac{15\pm\sqrt{7569}}{68}=\frac{15\pm 87}{68};$$

l'une des racines est $\frac{102}{68}=\frac{3}{2}$, l'autre $-\frac{72}{68}=-\frac{18}{17}$.

Si l'on remplace alors dans l'équation (5) t par $\frac{3x}{2}$, ou par $-\frac{18}{17}x$, on trouve les valeurs correspondantes de x.

$$x^2\left(3+\frac{9}{2}+\frac{9}{4}\right)=\frac{39}{4},$$

d'où $$x^2\left(\frac{39}{4}\right)=39, \qquad x=\pm 2.$$

On retrouve les solutions calculées par l'autre méthode.

1150. — *Résoudre l'équation*

$$(1+x+x^2)^{\frac{1}{2}}=a-(1-x+x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Prenons comme inconnues les deux radicaux, soit

$$u=(1+x+x^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad v=(1-x+x^2)^{\frac{1}{2}},$$

u et v sont, par hypothèse, des quantités positives. Entre ces deux inconnues existe d'abord la relation donnée

$$u+v=a, \qquad (1)$$

ensuite on a identiquement, d'après leur définition,

$$u^2-v^2=2x, \qquad (2)$$

ce qui donne, en remplaçant $u+v$ par la valeur que fournit l'équation (1),

$$u-v=\frac{2x}{a}; \qquad (2')$$

on a aussi

$$u^2+v^2=2(1+x^2). \qquad (3)$$

Les équations (1) et (2′) permettent de calculer u et v :

$$u=\frac{a}{2}+\frac{x}{a}, \qquad v=\frac{a}{2}-\frac{x}{a};$$

en portant ces valeurs dans l'équation (3), on obtient une équation donnant la valeur de l'inconnue x :

$$\frac{a^2}{2}+2\frac{x^2}{a^2}=2(1+x^2),$$

d'où $$2x^2\left(1-\frac{1}{a^2}\right)=\frac{a^2-4}{2},$$

$$x^2=\frac{a^2}{4}\cdot\frac{a^2-4}{a^2-1}.$$

(On aurait évidemment pu obtenir la même équation en élevant au carré les deux membres de l'équation proposée, pour faire disparaître un radical, puis en faisant disparaître le radical qui resterait par une seconde élévation au carré.)

Cette valeur de x^2 n'est positive que si a^2 est supérieur à 4, ou inférieur à 1.

L'équation proposée n'est donc possible que si a est compris entre -1 et $+1$, ou extérieur à l'intervalle $(-2, +2)$.

Mais comme il faut que

$$\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=a,$$

a ne peut avoir qu'une valeur positive (si les radicaux sont précédés du signe +). De plus, la valeur absolue de $u-v$ doit être inférieure à celle de $u+v$, x^2 doit vérifier l'inégalité

$$\frac{4x^2}{a^2}<a^2,$$

ou $$\frac{a^2-4}{a^2-1}<a^2,$$

qui s'écrit

$$\frac{a^4-2a^2+4}{a^2-1}>0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{(a^2-1)^2+3}{a^2-1}>0.$$

Elle n'est vérifiée que par les valeurs de a^2 supérieures à 1.

En résumé, l'équation

$$+\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=a$$

a deux racines égales et de signes contraires pour toute valeur de a supérieure à 2.

EXAMENS ORAUX des ÉCOLES NATIONALES D'ARTS ET MÉTIERS, 1920 (*).

Géométrie (*Suite.*)

208. — Démontrer que quand une droite est perpendiculaire à deux droites d'un plan qui passent par son pied dans ce plan, elle est perpendiculaire au plan.

209. — Lieu géométrique des points d'où l'on voit deux cercles donnés sous des angles égaux.

210. — Soit un plan P et une droite AB projetée sur ce plan en AB′. Montrer que toute autre droite AC du plan est telle que $\widehat{BAC}>\widehat{BAB'}$.

---

211. — Propriétés du triangle isocèle.

212. — Démontrer que si un triangle a deux médianes égales, c'est un triangle isocèle. Le démontrer géométriquement, puis par le calcul.

213. — Deux sphères (O), (O′), de rayons R et R′, sont sécantes. Calculer le volume commun aux deux sphères en fonction des rayons R, R′ et de la distance des centres, e. (*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

1278. — Un négociant en gros possède deux stocks de charbon A et B (A > B), dont le poids total est 900ᵗ. Ce charbon lui revient au prix de 85ᶠ la tonne. Il vend ces stocks à deux détaillants : le stock A avec un bénéfice de 15 °/₀ sur le prix de vente et le stock B avec un bénéfice de 10 °/₀ sur le prix de revient. Mais le commis chargé de la livraison se trompe : il expédie le stock A à l'acheteur du stock B et réciproquement.

Les deux acheteurs exigent l'application des prix convenus par tonne, et celui du stock A obtient en outre une indemnité de 0ᶠ,50 par tonne de charbon non livrée. Dans ces conditions, le bénéfice du marchand est diminué de 1 050ᶠ. Déterminer les poids des stocks A et B.

(*B. S., Bordeaux, aspirantes, octobre* 1920.)

1279. — Trois effets de même échéance sont présentés à l'escompte. La valeur nominale du premier est égale à celle du second diminuée de 972ᶠ; il est escompté au taux 5 °/₀. La valeur nominale du troisième surpasse celle du second de 4 860ᶠ; il est escompté au taux 3 °/₀. Les escomptes de ces trois billets sont égaux et leur valeur est la centième partie de la valeur nominale du second.

1° Quelles sont les trois valeurs nominales?

2° A quel taux le second effet a-t-il été escompté?

3° Le souscripteur avait proposé, le jour de la négociation, de les remplacer par deux autres de même valeur nominale, payables l'un dans 60ʲ, l'autre dans 120ʲ. Calculer cette valeur nominale commune, le taux de l'escompte étant 4 °/₀.

(*B. S., Chambéry, aspirants, octobre* 1920.)

1280. — En admettant que la population de la France reconstituée par le traité de Versailles soit de 38 millions d'habitants le 1ᵉʳ janvier 1920, que les mesures ayant pour but d'encourager la repopulation aboutissent à un accroissement permanent du nombre des habitants, on demande quelle sera la population de la France le 31 décembre 1935 si cet accroissement peut être évalué à la fin de chaque année au $\frac{1}{100}$ du nombre des habitants au commencement de la même année?

(*B. S., Lille, aspirants, octobre* 1920.)

1281. — Une niche se compose d'un demi-cylindre creux surmonté d'un quart de sphère creuse.

En appelant h la hauteur de la partie cylindrique et 2R son diamètre, trouver le rapport entre ces deux longueurs pour que la surface demi-cylindrique soit équivalente à la surface du quart de sphère.

Cette condition étant remplie, quelle sera la surface courbe totale de cette niche pour $h=0^m,80$?

(*B. S., Grenoble, aspirants, octobre* 1920.)

(*) Les questions posées à un même candidat sont comprises entre deux traits.

Le Rédacteur-Gérant : Henry Vuibert.

Coulommiers. — Imprimerie Paul Brodard.

23e Année. 15 Juin 1921. N° 18.

L'Éducation Mathématique

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

PRIX DU NUMÉRO : France et Colonies, 0 fr. 60. Étranger, 0 fr. 70.
ABONNEMENT ANNUEL : France et Colonies, 10 fr. Étranger, 12 fr.

Tous les abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, l'on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction : Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Abonnements : Librairie **Vuibert**, Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

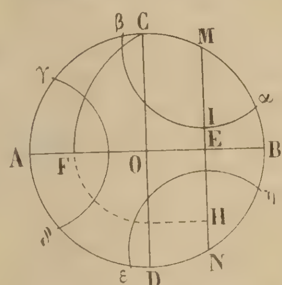
Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

INSCRIPTION D'UN POLYGONE RÉGULIER DE NEUF COTÉS DANS UN CERCLE PAR UNE CONSTRUCTION APPROCHÉE,

par M. **B. Cordilha**, professeur à Rio-de-Janeiro.

Menons deux diamètres perpendiculaires, AOB et COD, soit E le milieu du rayon OB, M et N les points de rencontre du cercle avec la perpendiculaire élevée à OB en E; les points A, M et N sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans la circonférence.

Décrivons autour du centre E l'arc de circonférence de rayon EC, qui coupe OA en F et portons sur EN la longueur EH égale à OF. Enfin retranchons de HM la longueur HI, égale aux quatre cinquièmes du rayon; la longueur IM est très peu différente du côté du polygone régulier inscrit de neuf côtés convexe.



En effet, $ME = \frac{1}{2}R\sqrt{3}$,

$$EH = OF = \frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1), \qquad HI = \frac{8R}{10};$$

il en résulte que MI, qui est HE + EM — HI, a pour mesure

$$R(0,8660254.. + 0,6180340.. - 0,8) = R(0,6840594);$$

or le calcul, que l'on peut faire avec les tables de logarithmes, donne pour longueur du côté du polygone régulier convexe de neuf côtés $c_9 = R(0,6840403..)$; on voit que l'erreur est inférieure à 0mm,02 si le rayon du cercle est un mètre; cette erreur est pratiquement négligeable dans la grande majorité des cas où l'on aurait à faire cette inscription.

La figure indique l'inscription du polygone, dont on connaît trois sommets, M, A, N. On porte $M\alpha = M\beta = MI$, $N\varepsilon = N\eta = MI$, et $A\gamma = A\delta = MI$; on constatera l'égalité des cordes $\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$, $\eta\alpha$ avec MI.

ÉCOLES NATIONALES D'ARTS ET MÉTIERS

(EXAMEN D'ENTRÉE DES ALSACIENS-LORRAINS.)

Concours de 1920.

4239. — *Déterminer* λ *de façon que*

$$x^4 - 5x^2 + 4x - \lambda$$

soit divisible par $2x + 1$ *et trouver le quotient.*

Première méthode. — Effectuons la division du polynome $x^4 - 5x^2 + 4x - \lambda$ par $2x + 1$; le diviseur étant du premier degré, la division donnera pour reste une quantité indépendante de x et fonction de λ : il suffira d'écrire que cette fonction de λ est nulle.

Pour éviter des coefficients fractionnaires, il est avantageux, sachant que l'on aura à diviser quatre fois le premier terme du dividende ou du dividende partiel par $2x$, de multiplier tous les coefficients du polynome dividende par 2^4, ce qui ne changera pas le reste : mais le quotient que l'on obtiendra sera le produit par 2^4 du quotient demandé.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
16x^4 & & -80x^2 & +64x & -16\lambda & 2x+1 \\
-16x^4 & -8x^3 & & & & 8x^3 - 4x^2 - 38x + 51 \\
\hline
 & -8x^3 & -80x^2 & +64x & -16\lambda & \\
 & +8x^3 & +4x^2 & & & \\
\hline
 & & -76x^2 & +64x & -16\lambda & \\
 & & +76x^2 & +38x & & \\
\hline
 & & & +102x & -16\lambda & \\
 & & & -102x & -51 & \\
\hline
\text{Reste :} & & & -51 & -16\lambda &
\end{array}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la division se fasse sans reste est que $\lambda = -\frac{51}{16}$: le quotient est alors

$$\frac{1}{16}(8x^3 - 4x^2 - 38x + 51).$$

(G. OLIVIER, Postes et Télégraphes, Paris.)

Deuxième méthode. — On peut obtenir immédiatement la valeur de λ demandée : pour qu'un polynome entier en x soit divisible par $2x + 1$, il est nécessaire et suffisant qu'il s'annule quand on y remplace x par $-\frac{1}{2}$. On aura donc la valeur de λ en écrivant que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right) - \lambda = 0;$$

cette équation donne bien $\lambda = -\frac{51}{16}$.

Alors il existera une identité

$$x^4 - 5x^2 + 4x + \frac{51}{16} = (2x+1)\left(\frac{x^3}{2} + px^2 + qx + \frac{51}{16}\right);$$

on a pu écrire le coefficient de x^3 et le terme constant du quotient, car on sait que les termes de plus fort et de plus faible degré du produit proviennent, sans réduction, du produit des termes de plus fort et de plus faible degré des deux facteurs.

On *déterminera* ensuite p et q en calculant les coefficients de x^3 et de x.

Coefficient de x^3 :

$$0 = \frac{1}{2} + 2p, \qquad \text{d'où} \qquad p = -\frac{1}{4};$$

coefficient de x :

$$4 = \frac{51}{8} + q, \qquad \text{d'où} \qquad q = -\frac{19}{8}.$$

(HENRI LE LAN, à Lorient.)

[Bonnes solutions : MM. H. Aubert; F. Bailbé; A. Bal; Bonnet; A. Bordes; V. Bourden; J. Briquet; R. Bruneteau; G. Cellier; B. Charles; M. Courboulay; G. Demaret; J. Devisme; J. Dirand; J. Dougados; A. Doutau; A. Dubuc; Épailly; Faucheux; Ch. Feyrabend; G. Fouché; Gilly; M. Giraud; E. Guicheney; R. Guiot; R. Hénin; G. Houalet; F. Lapeyre; J. Lassave; G. Lebrun; Le Minous-Trebouta; R. Loret; P. Louon; R. Marchant; Y. Maurice; Michem; G. Mouzon; F.-N., à Bruxelles; J. Navel; F. Négretzu; R.-D. Pantz; L.-G. Papon; J. Patat; E. Paté; Philizot; A. Popu; F. Puget; R. Revel; Robba; Rosenstock; M. Roy; M. Saint-Juvin; J. Sambussy; H. Sarda; J. Schilling; H. Sebban; R. Vallé; N. Vedie; Victoir; P. Vidal; R. Weinzaepfel.
Solutions partielles : MM. J. Cartouzou; J. Clamens.]

4240. — 1° *La bissectrice de l'angle* α *du triangle* ABC *divise le côté* BC *en deux parties dont le rapport* $\frac{DB}{DC}$ *est égal à* $\frac{5}{7}$.

Calculer les côtés AB *et* AC, *sachant que*

$$AB + AC = 288^{cm}.$$

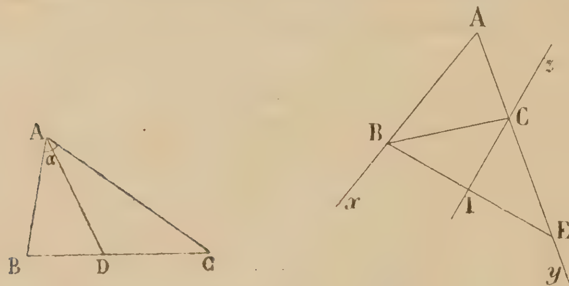
2° *Construire un triangle* ABC, *connaissant le côté* $AB = c$, *l'angle* $\alpha = 60°$, *et la somme des deux autres côtés* $BC + AC = S$.

1° On sait que le rapport des côtés de l'angle A est égal à celui des segments que la bissectrice détermine sur le côté opposé. On connaît donc le rapport et la somme des longueurs AB et AC : la question est ramenée au partage de 288 en deux parties proportionnelles à 5 et à 7, dont la somme est 12.

On aura donc

$$AC = \frac{7}{12}288 = 168, \qquad AB = \frac{5}{12}288 = 120.$$

2° On peut construire un angle xAy, de 60°, et prendre sur le côté Ax à partir du sommet A la longueur donnée $AB = c$. Soit C le troisième sommet, qu'il s'agit de construire; il est sur le



côté Ay de l'angle de 60°. Si l'on prolonge AC d'une longueur CE égale à CB, la longueur AE est connue et égale à S. Le point E étant construit, C, qui est équidistant de B et de E, est sur la perpendiculaire Iz élevée à BE en son milieu I. Il faut supposer que $S > c$, car la somme de deux côtés d'un triangle est supérieure au troisième; on aura donc $AE > AB$: le point A et le point E seront de part et d'autre de la droite Iz, qui coupera AE en un point C situé entre A et E.

Le triangle ABC est construit : il n'y a qu'une solution si les données satisfont à la condition $S > c$, évidente *a priori*.

(J. LAMBUSSY, école primaire supérieure Michelet.)

[Bonnes solutions : Mlle M. Bourreau; MM. H. Aubert; J. Barré; F. Bailbé; O. Bastin; Bonnet; V. Bourden; J. Briquet; R. Bruneteau; J. Bussière; J. Cartouzou; G. Cellier; L. Chapelon; J. Clamens; B. Charles; G. Clément; R. Collomb; M. Courboulay; J. Devisme; J. Dirand; J. Dougados; A. Doutau; A. Dubuc; Épailly; G. Esprit; P. Faucheux; Fauré; G. Février; G. Fouché; Gilly; Guibaud; E. Guicheney; G. Houalet; J. Lacroix; P. Lebrun; H. Le Lan; Le Minous-Trébouta; G. Lempereur; R. Loret; P. Louon; A. Mallens; R. Marchant; Y. Maurice; J. Mazoau; Michem; G. Mouzon; G. N., à Bruxelles; J. Navel; F. Négretzu; R.-D. Pantz; L.-G. Papon; J. Patat; Philizot; M. Pinot; A. Popu; F. Puget; R. Revel; A. Robba; Rosenstock; M. Roy; M. Saint-Juvin; Salomon; J. Schilling; L. Simon; M. Siraud; Ch. Sol; Stoeffler; R. Vallé; N. Vedie; R. Victoir; P. Vidal; R. Weinzaepfel.]

4241. — 1° *Quelle est la condition nécessaire pour qu'une sphère puisse être inscrite dans un cône droit tronqué, de manière à être tangente aux deux bases et à la surface latérale du cône?*

2° *Calculer le rayon* ρ *de cette sphère, connaissant les rayons* R *et* r *des deux bases du cône.*

3° *Trouver le rayon* ρ *par voie de construction.*

4° *Calculer la surface latérale du cône tronqué en fonction de* $R = 18^{cm}$ *et de* $r = 8^{cm}$.

La sphère étant tangente à la surface latérale du tronc de cône le long d'un parallèle, son centre est un point de l'axe du cône; elle touche les plans des deux bases en des points O et O', qui sont les centres de ces bases. Un plan méridien, passant par la droite OO', coupe les plans des bases suivant les diamètres AA' et BB', la surface latérale suivant les génératrices AB et A'B', enfin la sphère suivant le grand cercle OMO'M', inscrit dans le trapèze AA'B'B.

Soit h la hauteur du trapèze : on voit immédiatement que h est un diamètre de la sphère. On a $AM = AO$, et $BM = BO'$, donc $AB = OA + O'B = R + r$, mais d'autre part, en menant AH perpendiculaire sur BB', on forme le triangle rectangle AHB, qui fournit la relation

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2,$$

ou

$$(R + r)^2 = h^2 + (R - r)^2,$$

laquelle devient, après réduction,

$$h^2 = 4Rr;$$

c'est la condition nécessaire et suffisante demandée.

2° Si R et r sont donnés, la relation précédemment établie donne $\rho = \sqrt{Rr}$.

3° Le rayon ρ se construit géométriquement comme moyenne géométrique entre R et r.

4° La surface latérale est égale au produit de la longueur AB par le périmètre de la circonférence que décrit le milieu. Or $AB = R + r$ et la circonférence que décrit le milieu de AB a pour rayon $\frac{1}{2}(R + r)$. La surface a donc pour mesure $\pi(R + r)^2$; elle est égale à celle d'un cercle dont le rayon serait AB : ce résultat remarquable montre que tous les troncs de cône circonscriptibles à une sphère dans les conditions qu'indique l'énoncé ont même surface latérale, si la longueur de l'arête AB reste constante.

Application : de $R = 18$, $r = 8$, on déduit $\rho = \sqrt{8 \times 18} = 12$, et la surface latérale du cône tronqué est $\pi \times \overline{26}^2 = 2\,123^{cm^2},71$.

(R. VALLÉ, école primaire supérieure d'Ambert.)

[Bonnes solutions : MM. V. Bourden; L. Chapelon; B. Charles; G. Clément; R. Collomb; M. Courboulay; P. Faucheux; Gilly; E. Guicheney; G. Houalet; F. Lapeyrère; P. Lebrun; H. Le Lan; P. Louon; Y. Maurice; A. Malléus; Michem; J. Navel; F. Négretzu; L.-G. Papon; J. Patat; E. Paté; Philizot; A. Popu; F. Puget; A. Robba; Rosenstock; M. Roy; M. Saint-Juvin; H. Sebban; Ch. Sol; R. Weinzaepfel.
Assez bonnes solutions : MM. J. Dirand; Ch. Feyrabend; Guimbaud; G. Olivier.]

ARITHMÉTIQUE

4247. — *Calculer à* $\frac{1}{10^5}$ *près la quantité*

$$\frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3} + \sqrt{5}}.$$

N. B. — Plusieurs de nos correspondants paraissent ignorer les principes du calcul approché, ou, si l'on veut, de la théorie des

erreurs : beaucoup commencent leur calcul en disant que pour obtenir un quotient dont cinq décimales sont exactes, il faut en prendre six au numérateur et six au dénominateur. Une telle règle n'a jamais existé, il est facile de voir qu'elle ne repose sur rien, le premier exemple venu la montre en défaut.

Pour évaluer facilement une limite supérieure de l'erreur commise sur un quotient, il est avantageux que le dénominateur soit rationnel. S'il est même possible d'effectuer le calcul de façon que le diviseur soit un entier, ou du moins une quantité exactement connue, le calcul de l'erreur en devient bien plus facile.

C'est ainsi qu'il convenait d'opérer, dans le cas présent.

Multiplions les deux termes du quotient par $1+\sqrt{3}-\sqrt{5}$. On a

$$(1+\sqrt{3}+\sqrt{5})(1+\sqrt{3}-\sqrt{5})=(1+\sqrt{3})^2-5=2\sqrt{3}-1,$$

$$(1-\sqrt{3}+\sqrt{5})(1+\sqrt{3}-\sqrt{5})=1-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$$
$$=1-5-3+2\sqrt{15}=2\sqrt{15}-7,$$

le quotient à calculer est donc

$$\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{15}-7};$$

multiplions encore les deux termes par $2\sqrt{15}+7$; on a

$$(2\sqrt{3}-1)(2\sqrt{15}+7)=12\sqrt{5}-2\sqrt{15}+14\sqrt{3}-7$$

et

$$(2\sqrt{15}-7)(2\sqrt{15}+7)=60-49=11.$$

Le calcul est réduit à celui de

$$\frac{12\sqrt{5}+14\sqrt{3}-2\sqrt{15}-7}{11}.$$

Le dénominateur est connu sans erreur.

On trouve
$$\sqrt{5}=2{,}2360679\ldots,$$
$$\sqrt{3}=1{,}7320508\ldots,$$
$$\sqrt{15}=3{,}8729833\ldots.$$

On peut assurer *a priori*, qu'il suffira de prendre six chiffres décimaux de chaque racine pour obtenir un résultat qui ait l'approximation demandée.

En effet, si l'on commet sur chaque racine une erreur, dont le sens est inconnu *a priori*, mais dont la valeur absolue est inférieure à 10^{-6}, l'erreur commise sur la somme algébrique $12\sqrt{5}+14\sqrt{3}-2\sqrt{5}$ sera certainement inférieure à

$$(12+14+2)\,10^{-6}=28\times10^{-6};$$

l'erreur commise sur le quotient de ce nombre par 11 sera plus petite en valeur absolue que 3×10^{-6}; de plus, on ne conservera que les cinq premiers chiffres du résultat, en forçant d'une unité le cinquième, si le premier chiffre supprimé est 5 ou plus grand que 5. L'erreur ainsi commise restera inférieure en valeur absolue à 5×10^{-6}, la somme $(3+5)\,10^{-6}=8\times10^{-6}$ est plus petite que 10^{-5}.

Telle est l'évaluation *a priori* d'une limite supérieure de l'erreur, mais quand on effectue le calcul, on peut reconnaître que cette limite s'abaisse sensiblement :

prenons

$\sqrt{5}=$	2,236068,	erreur $<10^{-7}$ par excès,
$\sqrt{3}=$	1,732051,	erreur $<2\times10^{-7}$ par excès,
$\sqrt{15}=$	3,872983,	erreur $<34\times10^{-7}$ par défaut,
$12\times\sqrt{5}=$	26,832816,	erreur $<12\times10^{-7}$,
$14\times\sqrt{3}=$	24,248714,	erreur $<28\times10^{-7}$,
$2\times\sqrt{15}=$	7,745966,	erreur $<68\times10^{-7}$;

le dernier nombre étant retranché des deux autres, les erreurs s'ajoutent; leur somme reste inférieure à 108×10^{-7} et l'erreur sur le quotient par 11 sera plus petite que 10×10^{-7} ou que 10^{-6}.

La division à effectuer est celle de 36,335564 par 11, le quotient est 3,3032331.. par excès. En négligeant les chiffres au delà du cinquième, on commet une erreur, par défaut, qui est inférieure à 4×10^{-6} : on peut donc affirmer que le nombre 3,30233 est une valeur approchée de l'expression donnée et que l'erreur n'atteint pas 4 unités du 6e ordre décimal.

(Solution analogue : Y. MAURICE, au Mans.)

[Très bonnes solutions : MM. H. Le Lan; F. Négretzu.
Bonnes solutions : MM. P. Louon; J. Taoudel.
Assez bonnes solutions : MM. F. Bailbé; F. Gilly; R. Marchant; E. Paté; R. Woinzaepfel.]

ALGÈBRE

4243. — *On considère les deux progressions géométriques*

$$\div\, 50 : 100 : 200 : \ldots$$

de raison 2 *et*

$$\div\, 768 : 384 : 192 : \ldots$$

de raison $\frac{1}{2}$; *la somme de x termes de la première et d'un même nombre de termes de la seconde, à partir des premiers, est* 7 874. *Trouver le nombre x de ces termes.*

La somme des x premiers termes de la première progression est

$$S=50(1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{x-1})=50\frac{2^x-1}{2-1}=50(2^x-1).$$

La somme des x premiers termes de la seconde est

$$S'=768\left[1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\right]$$

$$=768\frac{1-\frac{1}{2^x}}{1-\frac{1}{2}}=2\times768\frac{2^x-1}{2^x}.$$

Il faut que $S+S'=7\,874$, cela donne l'équation

$$50(2^x-1)+1\,536\frac{2^x-1}{2^x}=7\,874; \qquad (1)$$

cette équation devient une équation du second degré, si l'on prend pour inconnue $y=2^x$; pour qu'une valeur trouvée pour y soit acceptable, il faut évidemment qu'elle soit positive, entière et qu'elle n'ait pas d'autre facteur premier que 2.

L'équation (1), développée et réduite, devient en faisant le changement de variable indiqué :

$$25y^2-3\,194y-768=0. \qquad (2)$$

On trouve qu'elle a deux racines

$$\frac{1\,597\pm1\,603}{25},$$

dont l'une, étant négative et fractionnaire, doit être écartée; l'autre est $128=2^7$, elle est acceptable.

Le nombre de termes est 7.

(FLOREA NEGRETZU, à Pitesti, Roumanie.)

REMARQUE. — Après avoir trouvé $2^x=128$, il ne fallait pas calculer x par logarithmes, mais s'assurer que 128 est bien une puissance de 2, en décomposant ce nombre en facteurs premiers.

[Bonnes solutions : Mlles Bourreau; Perrier; MM. F. Bailbé; A. Bal; C. Beaujean; P. Bon; Bruneteau; Cartouzou; G. Cellier; Chamfy; Ch. Chasselut; J. Clamens; Darras; G. Démaret; J. Devisme; J. Dirand; Ch. Feyrabend; G. Fouché; F. Gilly; E. Guicheney; R. Guiot; F. Lapeyrère; Lascoux; J. Lassave; H. Le Lan; P. Lebrun; R. Loret; H.-C. Lotard-Doazan; P. Louon; R. Marchant; G. Mathiot; L. Messan; Michem; J. Millour; G. N., à Bruxelles; G. Olivier; L.-G. Papon; E. Passebois; J. Patat; E. Paté; L. Piette; Philizot; A. Popu; F. Puget; Revardeaux; A. Robba; Robineau; Rosenstock; M. Roy J. Sambussy; J. Schilling; H. Sebban; G. Vimbert; R. Weinzaepfel.]

GÉOMÉTRIE

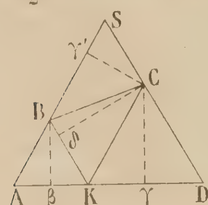
4217. — *Un terrain* ABCD *est formé de trois parcelles :* ABK, *triangle équilatéral de côté* a, CKD *triangle équilatéral de côté* b *et* BCK.

On demande d'évaluer en fonction de a *et* b *le périmètre et la surface du quadrilatère* ABCD.

Le propriétaire ayant fait l'acquisition de la parcelle SBC *obtenue par le prolongement de* AB *et de* CD, *quels sont le périmètre et la surface de* SAD?

(*B. S., Lozère, aspirants, mars* 1920.)

Si un triangle rectangle a un angle de 30°, l'autre angle aigu est de 60°; ce triangle PQR est la moitié d'un triangle équilatéral PQR'; si a est l'hypoténuse, le côté opposé à l'angle de 30° est $\frac{1}{2}a$, et le côté opposé à l'angle de 60° est $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.



On a d'abord

$$AD = AK + KD = a + b,$$
$$AB = a, \qquad DC = b,$$

puis

$$\overline{BC}^2 = \overline{KB}^2 + \overline{KC}^2 - 2KB \times K\delta$$
$$= \overline{KB}^2 + \overline{KC}^2 - KB.KC,$$

car si δ est la projection de C sur BK, d'après ce qui a été rappelé ci-dessus, $K\delta = \frac{1}{2}KC$.

Le périmètre demandé est donc

$$2(a+b) + \sqrt{a^2 + b^2 - ab}.$$

La surface est la somme de celles des triangles ABK, KCD et BKC, donc

$$\frac{1}{2}a.a\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}b.\frac{b\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}BK \times C\delta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2) + \frac{\sqrt{3}}{4}ba = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 + ba).$$

Si l'on prolonge jusqu'en S les côtés AB et CD, le périmètre devient $3(a+b)$ et la surface $(a+b)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$.

(J. PIERDET, école primaire supérieure de Nevers.)

[Bonnes solutions : Mlle G. David; MM. H. Aubert; J. Barré; H. Baumbach; Bertrand; G. Bitaine; R. Bonhomme; A. Bordes; A. Bougrier; J. Briquet; J. Bugnard; Carthieux; J. Cartouzou; Ch. Caussin; R. Cazin; Cerisier; Chapelon; B. Charles; R. Chasselut; A. Chatelier; M. Chatelier; A. Cieutat; G. Clement; R. Cluzaud; G. Commune; P. Cornuéjols; M. Courboulay; Crosse; P. Cuillier; J. Devisme; J. Debray; P. Dolin; Dougados; A. Doutau; G. Duzoux; Epailly; A. Eparvier; Fagnot; P. Faucheux; Feyrabend; L. Fisce; Forait; G. Fouché; Gabay; Geffroy-Le Jan; H. Gros; Gilly; Got; Gozard; Y. Guezelle; E. Guicheney; G. Guibaud; Guilhot; Guitton; M. Hambert; Hasse; R. Henin; Jumeau; Kipfer; G. Knoll; Lamboley; F. Lapeyrère; P. Larroque; Legrand; Lhoumeau; J. Lorriot; L. Louis; P. Louon; R. Marchant; A. Martin; J. Martin; Y. Maurice; Ménéchal; P. Mérard; R. Morel; F. Negrétzu; Ch. Noël; G. Olivier; C. Pagès; J. Patat; Périgault; Pichereau; E. Pinlong; A. Popu; M. Potez; F. R., à Ajaccio; P. Rabilloud; R. Revel; Robba; Robineau; Rosec; Roset; J. Schilling; M. Siraud; J. Tarnus; J. Tesquet; G. Tilly; P. Trompier; R. Troy; Truong-Van-Cam; N. Vedie; Ch. Vouilloux; Voyer; A. Wehrung; R. Weinzaepfel.

Assez bonnes solutions : MM. J. Cherpin; J. Clément; Ch. Dubost; Norgelet; L.-G. Papon; R. Vallé.

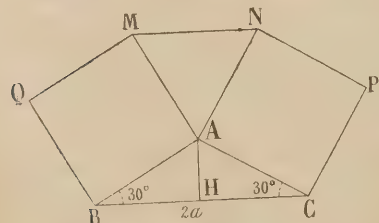
4220. — *On donne un triangle isocèle* ABC *où* BC $= 2a$ *et les angles égaux* B *et* C *valent* 30°.

Sur les côtés AB *et* AC *on construit des carrés.*

1° *Calculer* MN *en fonction de* a.

2° *Calculer la surface* MNPCBQ *en fonction de* a.

Calcul numérique : $a = 5^{cm}$.



(*B. S., Loire-Inférieure, aspirants, mars* 1920.)

L'angle BAC vaut 120°, donc $MAN = 360° - 2 \times 90° - 120° = 60°$ le triangle MAN, qui a un angle de 60° compris entre côtés égaux, est équilatéral : $MN = MA = AB$.

La hauteur du triangle BAC est la moitié de AB; on sait que si un triangle rectangle a un angle aigu de 30°, l'autre étant par conséquent de 60°, le plus petit côté est la moitié de l'hypoténuse.

On a donc $\overline{AB}^2 = 4\overline{AH}^2$ et $\overline{BH}^2 = a^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AH}^2 = 3\overline{AH}^2$; il en résulte $AB = MN = \frac{2a}{\sqrt{3}}$; si $a = 5$, $MN = 5{,}7735$.

2° Le carré de côté AB a pour surface $\overline{AB}^2 = \frac{4}{3}a^2$, les deux triangles ABC et AMN sont équivalents, la distance de C à BA étant égale à celle de A à MN, car l'angle extérieur en A du triangle ABC est de 60° : donc la surface de l'hexagone considéré est le double de celle de la figure BANMQ, soit

$$2\overline{AB}^2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 2\frac{4a^2}{3}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = a^2\left(\frac{8 + 2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Si l'on suppose $a = 5$, cela donne $S = 3^{m^2},8213 \times 25 = 95^{m^2},53$.

(ROLAND LORET, école normale d'instituteurs, Chartres.)

[Bonnes solutions : Mlle F. Negrétzu; MM. J. Barbot; G. Bitaine; R. Bonhomme; A. Bordes; J. Briquet; J. Bugnard; U. Cerisier; L. Chapelon; J. Clément; R. Chasselut; A. Chatelier; A Cieutat; G. Clément; P. Cornuéjols; M. Courboulay; J. Devisme; Ch. Dubort; P. Dujoux; P. Edouard; E. Epailly; A. Fagnot; Gabay; Gaillard; L. Garnier; F. Gilly; E. Goepp; A. Got; G. Gozard; Guicheney; R. Guilbert; A. Guilhot; M. Hambert; A. Haudrechy; V. Kyndt; A. Lamboley; L. Louis; P. Louon; R. Marchant; P. Mérard; L. Messan; Nidiau; Ch. Norgelet; G. Olivier; C. Pagès; J. Patat; E. Paté; M. Pichereau; A. Popu; M. Maurel; L.-G. Papon; Pierdet; E. Pinlong; M. Robineau; Saint-Juvin; J. Schilling; Siberchicot; J. Tarnus; Taxil; G. Thiébaux; Trompier; G. Vaillant; Ch. Vouilloux; A. Wehrung; R. Weinzaepfel.

Assez bonnes solutions : Mlle G. David; MM. H. Aubert; M. Aubert; V. Bourden; Bordron; G. Breton; Bruneteau; Cartouzou; J. Clamens; R. Clément; Cluzaud; P. Crosse; P. Cuillier; Devaujany; P. Dolin; J. Dougados; A. Doutau; R. Dupas; A. Eparvier; P. Faucheux; Ch. Feyrabend; Geffroy-Le Jan; L. Gilton; V. Goudeau; Gros; L. Guillet; Guitton; R. Henrion; R. Legrand; Loriot; J. Martin; Y. Maurice; Ménéchal; J. Navel; Ch. Noël; Potez; Rabilloud; Rosec; Roset; Salomon; G. Tilly.]

4229. — *Soit* AB *un diamètre d'un cercle fixe,* Bx *la tangente au point* B. *La tangente en un point* M *du cercle rencontre* Bx *en* T; *déterminer* M *de façon que l'arc* BM *et la tangente* BT *engendrent des aires égales en tournant autour de* AB.

L'arc BM engendre l'aire d'une calotte sphérique, qui est égale à celle d'un cercle dont le rayon est la corde BM de l'arc.

Le point M doit donc être tel que la corde BM soit égale à BT; mais comme $TB = TM$, il en résulte que le triangle isocèle MTB doit être équilatéral et que l'angle MBT doit être égal à 60°.

L'aire engendrée par BT est alors $3\pi a^2$.

(JEAN MAZEAU, à Montluçon.)

Remarque. — En prenant pour inconnue BH, projection de BM sur BA, on trouve $BH = \frac{3R}{2}$, ce qui signifie que H est le milieu de AO.

[Bonnes solutions : MM. A. F.; J. Barbot; A. Bougnier; Breuzard; R. Bruneteau; J. Bugnard; J. Cartouzou; G. Cellier; E. Chantrelle; L. Chapelon; R. Chasselut; A. Cieutat; G. Démaret; J. Dirand; J. Devisme; H. Forait; Gabay; Geoffroy-Le-Jan; E. Guicheney; M. Jérôme; G. Knoll; R. Loret; P. Louon; L. P. C.; A. Malléus; R. Marchant; J. Moirez; F. Negrétzu; C. Noël; L.-G. Papon; J. Patat; E. Paté; J. Périgault; M. Pichereau; Pierdet; A. Popu; R. Reynard; A. Robba; J. Rosec; M. Roy; M. Saint-Juvin; J. Schilling; H. Sebban; Sigaud-Ovide; A. Tabary; R. Vallé; Van Eygen; G. Vimbert; E. Voyle; R. Weinzaepfel.]

4242. — *Une table ronde a* $1^m,20$ *de diamètre : deux segments de cette table se rabattent verticalement sur les côtés, les charnières étant deux lignes symétriques par rapport au centre. Calculer la surface de la partie ainsi réduite, sachant qu'elle a* $0^m,60$ *de largeur.*

(*Brevet de l'enseignement primaire supérieur, Dijon*, 1920.)

Le rayon du cercle est 60^{cm} et la distance de la charnière AB au centre est la moitié de celle d'une charnière à l'autre, c'est donc 30^{cm} : les charnières sont donc des cordes perpendiculaires aux rayons OC et OD en leurs milieux : elles sont les côtés de triangles équilatéraux inscrits, ABD et A'CB'.

Soit T l'aire d'un triangle équilatéral inscrit; πR^2 celle du cercle, l'aire du segment ACB est le tiers de la différence $\pi R^2 - T$, l'aire de la partie AA'B'B est donc

$$\pi R^2 - \frac{2}{3}(\pi R^2 - T) = \frac{1}{3}\pi R^2 + \frac{2}{3}T.$$

Or $$T = \frac{1}{2}(AB \times HD) = \frac{1}{2}R\sqrt{3} \times \frac{3}{2}R = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

L'aire demandée a donc pour mesure

$$60^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

prenant $\pi = 3,1416$, on a $\frac{\pi}{3} = 1,0472$,

$\sqrt{3} = 1,7320$, on a $\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,8660$,

et l'on trouve $S = 6\,887^{cm^2},5$.

(Joseph PUGET, école normale de Bouzaréa.)

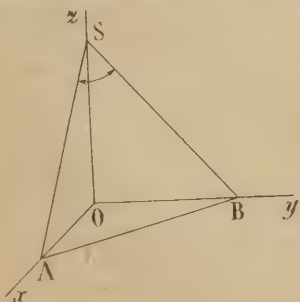
N. B. — La signification du résultat ne comporte même pas une précision du centimètre carré : pour que l'on puisse affirmer que la surface d'un cercle de 60^{cm} de rayon est déterminée à 1^{cm^2} près, il faut que l'erreur sur le rayon soit inférieure à la 380e partie d'un centimètre. Le rayon d'une table n'est pas défini avec une aussi grande précision. Il suffisait donc largement de donner comme réponse 6 887 ou $6\,888^{cm^2}$. Mais il fallait conduire le calcul de façon à être certain de l'exactitude de ces quatre chiffres.

[Bonnes solutions : Mlle M. Bourreau; MM. H. Aubert; F. Bailbé; J. Barbot; C. Beaujean; P. Bondoux; A. Bordes; J. Bouchet; V. Bauden; J. Briquet; J. Bussière; B. Charles; J. Clamens; G. Clément; R. Collomb; M. Courboulay; J. Devisme; A. Dubuc; G. Fouché; E. Guicheney; R. Guiot; G. Houalet; Kaichinger; H. Le Lan; R. Loret; H.-C. Lotard-Doazan; P. Louon; R. Marchant; Y. Maurice; J. Mazeau; Michen; G. Mouzon; J. Navel; F. Négretzu; G. Olivier; L.-G. Papon; J. Patat; E. Pierdet; E. Piette; A. Popu; Rabelle; M. Robineau; M. Roy; J. Schilling; L. Simon; Stoeffer; R. Vallé; N. Vedie; R. Victoir; G. Vimbert.

Assez bonnes solutions : Mlle Perrier; MM. J. Barzé; J. Cartouzou; S. Davin; M. Ducluseau; J. Follet; J. Lacroix; F. Langrand; P. Lebrun; F. Lapeyrère; T. Le Hir; A. Robba; Rosenstock; A. Vaux; M. Vetter; R. Weinzaepfel.]

4245. — *Soit* $O(xyz)$ *un trièdre trirectangle en* O, S *un point donné sur* Oz, A *un point variable sur* Ox, B *un autre point sur* Oy, *tels que l'angle* ASB *soit constant; montrer que la surface* ABS *est aussi constante.*

Lorsqu'un trièdre $O(xyz)$, trirectangle en O, est coupé par un plan qui détermine un triangle ASB, le carré de l'aire du triangle ASB est égal à la somme des carrés des faces BOS, SOA, AOB. Si l'aire de la face ASB est constante et égale à S, on a, en appelant h la longueur OS, hauteur commune des triangles AOS et BOS,



$$h^2\overline{OA}^2 + h^2\overline{OB}^2 + \overline{OA}^2 \times \overline{OB}^2 = 4S^2,$$

et cette équation peut s'écrire, en ajoutant h^4 aux deux membres,

$$(h^2 + \overline{OA}^2)(h^2 + \overline{OB}^2) = 4S^2 + h^4,$$

ou enfin

$$\overline{SA}^2 \times \overline{SB}^2 = 4S^2 + h^4.$$

On voit donc que si la surface ASB est constante, cela entraîne que le produit des côtés SA et SB est constant.

Or on sait que la surface d'un triangle est égale à la moitié du produit des longueurs de deux côtés par un facteur qui ne dépend que de l'angle de ces côtés. (Ce facteur est la fonction qu'on appelle en trigonométrie le *sinus* de l'angle.)

Le calcul précédent montre donc que la surface du triangle et le *sinus* de l'angle ASB sont liés par une relation; cela entraîne que si l'une de ces quantités est constante, l'autre l'est aussi.

(G. MOUZON, à Chasseneuil.)

On peut présenter la démonstration sous une forme un peu différente, en employant les notations les plus élémentaires de la trigonométrie.

Soit θ l'angle ASB; on sait que

$$\overline{AB}^2 = \overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 - 2SA \times SB.\cos\theta; \qquad (1)$$

or

$$\overline{SA}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OS}^2 \quad \text{et} \quad \overline{SB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OS}^2,$$

l'équation (1) donne alors

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + 2\overline{OS}^2 - 2SA.SB.\cos\theta,$$

et puisque $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$, cette relation devient

$$\overline{OS}^2 = SA.SB.\cos\theta; \qquad (2)$$

d'autre part la surface du triangle ASB est

$$S = \frac{1}{2}SA.SB.\sin\theta. \qquad (3)$$

En divisant membre à membre les équations (2) et (3), on obtient la relation

$$2S = h^2.\operatorname{tg}\theta;$$

elle montre que les deux grandeurs S et θ sont fonction l'une de l'autre; si l'une d'elles reste invariable, l'autre l'est aussi.

(Marcel ROY, collège de Clamecy.)

[Bonnes solutions : Mlles M. Bourreau; Perrier; MM. F. Bailbé; A. Bal; C. Beaujean; P. Bondoux; R. Bruneteau; J. Cartouzou; G. Cellier; Chamfy; R. Chasselut; J. Clamens; Darras; G. Démaret; J. Devisme; J. Dirand; Ch. Feyrabend; G. Fouché; F.-A. Gilly; E. Guicheney; R. Guiot; F. Lapeyrère; M. Lascoux; J. Lassave; H. Le Lan; P. Lebrun; R. Loret; H.-C. Lotard-Doazan; P. Louon; R. Marchant; G. Mathiot; L. Messan; Michem; J. Millour; G. N., à Bruxelles; G. Olivier; L.-G. Papon; E. Passebois; J. Patat; E. Paté; L. Piette; Philizot; A. Popu; F. Puget; Revardeaux; A. Robba; M. Robineau; Rosenstock; M. Roy; J. Sambussy; J. Schilling; H. Sebban; G. Vimbert; R. Weinzaepfel.]

4246. — *Soit le triangle* ABC. *Sur chacun des côtés on construit, extérieurement au triangle, un triangle équilatéral et on joint le sommet de chacun de ces triangles au sommet opposé du triangle primitif.*

On demande de démontrer :

1° *Que les trois droites ainsi construites sont égales entre elles;*

2° *Qu'elles se coupent en un même point.*

1° Les triangles CBC' et A'BA sont égaux et superposables par une rotation de 60° autour de B : les angles A'BC et ABC' sont en effet, par hypothèse, égaux et de même sens; de plus A'B = CB et AB = BC'. Il en résulte que CC' et AA', qui peuvent coïncider par cette rotation, sont égaux.

2° On sait que la rotation des figures planes a la propriété suivante : deux points homologues, tels que A' et C, le centre de la rotation, B, et le point I où concourent deux droites homologues

menées par les deux points homologues, telles que A'A et CC', appartiennent à un cercle. Il résulte de ce théorème que A', C, I et B sont quatre points d'un cercle, ainsi que A, C', B et I.

Le point de rencontre de AA' et de CC' est donc le point de CC', autre que C', qui est sur le cercle AC'B.

Le même théorème peut être appliqué aux figures C'AC et BAB', qu'une rotation de 60° autour de A amène en coïncidence. Le

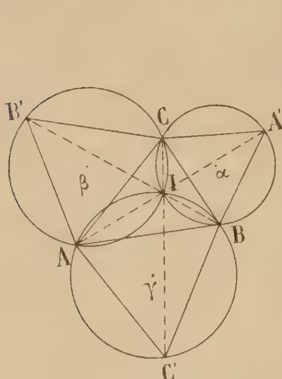


Fig. 1.

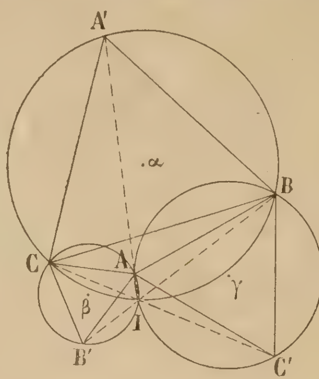


Fig. 2.

point de rencontre de BB' avec CC' est le point, autre que C', où CC' coupe le cercle AC'B. Ce point est donc le même que celui où CC' coupe AA'.

Remarque. — Le point I appartient à des cercles capables de 60° ou de 120° décrits sur les côtés du triangle comme cordes : il en résulte que, s'il est intérieur au triangle, les angles AIB, BIC, CIA sont tous les trois égaux à 120°, et que les lignes IA, IB, IC sont les bissectrices de ces angles.

Mais, quand le triangle ABC a un angle supérieur à 120°, le point I est extérieur au triangle, l'angle CIB est de 120°, les deux autres, CIA et AIB, sont de 60°.

En raison de la différence de position des deux figures, les démonstrations fondées sur des mesures d'angles ne sont pas très satisfaisantes; il faudrait prouver que la disposition de la figure sur laquelle on raisonne est possible, chercher ensuite toutes les dispositions différentes qui peuvent se présenter.

(Solution analogue : R. MARCHANT, athénée d'Anvers.)

[Bonnes solutions : Mlle M. Koch; MM. H. Aubert; F. Bailbé; P. Bondoux; Bonnet; L. Chapelon; R. Chasselut; G. Clément; M. Courboulay; J. Devisme; L. Exbrayat; P. Faucheux; Gilly; H. Le Lan; R. Legrand; P. Louon; R. Marchant; Y. Maurice; J. Millour; R. Morel; F. Négretzu; Ch. Norgelet; L.-G. Papon; A. Popu; A. Robba; M. Roy; H. Sebban; Ch. Sol; J. T., au Caire; R. Vallé; N. Vedie; M. Vetter.]

SOLUTIONS D'EXERCICES

4210. — *Trouver la vraie valeur de*

$$y = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$$

pour $x = 1$.

Pour $x = 1$, cette fraction ne peut être calculée, parce que le numérateur et le dénominateur sont nuls; mais multiplions les deux termes par la somme $\sqrt{x+3}+2$, qui n'est pas nulle pour $x = +1$, on a

$$y = \frac{x+3-4}{(x-1)[\sqrt{x+3}+2]} = \frac{x-1}{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+3}+2};$$

le numérateur est $x-1$: on était certain *a priori* que ce numérateur, qui est un polynome en x, serait divisible par $(x-1)$, car il s'annule pour $x = +1$, étant le produit de deux facteurs, $\sqrt{x+3}-2$ et $\sqrt{x+3}+2$, dont l'un est nul pour $x = 1$. En divisant par $(x-1)$ les deux termes de y, on trouve

$$y = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2};$$

pour $x = 1$ cette forme de la quantité y n'est pas indéterminée, et l'on trouve $y = \frac{1}{4}$.

4211. — *Résoudre l'équation*

$$\sqrt{7x-13} - \sqrt{3x-19} = \sqrt{5x-27}.$$

Écrivons l'équation

$$\sqrt{7x-13} = \sqrt{3x-19} + \sqrt{5x-27}; \qquad (1)$$

les deux membres sont positifs, l'équation est équivalente à celle que l'on obtient en écrivant que les carrés sont égaux :

$$7x - 13 = 3x - 19 + 5x - 27 + 2\sqrt{(3x-19)(5x-27)},$$

ce qui donne, après réduction des termes semblables,

$$33 - x = 2\sqrt{(3x-19)(5x-27)}; \qquad (2)$$

cette équation n'est possible que si $x < 33$; faisons cette hypothèse, puis égalons les carrés des deux membres; l'équation rationnelle entière que nous obtenons se réduit à

$$59x^2 - 638x + 963 = 0,$$

ses racines sont rationnelles; ce sont

$$x_1 = \frac{319+212}{59} = \frac{531}{59} = 9 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{319-212}{59} = \frac{107}{59}.$$

La première convient bien à l'équation proposée, car elle est inférieure à 33 et rend positives les quantités sous les radicaux. La seconde est bien inférieure à 33, mais elle rend négatives les binomes sous les radicaux. On peut remarquer cependant que

$$7x_2 - 13 = -\frac{2}{59}\times 9,\quad 3x_2 - 19 = -\frac{2}{59}\times 400,\quad 5x_2 - 27 = -\frac{2}{59}\times 529,$$

et l'on a l'égalité

$$\sqrt{9} + \sqrt{400} = \sqrt{529}$$

ou

$$3 + 20 = 23.$$

Il est facile de vérifier que l'autre racine convient bien (ce dont nous sommes certains d'avance, puisqu'elle satisfait aux conditions nécessaires et suffisantes) : on trouve en effet

$$7\times 9 - 13 = 50 = 2\times 25,$$
$$3\times 9 - 19 = 8 = 2\times 4,$$
$$5\times 9 - 27 = 18 = 2\times 9,$$

et l'on a bien

$$\sqrt{25} = \sqrt{4} + \sqrt{9}.$$

4212. — *Si deux nombres sont chacun une somme de deux carrés, leur produit est aussi une somme de deux carrés.*

Cette propriété est une conséquence immédiate de l'identité, facile à vérifier,

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2) = (aa'+bb')^2 + (ab'-ba')^2;$$

elle prouve une intéressante propriété des nombres. Un théorème célèbre (qu'on appelle théorème de Bachet) dit que tout entier peut être mis sous forme d'une somme de quatre carrés : mais certains entiers sont somme de deux ou de trois carrés seulement. Le théorème précédent permet donc d'affirmer que le produit de deux nombres de la première catégorie est un nombre de la même catégorie ou du même ensemble.

Ainsi

$$29 = 25 + 4, \qquad (a = 5, \quad b = 2)$$
$$13 = 9 + 4, \qquad (a' = 3, \quad b' = 2)$$
$$29 \times 13 = 377 = 361 + 16 = 19^2 + 4^2;$$

en effet

$$aa' = 15, \quad bb' = 4, \quad aa' + bb' = 19;$$
$$ab' = 10, \quad a'b = 6, \quad ab' - ba' = 4.$$

4213. — *Résoudre l'inégalité*

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} > \sqrt{2x-5}.$$

Considérons les quatre quantités

$$A = \sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5},$$
$$B = \sqrt{x+6} + \sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5},$$
$$C = \sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5},$$
$$D = \sqrt{x+6} + \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5},$$

dont la dernière est évidemment positive; formons les produits AC et BD,

$$BD = x + 6 + x + 1 + 2\sqrt{(x+6)(x+1)} - 2x + 5$$
$$= 2[6 + \sqrt{(x+6)(x+1)}],$$

ce produit est donc positif, quel que soit x $\left(\text{supérieur à } \frac{5}{2}\right)$.

Le produit AC se forme en changeant le signe du radical :

$$AC = 2[6 - \sqrt{(x+6)(x+1)}];$$

le signe de AC est celui du produit ABCD, qui est rationnel :

$$ABCD = 4[36 - (x+6)(x+1)] = 4(30 - 7x - x^2);$$

le trinome entre crochets a pour racines -10 et $+3$; il est donc identique à

$$(10+x)(3-x),$$

le premier facteur est positif, puisque nous ne pouvons donner à x que des valeurs supérieures à $\frac{5}{2}$, il en résulte que le produit ABCD, et par conséquent AC, a le signe de $3 - x$.

D'autre part, il est évident que le facteur C est supérieur à A, puisque la différence $C - A = +2\sqrt{2x-5}$ est positive.

Donc, lorsque $AC < 0$, c'est A qui est négatif et C qui est positif. Quand le produit AC est positif, A et C ont même signe : or la somme $A + C$ est $2[\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1}]$, elle est positive, car le premier radical est supérieur au second : donc quand $AC > 0$, A et C sont positifs.

En résumé : si $\frac{5}{2} < x < 3$,

$AC > 0$, A et C sont positifs;

si $3 < x$,

$AC < 0$, donc $A < 0$, $C > 0$;

l'inégalité proposée est donc vérifiée par les valeurs de x comprises entre $\frac{5}{2}$ et 3; pour $x = 3$, les deux membres sont égaux.

EXAMENS ET CONCOURS DE 1920 (*Suite.*)

Concours d'admission au grade de GÉOMÈTRE-ADJOINT AU SERVICE DU PLAN DE PARIS

Arithmétique.

I. — Un propriétaire achète à crédit, à raison de 54 000f l'hectare deux terrains dont le second a la moitié de la contenance du premier, moins 3a,27ca. Au bout de 15 mois, il paie, prix d'achat et intérêts à 6 % compris, 87 945f.

On demande la superficie de ces deux terrains.

II. — Une personne a signé douze billets de 400f chacun, payables mensuellement à partir du 1er janvier 1921. Elle veut acquitter sa dette en totalité le 21 juin 1921. Quelle somme devra-t-elle verser si on lui tient compte des intérêts à 7 %?

III. — Une personne place chaque année, au taux de 6 % et à intérêts composés, une somme de 500f; quel sera le capital constitué un an après le cinquième versement? Quelle somme aurait-il fallu placer chaque année à intérêts simples pour constituer le même capital dans le même délai, le taux des intérêts étant encore de 6 %?

Géométrie.

I. — Construire un triangle connaissant les trois médianes.

II. — Un angle a son sommet à l'intérieur d'une circonférence. Tracer une autre circonférence tangente aux deux côtés de l'angle et tangente extérieurement à la première circonférence.

III. — Construire une parabole, connaissant deux tangentes et les points de contact.

EXAMENS ET CONCOURS DE 1921

Concours d'admission au grade de COMMIS-DESSINATEUR DE LA VILLE DE PARIS

Arithmétique.

I. — Une personne va au marché. Elle dépense pour son 1er achat $\frac{1}{5}$ de son avoir, puis, pour un 2e achat, $\frac{1}{6}$ de ce qui lui reste. Le 3e achat est égal à ce qui lui reste et le marchand lui fait sur ce dernier achat une remise de 3,5 %. Elle rentre chez elle avec 3f,85. Quel était le montant de son avoir?

II. — Deux rentiers placent leur argent, l'un à 5 %, l'autre à 6,50 %. Le 1er a un capital de 57 340f de moins que le second et le second a un revenu annuel de 5 607f,80 de plus que le 1er. Trouver le montant des deux capitaux.

Géométrie.

I. — **4282.** Décrire une circonférence passant à égale distance de quatre points donnés A, B, C, D, non en ligne droite.

II. — Une cuvette qui a la forme d'un tronc de cône a pour diamètre supérieur 227mm et pour diamètre inférieur 13cm, le talus est égal à 9cm. Trouver la contenance de cette cuvette.

EXAMEN DES BOURSES DES LYCÉES ET COLLÈGES DE JEUNES FILLES

1re Série.

I. — Un négociant a acheté 45m de velours de laine pour 1 912f,50. Il en revend le $\frac{1}{3}$ à 47f,25 le mètre, les $\frac{2}{5}$ à 49f,50 et le reste à 48f. Combien a-t-il gagné en tout et combien % sur le prix d'achat?

II. — Une cuisinière, qui voulait acheter 5kg de viande fraîche, calcule qu'en prenant de la viande frigorifiée qui coûte 4f de moins par kilogramme, elle en aura 2kg de plus. Dites combien coûte le kilogramme de chaque viande.

(*Durée : 1 heure.*)

2e Série.

I. — Un tramway part de la station avec un certain nombre de voyageurs. Il en laisse le $\frac{1}{4}$ au premier arrêt; il prend ensuite 30 personnes au second arrêt. Enfin après avoir déposé en route les $\frac{5}{8}$ de ses voyageurs, il arrive à la station finale avec 27 voyageurs. Quel était le nombre des voyageurs au départ?

II. — Combien y a-t-il de nombres d'*un chiffre*, de *deux chiffres*, de *trois chiffres*?

On écrit tous les nombres d'un et deux chiffres. Combien a-t-on écrit de chiffres?

Même question si l'on écrit tous les nombres d'un, deux, trois chiffres.

Pour numéroter les pages d'un livre, on a employé 864 chiffres. Combien le livre a-t-il de pages?

(*Durée : 1 heure 1/2.*)

3e Série.

I. — Une marchande d'oranges vend les $\frac{4}{7}$ de ses oranges plus 15 oranges à un premier acheteur; elle vend ensuite les $\frac{4}{5}$ du reste plus 15 oranges à un deuxième acheteur. Après ces deux ventes, il ne lui reste plus d'oranges. Combien en avait-elle?

II. — Expliquer comment on calcule le reste de la division d'un nombre entier par 4 ou 25.

Par quel chiffre peut-on remplacer a dans le nombre $14a6$ pour que ce nombre soit divisible par 4?

Par quel chiffre peut-on remplacer a dans le nombre $278a$:

1° Pour que ce nombre soit divisible par 5;

2° Pour que ce nombre soit divisible par 2 sans être divisible par 4.

Un tel nombre peut-il être divisible par 25? Peut-on remplacer a par un chiffre de façon que le reste de la division du nombre par 25 soit 12? (*Durée : 1 heure 1/2.*)

4ᵉ Série.

I. — Soit une droite xy et un point A extérieur à cette droite.

1° Trouver un point A′ tel que tout point M de xy soit équidistant de A et A′.

2° Soient deux points A, B d'un même côté de xy. Trouver la plus courte des lignes brisées AMB qui vont de A en B, le point M étant sur xy. (Pour cette dernière question, on remplacera le point A par le point A′ trouvé précédemment.)

II. — Principe d'Archimède. — Corps flottants. (*Durée : 1 heure 1/2.*)

5ᵉ Série.

I. — Soient deux circonférences de centres O et O′, de rayons R et R′, $(R > R')$, $OO' = d$.

On mène deux rayons OM, O′M′ parallèles et de même sens. La droite MM′ qui joint leurs extrémités rencontre le prolongement de la ligne des centres au point S.

Calculer SO, SO′, au moyen de d, R, R′.

Quelle relation doit-il y avoir entre la distance des centres d et les deux rayons pour que le point S soit extérieur aux deux circonférences?

Cette condition étant réalisée, on mène du point S une tangente à l'une des circonférences; conclure de ce qui précède qu'elle est tangente commune extérieure aux deux circonférences. Quel est le nombre des tangentes communes extérieures?

II. — Lois de la réflexion de la lumière. Miroirs plans. (*Durée : 1 heure 1/2.*)

EXAMEN DES BOURSES DES LYCÉES ET COLLÈGES DE GARÇONS

1ʳᵉ Série. — Division A et Division B.

I. — Pour sa provision d'hiver, un propriétaire a acheté 1 250^{kg} d'anthracite, 850^{kg} de boulets et 750^{kg} de briquettes. Le prix de la tonne de chaque combustible est de 340^f pour l'anthracite, 270^f pour les boulets et 280^f pour les briquettes, à quoi il faut ajouter 0^f,20 par sac de 50^{kg} pour la descente en cave. A combien revient cette provision, tous frais compris?

II. — Une maison et un jardin valent ensemble 26 240^f. La maison vaut 7 fois plus que le jardin. Dites le prix de la maison et le prix du jardin. (*Durée : 1 heure 1/2.*)

2ᵉ Série. — Division A et Division B.

I. — Un propriétaire achète, à raison de 8 000^f l'hectare, une vigne de forme rectangulaire ayant 246^m de longueur sur 140^m de largeur, et dans laquelle les ceps sont espacés de 0^m,75 dans le sens de la longueur du terrain et de 1^m,25 dans le sens de la largeur. Une année, chaque cep a rapporté 0^l,55 de vin, qui a été vendu au prix moyen de 120^f l'hectolitre. Les frais divers absorbent les $\frac{2}{5}$ du produit annuel. Calculer : 1° le produit net de la vigne; 2° le taux auquel le propriétaire a placé son argent en achetant cette vigne.

II. — On met deux poids, dont l'un est double de l'autre, dans les plateaux d'une balance. Si l'on ajoute d'un côté 310^f en monnaie d'argent, et de l'autre 310^f en monnaie d'or, l'équilibre est rétabli. Quels sont ces deux poids? (*Durée : 1 heure 1/2.*)

6ᵉ Série. — Section C.

I. — **4283**. Dans un triangle ABC rectangle en A la bissectrice intérieure de l'angle droit coupe l'hypoténuse en D; par ce point on mène à l'hypoténuse BC une perpendiculaire qui coupe AC ou son prolongement au point E. Démontrer que DE = BD.

On examinera les deux cas de figure : 1° E sur le côté AC lui-même; 2° sur le prolongement de AC.

II. — Remplacer par un produit de quatre facteurs l'expression

$$(9a^2 + 4b^2 - c^2)^2 - 144a^2b^2.$$

(*Durée : 2 heures.*)

6ᵉ Série. — Section D.

4284. — On considère un angle droit xOy; deux segments de droite AB et CD ont leurs extrémités A et C sur Ox, leurs extrémités B et D sur Oy, les angles OAB et ODC étant égaux. On donne $AB = p$, $CD = q$, et on pose

$$OA = x, \quad OB = y, \quad OC = z, \quad OD = t.$$

1° Faire voir que, si l'on se donne x, les quantités y, z, t sont déterminées; il en résulte que les quatre quantités x, y, z, t sont liées par trois relations distinctes. Établir ces trois relations, dont l'une est $xz = yt$.

2° Soit M le milieu de AC, N le milieu de BD, I le point de rencontre des perpendiculaires menées en M à AC, en N à BD. Évaluer OM et AM, ON et BN en fonction de x, y, z, t. En déduire les expressions des quantités $\overline{IA}^2$ et $\overline{IB}^2$ qui se trouvent dépendre uniquement des longueurs p et q, et montrer que les quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle, dont le rayon R est donné par la formule

$$4R^2 = p^2 + q^2. \tag{1}$$

3° En supposant, pour fixer les idées, $OA < OC$, $OB < OD$, faire voir sans calcul que les quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle (C). Si CED est l'arc d'extrémités C et D qui ne contient pas les points A et B, si AFB est l'arc d'extrémités A et B qui ne contient pas les points C et D, évaluer (en mesurant l'angle droit xOy) la différence de ces deux arcs et établir par ce moyen la formule (1). (*Durée : 2 heures.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4285. — Une personne a préparé deux sirops de sucre qu'elle n'a pu utiliser, le premier en dissolvant 600^g de sucre dans 5^{dl},5 d'eau, le second dans 600^g d'eau. Elle se trouve avoir besoin d'un sirop contenant 55 % de son poids de sucre. Elle fait donc évaporer le second dans une bassine cylindrique de 25^{cm} de diamètre jusqu'à ce que, mélangé au premier, elle obtienne le sirop désiré. On demande quel abaissement de niveau dans la bassine elle devra produire par évaporation.

(*B. S., Alger, aspirantes, octobre* 1920.)

4286. — Trois effets de même échéance sont présentés à l'escompte. La valeur nominale du 1ᵉʳ est égale à celle du second diminuée de 972^f; il est escompté au taux 5 %. La valeur nominale du 3ᵉ surpasse celle du second de 4 860^f. Il est escompté au taux 3 %. Les escomptes de ces trois billets sont égaux et leur valeur est la centième partie de la valeur nominale du second.

1° Quelles sont les trois valeurs nominales?

2° A quel taux le second effet a-t-il été escompté?

3° Le souscripteur avait proposé, le jour de la négociation, de les remplacer par deux autres de même valeur nominale, payables l'un dans 60 jours, l'autre dans 120 jours. Calculer cette valeur nominale commune, le taux de l'escompte étant 4 %.

(Les solutions algébriques sont admises.)

(*B. S., Chambéry, aspirants, octobre* 1920.)

4287. — Le cercle inscrit dans un triangle équilatéral ABC touche les côtés BC en α, CA en β, AB en γ; une tangente à ce cercle coupe les mêmes côtés en a, b et c. Démontrer que les points a', b', c', symétriques de a, b et c par rapport à α, β et γ respectivement, sont en ligne droite avec le centre O du cercle.

4288. — Soit ABC un triangle rectangle en A ; l'hypoténuse étant partagée en trois parties égales par les points X et Y, montrer que

$$\overline{AX}^2 + \overline{AY}^2 + \overline{XY}^2 = \frac{2}{3}\overline{BC}^2.$$

(*Examen égyptien.*)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie Paul BRODARD.

23e Année. 1er Juillet 1921. No 19.

L'Éducation Mathématique

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

PRIX DU NUMÉRO : France et Colonies, 0 fr. 60. Étranger, 0 fr. 70.
ABONNEMENT ANNUEL : France et Colonies, 10 fr. Étranger, 12 fr.

Tous les abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, l'on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction : Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Abonnements : Librairie **Vuibert**, Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

CERTIFICAT D'APTITUDE A L'ENSEIGNEMENT DES SCIENCES APPLIQUÉES DANS LES ÉCOLES NORMALES ET PRIMAIRES SUPÉRIEURES

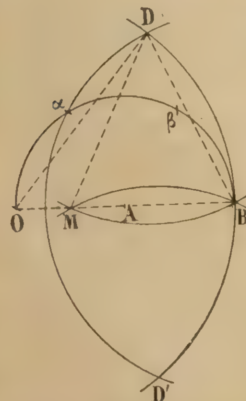
(*Ancien régime.*)

Concours de 1920.

4232. — *On connaît la longueur de l'hypoténuse et celle d'un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle. Trouver, en se servant seulement du compas, la longueur du second côté de l'angle droit.* (*On rappelle qu'étant donnés un cercle de rayon connu et un point sur ce cercle, on obtient facilement, par l'usage du seul compas, le point diamétralement opposé au point donné.*)

Traçons un cercle avec un rayon égal à la moitié de l'hypoténuse donnée, prenons sur ce cercle un point arbitraire B et portons trois ouvertures de compas égales à BO, à la suite, comme pour inscrire un hexagone régulier dans le cercle; le troisième sommet de la ligne polygonale régulière ainsi formée est le point C, diamétralement opposé au point B. Il ne reste plus qu'à tracer un cercle de B comme centre, avec un rayon égal au côté donné : le point où ce cercle coupe le cercle O est le sommet A de l'angle droit : le côté à construire est CA.

Remarque. — La longueur donnée est celle de l'hypoténuse, et non la moitié de l'hypoténuse, la solution précédente a donc besoin d'être complétée par l'indication d'un procédé qui permette de diviser une longueur donnée en deux parties égales, *sans employer la règle*.



Pour trouver le milieu d'un segment par la méthode ordinaire, on trace des extrémités A et B des cercles avec le même rayon, choisi assez grand pour qu'ils se coupent en deux points M et M' : on joint M et M' par une droite, *avec la règle*, et cette droite coupe AB au milieu cherché.

On connaît de nombreuses constructions du milieu d'un segment, par l'emploi du compas, à l'exclusion de la règle; c'est un des premiers et des plus élémentaires problèmes de la « géométrie du compas ».

Voici l'une des solutions :

Soit $OA = a$ le segment qu'il s'agit de diviser en deux parties égales : prolongeons d'abord OA d'une longueur égale AB; pour cela, traçons le cercle A(AO) (*), puis en portant trois cordes égales au rayon à la suite, formons le contour $O\alpha\beta B$, qui est le demi-hexagone inscrit et dont le sommet B est diamétralement opposé au sommet O, d'où $OB = 2OA$. Traçons ensuite les cercles O(OB) et B(Bα) qui se coupent en D et D', symétriques par rapport à la droite OB; les deux cercles D(DB) et D'(D'B) se coupent en B et en un point M qui est le milieu cherché.

En effet, la droite BM, perpendiculaire à DD', coïncide en direction avec BO; on a

$$OM \times OB = \text{puissance de O par rapport au cercle D(DB)}$$
$$= \overline{OD}^2 - \overline{DB}^2.$$

Mais

$$\overline{OD}^2 = 4a^2 \quad \text{et} \quad \overline{DB}^2 = \overline{B\alpha}^2 = 3a^2,$$

donc

$$OB \times OM = 4a^2 - 3a^2 = a^2;$$

comme $OB = 2a$, il en résulte $OM = \frac{1}{2}a$.

(Sur la figure, les cercles, qui sont des lignes effectivement tracées, sont en trait plein; les droites, qui servent pour la démonstration, mais qui ne sont pas tracées, la règle étant exclue, sont en trait pointillé.)

(Henri SEBBAN, à Batna, Constantine.)

N. B. — Plusieurs correspondants ont raisonné comme si la moitié de l'hypoténuse était donnée; c'était restreindre le problème, mais rester dans la logique. D'autres ont expressément indiqué soit pour prendre le milieu, soit pour élever une perpendiculaire, des constructions où la règle était employée, ce qui était en contradiction avec l'énoncé.

Très bonnes solutions : MM. J. Mazeau; F. Négrétzu.
Bonnes solutions : MM. J. Briquet; J. Cartouzou; G. Cellier; E. Delville; J. Devisme; L. Fiévet; H. Le Lan; A. Malléus; R. Marchant; G. Olivier; J. Périn; A. Robba; Rosenstock; M. Roy; M. Siraud.
Assez bonnes solutions : MM. A. F.; A. Bordes; R. Chasselut; L.-G. Papon; J. Patat.

4233. — *Soit N un nombre entier; soit A sa racine carrée à une unité près par excès, on a* $N = A^2 - R$.

Montrer que A et R sont plus petits que N sauf dans le cas où N est égal à 1 ou à 2 ou à 4. En conclure que si on sait trouver à l'aide du seul compas, les racines carrées exactes des nombres entiers inférieurs à un entier N, on peut trouver de la même manière la racine carrée exacte de N. Indiquer comment on peut trouver les

(*) Les cercles sont indiqués par la notation C(R), la première lettre C désignant le centre, la longueur entre parenthèses, qui peut être indiquée par ses deux extrémités, désignant le rayon.

racines carrées des 10 premiers nombres. Faire les constructions pour $\sqrt{7}$.

Nota. — Pour trouver la racine carrée de 2, on remarquera que $2 = 3 - 1$.

La racine carrée par excès A de N est définie par la double inégalité

$$(A-1)^2 \leqslant N < A^2, \qquad (1)$$

le reste R est $A^2 - N$.

Si			
	$N = 1$,	$A = 2$,	$R = 3$,
	$N = 2$,	$A = 2$,	$R = 2$,
	$N = 3$,	$A = 2$,	$R = 1$,
	$N = 4$,	$A = 3$,	$R = 5$,
	$N = 5$,	$A = 3$,	$R = 4$.

La différence $N - A$ est supérieure ou égale, en vertu de l'inégalité (1), à $(A-1)^2 - A$, ou à $A(A-3)+1$, donc $N - A$ est supérieur à $A(A-3)$. Si A est égal ou supérieur à 3, $N - A$ est positif. A ne peut être égal à 1 ; quant aux cas où $A = 2$, ils ont été examinés ci-dessus.

La différence $N - R$ est $2N - A^2$; puisque N est supérieur ou égal à $(A-1)^2$, cette différence est plus grande que $A^2 - 4A + 1$; elle est positive pour les valeurs de A égales ou supérieures à 4. On peut encore remarquer que R est inférieur à $A^2 - (A-1)^2$, c'est-à-dire au plus égal à 2A, or $N > 2A$ à partir de $N = 5$.

Il résulte bien de cet examen que les inégalités $A < N$ et $R < N$ sont toujours vérifiées, sauf pour trois valeurs de N qui figurent dans le tableau ci-dessus, savoir $N = 1$, $N = 2$, $N = 4$.

Ceci posé, nous regarderons comme acquis les résultats suivants, démontrés dans la solution de la question précédente :

a) Étant donnés deux points A et B, on peut, en se servant uniquement du compas, construire une suite de points C, D, E, en ligne droite avec A et B, et tels que les segments BC, CD, DE, ... soient égaux à AB ;

b) On sait aussi construire le milieu d'un segment AB donné, et, par conséquent, tracer une circonférence sur un diamètre donné.

Ceci posé, entre les nombres N, A et R, définis précédemment dans la première partie, existe l'égalité

$$A^2 = N + R,$$

qui exprime que A est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont $\sqrt{N}$ et $\sqrt{R}$ sont les côtés, ou, en d'autres termes, que $\sqrt{N}$ et $\sqrt{R}$ sont deux cordes complémentaires d'un cercle dont A est le diamètre. Deux cordes complémentaires étant deux cordes qui sous-tendent des arcs dont la somme est une demi-circonférence,

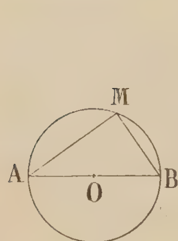


Fig. 1.

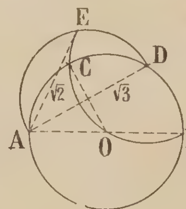


Fig. 2.

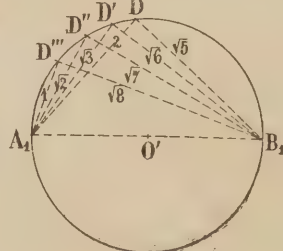


Fig. 3.

si l'on sait construire l'une AM, on a par cela même construit l'autre MB. En appliquant ici aux nombres N et R, on voit que si l'on sait construire $\sqrt{N}$, comme on sait construire A, on aura construit $\sqrt{R}$, où R est un nombre plus petit que N.

On construira d'abord $\sqrt{3}$, en traçant un cercle dont le rayon est pris pour unité (fig. 2) et en portant à la suite trois arcs A,C, CD, DB dont la corde est égale au rayon : la corde AD est $\sqrt{3}$.

Sur AD on décrit maintenant un cercle, et l'on prend une corde DE égale à DB : la corde AE est $\sqrt{2}$, car

$$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{DB}^2 = 3 - 1.$$

Il n'y a pas lieu de chercher une construction de $\sqrt{4}$ et de $\sqrt{9}$, qui sont des entiers : il ne reste à construire que les racines de 5, 6, 7, 8 et 10.

Pour les construire, on s'appuiera sur les égalités :

$$5 = 9 - 4, \quad 6 = 9 - 3, \quad 7 = 9 - 2, \quad 8 = 9 - 1, \quad 10 = 16 - 6.$$

Pour $\sqrt{5}$, il faudra tracer une circonférence ayant un diamètre A_1B_1 égal à 3 (fig. 3), on y portera une corde $A_1D = 2$; DB_1 est $\sqrt{5}$.

Pour construire $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ et $\sqrt{8}$, on se servira de la même circonférence, mais on prendra les cordes AD', AD'', AD''', égales successivement à $\sqrt{3}$, à $\sqrt{2}$ et à 1. Pour construire $\sqrt{10}$, on tracera une circonférence dont le rayon est 2, on portera une corde $A_2D = \sqrt{6}$, la corde DB_2 sera $\sqrt{10}$.

(René CHASSELUT, à Corbigny.)

Remarque. — Pour l'intelligence du raisonnement, des lignes droites sont tracées sur la figure : elles ne servent pas aux constructions.

Les tracés nécessaires pour prendre le milieu de AD, pour construire la longueur $A_1B_1 = 3$ et en placer le milieu n'ont pas été indiqués sur les figures : se reporter à la solution du problème précédent.

[Assez bonnes solutions : MM. R. Marchant ; H. Sebban.]

ARITHMÉTIQUE

4244. — *Trouver la loi des quotients et celle des restes successifs des divisions suivantes :*

$a - 1$ par b, $ab - 1$ par b^2, $ab^2 - 1$ par b^3, ... $ab^{n-1} - 1$ par b^n, a et b désignant des nombres entiers.

Nous supposons $b \neq 1$, pour que les nombres de la forme $ab^p - 1$ soient différents.

Divisons d'abord $a - 1$ par b, l'opération donne un quotient q et un reste r_1 tels que

$$a - 1 = bq + r_1 \qquad \text{avec} \qquad r_1 < b ;$$

on en déduit

$$a = bq + r_1 + 1. \qquad (1)$$

Nous remarquons deux cas particuliers, d'abord celui où $q = 0$ (si $a - 1 < b$), puis celui où $r_1 + 1 = b$, qui se présente si

$$a = b(q+1).$$

Examinons d'abord le cas général, où $q \neq 0$ et $r_1 + 1 < b$. Alors, en multipliant les deux membres de l'égalité (1) par b, on aura

$$ab = b^2q + (r_1 + 1)\,b,$$

avec

$$(r_1 + 1) \leqslant b - 1$$
$$(r_1 + 1)b \leqslant b^2 - b,$$

et

$$ab - 1 = b^2q + (r_1+1)b - 1, \qquad (r_1+1)b - 1 < b^2,$$

donc le quotient de $ab - 1$ par b^2 est q, et le reste de la division est $(r_1+1)b - 1$.

En multipliant les deux membres de (1) par b^{n-1}, on a

$$ab^{n-1} = b^nq + (r_1+1)\,b^{n-1}$$

et

$$ab^{n-1} - 1 = b^nq + (r_1+1)b^{n-1} - 1, \quad \text{avec} \quad (r_1+1)b^{n-1} - 1 < b^n.$$

Donc les quotients sont tous égaux à q, et les restes successifs sont

$$\begin{aligned} & r_1, \\ & r_2 = (r_1+1)b - 1, \\ & r_3 = (r_1+1)b^2 - 1, \qquad (2) \\ & \dots\dots\dots\dots, \\ & r^n = (r_1+1)b^{n-1} - 1. \end{aligned}$$

Si $q = 0$, c'est-à-dire si $a - 1 < b$, on aura de même $ab < b^2 + b$, et ainsi de suite, $ab^{n-1} < b^n + b^{n-1}$, donc la loi précédente subsiste, les quotients sont tous nuls, et les restes sont ceux de la suite (2).

Si $r_1 + 1 = b$, c'est-à-dire si $a = (q+1)b$, on aura

$$\begin{aligned} ab &= (q+1)b^2, \\ ab - 1 &= (q+1)b^2 - 1 = qb^2 + b^2 - 1, \\ ab^2 - 1 &= (q+1)b^3 - 1 = qb^3 + b^3 - 1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots, \\ ab^{n-1} - 1 &= (q+1)b^n - 1 = qb^n + b^n - 1. \end{aligned}$$

Les quotients sont tous égaux à q, les restes sont $b^2 - 1$, $b^3 - 1$, ... $b^n - 1$; ce sont bien ceux que donne la suite (2), si l'on y remplace $r + 1$ par b.

(J. LASSAVE, à l'Isle-en-Dodon.)

Bonnes solutions de Mlle Perrier; MM. Champy; R. Chasselut; P. Louon; M., à Guéret; R. Marchant; J. Millour; G. Mouzon; G. Olivier; T. Passebois; H. Sebban; Vaux.]

4258. — *Un terrain a été vendu en trois lots : le premier contenant le tiers du terrain, à raison de 40f l'are; le second, de 21a,10 de superficie, à 70f l'are; le troisième, à 80f l'are. La vente a produit 10 209f. Cette somme a été affectée à l'achat de rente française 5 % 1920. Avec 10 000f, on a acheté de la rente émise au pair entièrement libérée à la souscription. Le reste a servi au paiement du premier terme du plus grand nombre possible de titres libérables en quatre termes. Par titre de 5f de rente, le premier terme était de 25f et le prix total d'émission 101f.*

On demande :

1° La surface du terrain;

2° Le montant de la rente acquise;

3° La somme à ajouter au prix de vente du terrain pour libérer les titres achetés à terme.

(*B. S., Paris, aspirantes, juillet* 1920.)

La vente du second lot a rapporté $21,1 \times 70 = 1\,477^f$, la vente des autres lots a donc produit $10\,209 - 1\,477 = 8\,732^f$. Si les deux derniers lots étaient vendus au prix de 80f l'are, la vente rapporterait $21,10(80 - 70) = 211^f$ de plus, soit, au total, $10\,209 + 211 = 10\,420^f$.

Il n'y aurait alors que deux lots, l'un du tiers du terrain, vendu 40f l'are; l'autre, deux fois plus grand, vendu à un prix double, aurait rapporté quatre fois plus que le premier. Il faut donc diviser 10 420 en deux parts, respectivement proportionnelles à 4 et à 1 ; ces parties sont

$$10\,420 : 5 = 2\,084,$$
$$4 \times 10\,420 : 5 = 8\,336.$$

Valeur du 1er lot : 2 084,

— 2e lot : 1 477,

— 3e lot : $8\,336 - 21,1 \times 80 = 6\,648$;

la surface du premier lot est

$$2\,084 : 40 = 52^a,1 ;$$

celle du troisième,

$$6\,648 : 80 = 83^a,1,$$

celle du second, $21^a,1$,

l'aire totale : $156^a,3$,

dont 52,1 est bien le tiers.

2° et 3°. On peut acheter comptant, avec 10 000f, 500f de rente ; il reste 209f, qui suffisent pour acheter 8 titres de 5f de rente; il reste un reliquat de 9f, mais d'autre part, il y a 8×76^f à verser, soit 608f; en défalquant le reliquat de 9f, c'est 599f qu'il faudra ajouter; le montant de la rente achetée est 540f.

(MARGUERITE BOURREAU, à Faye.)

[Bonnes solutions : Mlle G. Boulay; MM. F. Bailbé; A. Bourson; P. Buckinx; J. Chabaud; G. Commune; J. Devisme; Ducluseau; G Gouiraud; F. Guidicelli; R. Guiot; R. Marchant; J. Navel; C. Norgelet; G. Olivier; L.-G. Papon; E. Passebois; J. Retat; E. Paté; A. Pouches; Rabelle; M. Roy; G. Vimbert.

Assez bonnes solutions : MM. J. Cartouzou; R. Cluzaud; Le Minous-Trébouta.]

ALGÈBRE

4256. — *Soit un triangle équilatéral* ABC, *de côté* a.

Mener une droite rencontrant les côtés BC *et* BA *du triangle en* M *et* P *et le côté* CA *prolongé en* N, *de telle manière que les trois surfaces : triangle* MPB, *triangle* ANP, *quadrilatère* CAPM, *soient équivalentes.*

En supposant que le triangle soit inscrit dans un cercle de rayon égal à 1m, *calculer* PM *et* PN *en millimètres.*

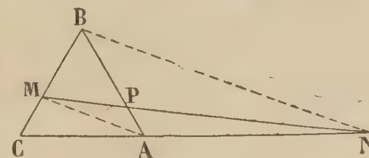
N. B. — Les candidats pourront, s'ils le veulent, poser

$$BM = x, \qquad BP = y, \qquad AN = z,$$

et calculer ces inconnues, soit en utilisant le théorème des transversales, soit en démontrant que la droite BN *doit être parallèle à* MA.

(*Certificat d'aptitude au professorat des écoles primaires supérieures, 2e partie, aspirants, sciences appliquées.*)

Si les triangles MBP et APN sont équivalents, ceux que l'on forme en leur ajoutant MPA le sont aussi. Les triangles MBA et MNA ayant même base et des surfaces égales, il faut que BN soit parallèle à MA.



De plus, la surface BMP est la moitié de BCA ; cela entraîne que

$$BM \times BP = \frac{1}{2} BC \times BA.$$

Avec les notations indiquées, on voit qu'il faut que x, y et z satisfassent à l'équation

$$2xy = a^2. \qquad (1)$$

En exprimant que AM est parallèle à BN, on a

$$\frac{CA}{AN} = \frac{CM}{MB}$$

ou

$$\frac{a}{z} = \frac{a-x}{x}, \qquad \text{d'où} \qquad z = \frac{ax}{a-x}; \qquad (2)$$

enfin, la similitude des triangles PBN et PAM donne

$$\frac{PB}{PA} = \frac{BN}{AM} = \frac{CB}{CM}$$

ou

$$\frac{y}{a-y} = \frac{a}{a-x},$$

$$a^2 - 2ay + xy = 0. \qquad (3)$$

Comme $xy = \frac{1}{2}a^2$, cette équation fournit $y = \frac{3}{4}a$, puis l'équation (1) $x = \frac{2}{3}a$, et l'équation (2), $z = 2a$.

Le théorème des transversales est bien vérifié, car

$$\frac{NA}{NC} \cdot \frac{MC}{MB} \cdot \frac{PB}{PA} = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-3) = +1.$$

Si le rayon du cercle circonscrit est 1^m,

$$a = \sqrt{3} = 1{,}732, \qquad x = \frac{2}{3}\sqrt{3} = 1\,155^{mm},$$

$$y = \frac{3}{4}\sqrt{3} = 1\,299^{mm}, \qquad z = 2\sqrt{3} = 3\,464^{mm}.$$

Le triangle MBP, où l'angle en B a 60°, donne

$$\overline{PM}^2 = x^2 + y^2 - xy = a^2\left(\frac{4}{9} + \frac{9}{16} - \frac{1}{2}\right) = a^2\frac{73}{144},$$

d'où

$$PM = \frac{a\sqrt{73}}{12} = \frac{\sqrt{219}}{12} = 1{,}2332;$$

le triangle PAN, où l'angle en B est 120°, donne de même :

$$\overline{PN}^2 = (a-y)^2 + z^2 + (a-y)\,z = a^2\left(\frac{1}{16} + 4 + \frac{1}{2}\right) = a^2\frac{73}{16},$$

d'où

$$PN = \frac{a\sqrt{73}}{4} = \frac{\sqrt{219}}{4} = 3MP = 3{,}6996.$$

(Solution analogue : R. LEGRAND, école pratique d'industrie de Rive-de-Gier.)

[Bonnes solutions : Mlle F. Negretzu; MM. J. Cartouzou; J. Chabaud; L. Chapelon; R. Chasselut; G. Domaret; J. Devisme; Groscolas; E. Guicheney; P. Louon; J. Magnani; R. Marchant; Monnez; L.-G. Papon; R. Weinzaepfel. Assez bonnes solutions : MM. J. Patat; J. Schilling; H. Sebban; J. Voyer; R. Weinzaepfel.]

4257. — *Une automobile part de A pour se rendre à B en suivant une route qui comprend des parties plates, des montées et des descentes. A l'aller dans le sens AB la longueur des montées est les $\frac{4}{5}$ de celle des descentes. La voiture a une vitesse de 40^{km} à l'heure en terrain plat, 25^{km} en montée et 50^{km} aux descentes. La distance AB est 85^{km}. Sachant qu'au retour de B à A, elle met 6 minutes de plus qu'à l'aller, calculer le temps que met la voiture pour aller de A à B.*

(*B. S., Dijon, aspirantes, juillet* 1920.)

Solution algébrique. — Soit x le total de la longueur des descentes à l'aller; le total des longueurs des montées est $\frac{4}{5}x$, les paliers font $85 - \frac{9}{5}x$.

Le temps mis, à l'aller, est, en heures,

$$\frac{\left(85 - \frac{9}{5}x\right)}{40} + \frac{4}{5}\cdot\frac{x}{25} + \frac{x}{50} = \frac{85}{40} + \frac{x}{25}\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{5} - \frac{9}{8}\right)$$

$$= \frac{85}{40} + \frac{x}{25}\cdot\frac{7}{40};$$

au retour, c'est

$$\frac{85 - \frac{9}{5}}{40} + \frac{4}{5}\cdot\frac{x}{50} + \frac{x}{25} = \frac{85}{40} + \frac{x}{25}\cdot\frac{11}{40};$$

la différence de ces temps est 6^{min}, ou $\frac{1}{10}$ d'heure, donc

$$\frac{x}{25}\cdot\frac{11-7}{40} = \frac{x}{250} = \frac{1}{10};$$

on en tire $x = 25$.

Il y a 25^{km} de descentes (en allant),
20^{km} de montées,
40^{km} de paliers.

Le temps mis à l'aller est

$$\frac{85}{40} + \frac{7}{40} = \frac{92}{40} = \frac{23}{10};$$

en minutes, cela fait

$$6 \times 23 = 138 = 2^h\,18^m.$$

Solution arithmétique. — La différence de temps provient de ce que les parties du parcours qui étaient des descentes à l'aller sont des montées au retour et *vice versa*. Un kilomètre de descente, qui était parcouru à l'aller en $\frac{1}{50}$ d'heure, est parcouru au retour en $\frac{1}{25}$, ce qui allonge la durée du trajet de $\frac{1}{25} - \frac{1}{50} = \frac{1}{50}$ d'heure, ou 72 secondes. Puisque la durée est augmentée de 6 minutes ou 360 secondes, on en conclut que la longueur des descentes (à l'aller) surpasse celle des montées de $360 : 72 = 5^{km}$. Mais d'autre part, on sait que cet excès est $\frac{1}{5}$ de la longueur des descentes : il y a donc 25^{km} de descentes, 20^{km} de montées, et $85 - 25 - 20 = 40^{km}$ de paliers.

La durée du parcours, à l'aller, est

$$\frac{40}{40} + \frac{20}{25} + \frac{25}{50} = 1 + \frac{4}{5} + \frac{1}{2} = \frac{23}{10} \text{ d'heure.}$$

(RAYMOND GUIOT, à Auneau.)

[Bonnes solutions : Mlles G. Boulay; M. Bourreau; S. David; F. Negretzu; MM. F. Bailbé; O. Bastin; A. Bourson; Bouzid; Cartouzou; R. Cassan; R. Cazin; J. Chabaud; B. Charles; R. Chasselut; G. Clément; R. Cluzaud; G. Commune; M. Courboulay; P. Créange; J. Devisme; Duclusoau; L. Esprit; P. Faucheux; L. Fixe; G. Fouché; G. Gabay; Guicheney; F. Guidicelli; Gouiraud; R. Henin; G. Houalet; P. Lebrun; Le Minois-Trébouta; P. Louon; R. Marchant; Y. Maurice; M. Marcou; R. Marjor; R. Morel; J. Navel; C. Norgelet; Pagès; R.-D. Pantz: L. G. Papon; E. Passebois; J. Patat; E. Paté; L. Piette; E. Pintong; A. Pouches; G. Quesnel; E. Reymond; A. Robba; M. Robineau; H. Sarda; J. Schilling; J. T., école d'agriculture du Caire; R. Victor; G. Vimbert; Ch. Vouilloux.]

4259. — *Une chaudière à vapeur est formée d'un cylindre droit à base circulaire terminé par deux calottes hémisphériques. La longueur du cylindre dépasse son rayon d'une longueur a.*

1° Exprimer en fonction de a le rayon x du cylindre et des hémisphères pour que la surface totale de la chaudière soit égale à celle d'une sphère de rayon a.

2° Calculer a pour que cette surface soit $2^{m2},544706$ et, dans cette hypothèse, calculer le volume du solide en litres.

(*B. S., Lyon, aspirants, juillet* 1920.)

1° Soit h la hauteur, x le rayon du cylindre, x est aussi le rayon des hémisphères.

Par hypothèse

$$h = x + a; \qquad (1)$$

la surface totale de la chaudière est

$$2\pi xh + 4\pi x^2 = 2\pi x(h + 2x).$$

En remplaçant h par la valeur que donne l'équation (1), et en égalant l'expression trouvée à $4\pi a^2$, on obtient l'équation

$$2\pi x(3x + a) = 4\pi a^2,$$

qui s'écrit, après avoir divisé les deux membres par 2π,

$$3x^2 + ax - 2a^2 = 0$$

ou

$$(x + a)(3x - 2a) = 0.$$

La seule racine acceptable est $x = \frac{2}{3}a$.

2° En écrivant que la surface totale est 2,544706, on a l'équation

$$4\pi a^2 = 2{,}544706, \ (*)$$

d'où

$$a = +\sqrt{\frac{2{,}544706}{4\pi}} = 0^m{,}45;$$

on en déduit

$$x = 0^m{,}30, \qquad h = 0^m{,}75.$$

(*) Encore une fois nous remarquons que de telles données ne correspondent à rien de réel : peut-on mesurer ou même définir la surface d'une chaudière à $\frac{1}{10}$ de millimètre carré près?

Le volume du solide est, en mètres cubes,

$$\frac{4}{3}\pi x^3 + \pi x^2 h$$
$$= \frac{4}{3}\pi x^3 + \pi x^2(x+a) = \pi x^2\left(\frac{4}{3}x + x + a\right),$$

et, en litres,

$$\pi(3)^2(4+3+4,5) = \pi \times 9 \times 11,5 = 325^{l},155.$$

(R. MARCHANT, athénée d'Anvers.)

[Bonnes solutions : Mlles M. Bourreau; F. Negretzu; MM. A. Bourson; P. Buckinx; R. Cassan; J. Chabaud; A. Chatelier; J. Devisme; L. Espriet; Gabay; R. Guiot; R. Henin; P. Lebrun; P. Louon; J. Magnani; Y. Maurice; C. Pagès; L.-G. Papon; J. Patat; E. Pinlong; A. Pouches; M. Robineau; Rosenstock; Ch. Sol; R. Victoir; G. Vimbert; Ch. Vouilloux; R. Weinzaepfel. Assez bonnes solutions : MM. H. Aubert; O. Bastin; J. Cartouzou; Chapelon; Ducluseau; L. Fixe; G. Fouché; A. Goëlo; E. Guicheney; R. Henry; Kaichinger; Le Minous; J. Martin; P. Mauve; R. Marjor; J. Mazeau; Ch. Norgelet; E. Paté; A. Robba; A. Salomon; Schilling.]

GÉOMÉTRIE

4249. — *Par un point* M *pris à l'intérieur d'un angle* xOy *donné, il passe deux cercles inscrits dans l'angle. Trouver le lieu de* M, *si l'on demande que :*

1° *la somme des rayons de ces cercles soit constante ;*

2° *leur produit soit constant ;*

3° *leur différence soit constante.*

Soit M un point situé dans l'angle xOy, M′ son symétrique par rapport à la bissectrice intérieure Oz de cet angle : tout cercle qui touche Ox et Oy et passe en M a son centre sur la bissectrice Oz; il passe donc en M′. Réciproquement, tout cercle qui passe en M et en M′ a pour centre un point de la bissectrice Oz; s'il touche un des côtés de l'angle, il touche aussi l'autre.

Pour déterminer ces cercles, considérons le point I où la ligne MM′ coupe Oy : si un cercle passant en M et M′ touche Oy en T, la puissance de I sera $\overline{IT}^2$ ou $IM \times IM'$. On aura donc les points de contact des deux cercles en portant de part et d'autre

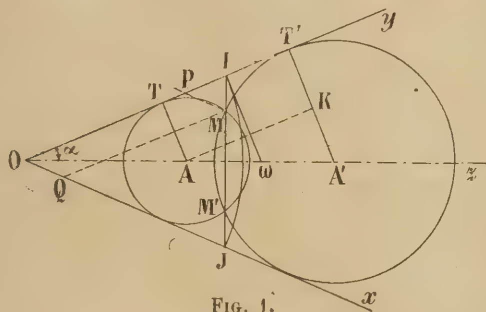


Fig. 1.

de I une longueur égale à la moyenne géométrique de IM et IM′.

Le point I est le milieu de TT′ et l'on a $\overline{IT}^2 = \overline{IT'}^2 = IM \times IM'$. Les perpendiculaires à Oy élevées en T, T′ et I coupent Oz aux points A et A′, centres des cercles cherchés et en ω, milieu de la ligne des centres.

1° La longueur $I\omega$ est la demi-somme des rayons. Si cette somme est constante, le triangle rectangle $OI\omega$ est déterminé en grandeur. Donc ω et I sont fixes : le point M décrit alors la perpendiculaire IJ menée de I sur Oz. Il ne décrit que le segment compris entre I et J.

2° Le point O est un centre d'homothétie des deux cercles (A) et (A′), T et T′ sont deux points anti-homologues, M est un point qui coïncide avec son anti homologue : on a donc

$$OM^2 = OT \times OT' = AT \times AT' \operatorname{cotg}^2\alpha ;$$

par conséquent si le produit des rayons est constant, la longueur OM est aussi constante et réciproquement. Le lieu de M est donc un arc de cercle, tracé de O comme centre.

3° La différence des rayons est le segment A′K construit en menant AK parallèle à Oy. Si A′K est constant, le triangle AKA′ rectangle, dont les angles et un côté sont invariables, est de grandeur constante. Le côté AK est égal à TT′ : si le produit des rayons est constant, TT′ l'est aussi et réciproquement. Or

$$IM \times IM' = \overline{IT}^2,$$

mais

$$IM \times IM' = IM \times MJ,$$

donc le point M se déplace dans l'angle xOy de façon que le produit des segments déterminés sur une perpendiculaire à Oz soit constant. Par M menons MP et MQ parallèles respectivement à Ox et à Oy : on sait que $IM = 2PM \sin\alpha$ et que de même $JM = 2QM \sin\alpha$; or l'aire du parallélogramme OPMQ est proportionnelle au produit des côtés, puisque l'angle en O est constant.

Cette aire est donc constante, par conséquent, le point M décrit une hyperbole dont les asymptotes sont Ox et Oy.

La surface OPMQ est

$$OP \times OQ \times \sin 2\alpha = QM.PM \sin 2\alpha$$
$$= \frac{IM.IM'}{4\sin^2\alpha} 2 \sin\alpha \cos\alpha$$
$$= \frac{1}{2} IM.IM' \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Si $A'K = R' - R = d$, $AK = d \operatorname{cotg}\alpha$,

$$IM.IM' = \frac{d^2}{4}\operatorname{cotg}^2\alpha,$$

et l'aire $OPMQ = d^2\left(\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{2}\right)^3$.

La réciproque a donc lieu, puisqu'il y a un rapport constant entre le carré de A′K, différence des rayons, et la surface du parallélogramme OPMQ.

(Solution analogue : Marcel Roy, collège de Clamecy.)

Deuxième solution des nos 1° et 2°. — Soit M un point intérieur à l'angle xOy : inscrivons dans l'angle un cercle (ω) de rayon r qui touche les côtés en L et L′ (fig. 2). Pour construire les cercles inscrits

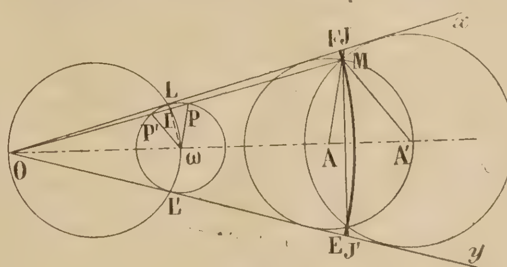


Fig. 2.

dans l'angle et qui passent en M, menons la droite OM : elle coupe en P et P′ le cercle (ω). Les cercles homothétiques de (ω) par rapport à O avec les raisons $\frac{OM}{OP}$ et $\frac{OM}{OP'}$ passent en M et sont inscrits dans l'angle : ce sont les cercles demandés.

Leurs rayons sont $\frac{OM}{OP}r$ et $\frac{OM}{OP'}r$.

Si la somme est constante, cela entraîne

$$OM.r.\left(\frac{1}{OP} + \frac{1}{OP'}\right) = a$$

ou

$$OM.(OP + OP') = \frac{a}{r} OP.OP'.$$

Soit I le milieu de PP′, on a

$$OP + OP' = 2OI, \quad \text{et} \quad OP \times OP' = \overline{OL}^2;$$

la relation précédente devient

$$2OM \times OI = \frac{a}{r}\,\overline{OL}^2 = \text{constante}.$$

Le point M décrit la figure inverse, avec la puissance $\frac{a}{2r}\overline{OL}^2$, de celle que décrit I; I décrit l'arc $L\omega L'$ du cercle qui a $O\omega$ pour diamètre. M décrit la droite JJ', inverse de cet arc de cercle.

Si le produit des rayons est constant, on a

$$\overline{OM}^2\,\frac{r^2}{OP.OP'} = b^2,$$

donc

$$OM = \frac{b.OL}{r},$$

OM est donc constant et M décrit un arc EF d'un cercle, entre les points de rencontre avec les côtés de l'angle.

Si la différence des rayons est constante, cela entraîne

$$OM.r\left(\frac{1}{OP'} - \frac{1}{OP}\right) = d,$$

ou

$$OM.P'P = \frac{d.\overline{OL}^2}{r} = \text{constante}.$$

Cette définition de la courbe que décrit M, dans le troisième cas, ne permet pas aussi facilement de montrer que c'est une hyperbole.

[Bonnes solutions : MM. M., à Guéret; R. Marchant, athénée d'Anvers; J. Millour, à Guingamp; L.-G. Papon, collège de Clamecy.
Solutions partielles : Mlle M. Koch; MM. P. Louon; R. Reynard; H. Sebban.]

4260. — *Dans un triangle rectangle l'un des côtés de l'angle droit est égal à* $28^m,40$ *et la somme de l'hypoténuse et de l'autre côté est double de cette longueur.*

On demande de calculer :

1° *Les trois côtés de ce triangle;*

2° *Le rayon du cercle inscrit;*

3° *Le rayon du plus petit cercle exinscrit.*

(*B. S., Caen, aspirants, juillet* 1920.)

1° Soient a l'hypoténuse, b et c les côtés de l'angle droit. On sait que

$$b = 28,40, \qquad (1)$$

$$a + c = 2 \times 28,40 \qquad (2)$$

et que

$$a^2 - c^2 = b^2, \qquad (3)$$

en vertu du théorème de Pythagore.

Cette dernière équation peut s'écrire

$$(a-c)(a+c) = b^2,$$

d'où

$$a - c = \frac{b}{2} = \frac{1}{2}.28,40. \qquad (4)$$

En ajoutant les équations (2) et (4), on a

$$2a = \frac{5}{2}.28,40, \qquad a = 5 \times 7,1 = 35,5;$$

en retranchant, on a $\quad c = 3 \times 7,1 = 21,3;$
d'autre part, on a donné $\quad b = 4 \times 7,1 = 28,4.$

Le triangle rectangle est donc semblable au triangle remarquable dont les côtés sont 3, 4 et 5(*).

(*) Voir, au sujet du triangle rectangle dont les côtés sont 3, 4 et 5, la question 4193 du numéro 16 de l'année en cours.

2° Le rayon r du cercle inscrit dans un triangle rectangle est donné par la formule

$$2r = b + c - a,$$

donc

$$r = \frac{1}{2}(4 + 3 - 5).7,1 = 7,1.$$

3° Si r_a, r_b, r_c sont les rayons des cercles exinscrits, on sait qu'en évaluant la surface de plusieurs façons, on obtient les relations

$$S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c,$$

où $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Puisque $a > b > c$, il en résulte

$$r_a > r_b > r_c.$$

Le plus petit rayon est r_c; on trouve

$$p = \frac{1}{2}(4 + 3 + 5) \times 7,1 = 6 \times 7,1 = 42,6,$$

$$p - c = 6 \times 7,1 - 3 \times 7,1 = 3 \times 7,1 = c,$$

et

$$r_c = \frac{6 \times 7,1}{3 \times 7,1}\,r = 2r = \frac{1}{2}b.$$

Le diamètre de ce cercle est égal à b.

[Bonnes solutions : Mlles G. Boulay; S. David; F. Negretzu; MM. H. Aubert; O. Bastin; Berger; F. Bonnet; P. Buckinx; L. Caritoux; J. Cartouzoux; R. Cassan; S. Castelbou; R. Carzin; J. Chabaud; L. Chapelon; B. Charles; C. Clément; M. Courboulay; Y. Coustau; P. Créange; J. Devisme; A. Dubuc; Duclùseau; E. Epailly; L. Espriet; L. Exbrayat; G. Fouché; Gabay; L. Gimbert; A. Goëlo; A. Grall; E. Guicheney; R. Hénin; R. Henry; G. Houalet; L. Huguet; P. Le Berd; P. Lebrun; R. Legrand; Le Minous-Trébouta; S. Louon; J. Magnani; R. Marchant; M. Marcou; J. Martin; Y. Maurice; P. Mauve; R. Marjor; R. Morel; J. Navel; Ch. Norgelet; C. Pagès; R.-D. Pantz; L.-G. Papon; E. Passebois; J. Patat; E. Paté; L. Piette; E. Pinlong; A. Popu; A. Pouches; Rabelle; E. Reymond; M. Robineau; Rosenstock; M. Roy; A. Salomon; J. Schilling; C. Sol; J. T., école d'agriculture au Caire; R. Victoir; G. Vimbert; Ch. Vouilloux; Weinzaepfel].

VARIÉTÉ

Le style mathématique.

Le style est, en quelque sorte, le vêtement de la pensée. On porte, suivant les circonstances, la profession que l'on exerce ou les goûts que l'on a, des tenues différentes. L'homme élégant veut donner à sa mise quelque chose de personnel; il suit les inflexions fugitives de la mode, en tâchant de leur imprimer sa marque propre. Au contraire, le magistrat, le militaire, l'ecclésiastique portent chacun une tenue uniforme, qui fait abstraction de leur personnalité pour mettre en lumière la fonction qu'ils exercent, le ministère dont ils sont investis. On endosse pour le travail un costume solide et pratique; pour le repos, on se met à l'aise dans des vêtements simples. Si l'on désire faire honneur à des hôtes, on s'habille avec recherche pour une cérémonie.

Il existe de même un style soutenu, dont on a, non sans travail le plus souvent, cherché les mots, calculé les effets, balancé les périodes. C'est un style de parade et de cérémonie. Le style de la conversation, de la vie courante, fuit l'affectation et, prenant ses aises, ne craint pas d'enfreindre de temps en temps quelques lois rigoureuses de la syntaxe : il suffit qu'on soit compris sans prendre trop de peine.

Le style du journaliste, qui doit stimuler un lecteur souvent distrait ou blasé, veut être piquant, brillant et léger : il n'a pas le temps de faire des recherches et n'hésite pas, quand un mot lui manque, devant un néologisme, même superflu et mal venu. Fort heureusement, la langue laisse le plus souvent tomber ces créations morbides, si grande qu'ait pu être leur vogue éphémère. Pour s'imposer à l'attention, pour éveiller la curiosité, l'auteur dramatique est contraint aussi à travailler, à fouiller son style, alors même qu'il prétend imiter les négligences et l'abandon de celui de la conversation.

Le style du droit fournit une antithèse absolue : il est traditionnel, il a quelque chose d'immuable et de figé. C'est l'asile où achèvent de vieillir maintes locutions autrefois courantes, qui, tombées en désuétude, bientôt ne seront plus comprises. Les arrêtés, les textes de lois prolongent de quelques siècles leur existence. Pareillement, le style des chancelleries essaie de conférer au langage la stabilité, la perpétuité qu'on voudrait donner aux traités et aux pactes que concluent les nations.

L'un et l'autre sont strictement impersonnels.

Les caractères du style mathématique le rapprochent de ces deux derniers. Il est, comme eux, impersonnel ou, du moins, il est rare qu'un mathématicien se propose de donner à l'expression de sa pensée un tour reconnaissable et distinctif. Quelques-uns cependant l'ont voulu ; on pourrait citer, parmi les disparus, le mathématicien Charles Méray, dont la moindre note n'aurait pas eu besoin d'être signée pour être attribuée sans hésitation à son auteur.

Le style mathématique est traditionnel, c'est-à-dire qu'il emploie des formes et des mots dont le sens est défini et fixé, une fois pour toutes. Cependant il est moins traditionnel que le style juridique, parce que la science évolue et qu'il doit la suivre. La science ne se borne pas à explorer, avec une minutieuse persévérance, un champ délimité définitivement. Elle étend ses investigations à des domaines de plus en plus étendus; elle introduit des concepts nouveaux, pour lesquels il faut des mots nouveaux, et souvent des tournures inédites. En sortant du terrain déjà parcouru, elle envisage une face inconnue des notions anciennes et découvre des rapports inaperçus, que le langage ne se prête plus bien à exprimer.

C'est ainsi qu'il faut faire effort pour plier la langue géométrique à exprimer les rapports de dualité, dont les géomètres n'étaient pas conscients autrefois. Le vocabulaire et les tournures n'y étaient pas adaptés.

On a été amené à considérer toute figure comme formée, soit d'éléments points, soit d'éléments droites, entre lesquels une correspondance peut être établie. Une ligne droite est déterminée par deux points, elle est « la droite commune à deux points », un point est déterminé par deux droites, il est « le point commun à deux droites ». Une ligne courbe est décrite (parcourue) par un point, elle est décrite (enveloppée) par ses tangentes. Le *degré* d'une courbe est le nombre de points communs (réels ou imaginaires) qu'elle peut avoir avec une droite; sa *classe* est le nombre de tangentes réelles ou imaginaires qu'on lui peut mener d'un point.

Il faut, pour bien mettre en lumière cette correspondance, changer les tournures de phrase et introduire de nouveaux mots.

Le vocabulaire d'une langue est composé principalement de substantifs, de verbes et d'adjectifs. Les substantifs désignent les objets, les concepts; les verbes, les relations des objets, les actions qu'ils exercent; les adjectifs, leurs qualités soit distinctives, soit communes.

Le vocabulaire de la langue mathématique est composé pour une part de mots empruntés à la langue courante, auxquels un sens défini a été attribué (tels sont les mots : puissance, racine carrée, figure semblable, etc.), pour l'autre part, de mots formés spécialement pour désigner une chose nouvelle, comme l'ont été les mots : homothétie, orthocentre, différentielle, intégrale.

Quand un concept nouveau se présente, on a le choix entre les deux procédés; quelquefois les auteurs emploient des procédés différents, l'usage décide peu à peu entre eux. C'est ainsi qu'on a cessé d'appeler points *cuspidaux* ou *nodaux* certains points singuliers des courbes, pour les nommer points de rebroussement et points doubles ou multiples. La décision de l'usage est souvent lente à intervenir : elle n'est pas toujours celle que la bonne logique aurait prononcée la force de l'habitude, de l'analogie et même un peu de paresse d'esprit influent fâcheusement. Aussi est-il très souhaitable que les efforts de certaines associations aboutissent, à la suite d'un examen attentif et d'une discussion impartiale, à faire adopter, dans l'enseignement au moins, des désignations uniformes.

Le style mathématique ne vise point à produire une impression sensible : la force des mots ne s'y use point par leur emploi prolongé; aussi n'a-t-il point besoin de renouveler, de rajeunir son vocabulaire.

Toutefois, la langue des mathématiciens, à part les mots créés spécialement par eux, est faite avec la langue usuelle. Aussi, quand un mot vieillit dans la langue et cesse d'être bien compris, il ne peut plus subsister sans inconvénient dans le vocabulaire mathématique. Le mot « grave » avait autrefois, comme en latin, le sens concret de pesant : la Mécanique étudiait la « chute des graves »; ce titre de chapitre étonnerait maintenant et ne serait plus bien compris. On appelait, au XVIIe siècle, « solidité » d'un prisme, d'une sphère, ce que nous appelons maintenant volume ou capacité. On entendait par solidité le volume du corps plein, par capacité celui du corps creux, qui ne diffèrent point, puisque l'épaisseur de la surface est tenue pour nulle.

Comme les tournures de phrases vieillissent en même temps, il se produit insensiblement des changements qui, d'un siècle à l'autre, renouvellent le style, sans que ceux qui contribuent à ces modifications par leur parole ou par leurs écrits puissent jamais s'en rendre compte.

En traitant la question du vocabulaire, nous rencontrons celle des synonymes. Le français n'a que très peu de mots véritablement synonymes; il a toutefois des mots dont les sens sont très voisins et qui dans beaucoup d'acceptions peuvent, sans inconvénient, être mis l'un à la place de l'autre. C'est une ressource indispensable au poète et dont le prosateur lui-même ne saurait se passer, car on regarde comme un défaut grave le retour, à intervalles trop rapprochés, d'un même mot dans le texte. Le mathématicien n'est pas sensible à ce reproche, et ce n'est pas une faute d'écrire : « les diviseurs communs à deux ou plusieurs nombres entiers sont les diviseurs de leur plus grand commun diviseur. » A vrai dire, il ne devrait pas exister de synonymes en mathématique; chaque mot devant être employé avec un sens défini, deux mots différents ne sauraient avoir même sens; le danger de confusion est plus grand encore, si deux mots ont des significations communes, en partie seulement. Cependant il existe des locutions équivalentes, dont l'emploi judicieux retire au style mathématique un peu de la raideur et de la gaucherie déplaisante qu'il ne manquerait pas d'avoir si les mêmes mots, les mêmes tournures revenaient fatalement chaque fois que la même idée se présente. Remarquons par exemple que l'on peut dire indifféremment : a divise b, a est un diviseur de b, a est un facteur de b, ou b est multiple de a; et de même : les deux droites D et D′ se coupent en A; A est le point commun aux droites D et D′, ou bien est leur point d'intersection. Avec un peu de soin et d'habileté, on peut souvent éviter des répétitions, qui, bien que n'étant pas condamnables en soi, sont néanmoins désagréables et fatigantes.

Après avoir parlé du vocabulaire mathématique, nous parlerons prochainement du style mathématique, c'est-à-dire de la façon d'ordonner les idées et d'employer le vocabulaire.

SOLUTIONS D'EXERCICES

4117. — *Que devient l'expression*

$$y = 2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x - 3} \qquad \text{pour} \qquad x = +\infty\,?$$

y tend-il vers zéro par valeurs positives ou négatives? Limite de la valeur de y pour $x = -\infty$.

Multiplions et divisons l'expression y par la quantité conjuguée, qui est $z = 2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4x - 3}$. Le produit yz se réduit à

$$(2x-1)^2 - (4x^2 - 4x - 3) = 4,$$

donc

$$y = \frac{yz}{z} = \frac{4}{2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4x - 3}}.$$

Quand on donne à x une valeur très grande et positive, le dénominateur de la fraction est très grand, la valeur de y est donc très voisine de zéro et *positive*. La réponse est donc que y tend vers zéro par valeurs positives, lorsque x tend vers $+\infty$.

Au contraire, lorsque x tend vers $-\infty$, y tend vers $-\infty$, car les deux termes dont se compose y ont alors même signe, leurs valeurs absolues, qui sont infiniment grandes, s'ajoutent.

4130. — *Vérifier l'identité*

$$\sqrt{1 + m + \sqrt{1 + 2m}} + \sqrt{1 + m - \sqrt{1 + 2m}} = \sqrt{2} \times \sqrt{1 + 2m}.$$

Élevons au carré l'expression du premier membre, qui est essentiellement positive, les deux radicaux étant précédés du signe +. On trouve pour carré

$$1 + m + \sqrt{1 + 2m} + 1 + m - \sqrt{1 + 2m} + 2\sqrt{(1 + m)^2 - (1 + 2m)}\,;$$

la quantité sous le dernier radical se réduit à m^2; sa racine est donc *la valeur absolue* de m. Si m est positif, cette racine est m, le carré du premier membre est donc

$$2(1 + m + m) = 2(1 + 2m)$$

et l'identité proposée a bien lieu. Mais il n'en est pas de même *si m est négatif*, car $\sqrt{m^2}$ doit alors être remplacée par $-m$, le carré du premier membre est dans ce cas

$$2(1 + m - m) = 2.$$

On peut constater qu'il en est ainsi pour $m = -\frac{1}{2}$; la quantité $1 + 2m$ est alors nulle : il est évident que dans ce cas l'identité proposée n'a pas lieu : le premier membre se réduit à $2\sqrt{1+m} = \sqrt{2}$ et le second membre est nul.

L'énoncé de la question doit donc être modifié comme il suit : *Vérifier que l'on a identiquement :*

$$\text{si } m > 0 \quad \sqrt{1+m+\sqrt{1+2m}} + \sqrt{1+m-\sqrt{1+2m}} = \sqrt{2} \times \sqrt{1+2m},$$

$$\text{si } m < 0 \quad \sqrt{1+m+\sqrt{1+2m}} + \sqrt{1+m-\sqrt{1+2m}} = \sqrt{2}.$$

EXAMENS ET CONCOURS DE 1920 (*Suite.*)

EXAMENS ORAUX des ÉCOLES NATIONALES D'ARTS ET MÉTIERS (*)

Géométrie (*Suite*).

214. — [**4289**(**)]. On donne un triangle équilatéral ABC et on trace le cercle tangent en B et C aux côtés AB et AC. Sur l'arc BMC de ce cercle, intérieur à ABC, on prend un point quelconque et l'on trace les droites BM, CM, qui coupent respectivement AC, AB en D et E.

1° Montrer que l'on a

$$AE + AD = \text{constante}.$$

2° Soit I le milieu de l'arc BC. On a

$$ID = IE.$$

215. — Dans un trièdre, la plus grande face est plus petite que la somme des deux autres.

---

216. — Par quatre points de l'espace qui ne sont pas dans un même plan, on peut faire passer une sphère et une seule.

217. — Construire un carré équivalent à un polygone donné.

218. — Soient O, O′ les centres du cercle inscrit à un triangle ABC et du cercle exinscrit à ce triangle dans l'angle A, D et D′ les projections orthogonales de O, O′ sur BC. Montrer que l'on a, en supposant $AC > AB$,

$$O'D'.OD = BD.D'C.$$

---

219. — Soit un triangle ABC et un point I intérieur. Montrer que l'on a

$$BI + IC < BA + AC.$$

220. — Définition de la pyramide régulière. Relation entre l'apothème de la pyramide, sa hauteur et l'apothème de la base.

221. — On donne deux points A et B situés de chaque côté d'une droite D. Déterminer sur AB un point I tel que la différence $IA - IB$ soit maximum.

---

222. — Le produit des diagonales d'un quadrilatère inscriptible est égal à la somme des produits des côtés opposés.

223 . — Une corde AB d'un cercle est égale au côté de l'hexagone; on trace la corde AC égale au côté du décagone régulier convexe; calculer la longueur de la corde CB.

224. — Démontrer que deux perpendiculaires à un même plan sont parallèles.

(*) Les questions posées à un même candidat sont comprises entre deux traits.

(**) Ce second numérotage ne porte que sur les questions dont nous avons l'intention de donner ici une solution. Ces questions seront résolues comme exercices; les abonnés ne devront pas en envoyer de solutions.

225. — Cas de similitude des triangles.

226. — Soit un cercle de diamètre AB. Par A on mène deux cordes quelconques AM, AN, qui rencontrent respectivement en M′, N′ une perpendiculaire au diamètre AB. On trace MN. Démontrer que les triangles AMN et AM′N′ sont semblables.

227. — Deux trièdres sont égaux lorsqu'ils ont leurs trois dièdres respectivement égaux et disposés de la même façon.

---

228. — Cas d'égalité des triangles.

229. — Étant donné un triangle ABC on construit sur AC, AB, extérieurement, les triangles équilatéraux ACB′ et ABC′. Soit D l'intersection de BB′ et de CC′. Montrer que l'angle BDC est égal à 120°.

230. — Volume du tronc de pyramide.

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

4290. — Un marchand achète du drap et de la toile, en tout 70ᵐ pour la somme de 595ᶠ. Le mètre de drap coûte quatre fois autant que le mètre de toile et le nombre de mètres de drap est égal à quatre fois celui des mètres de toile. Le marchand devait payer son achat comptant, mais il obtient de se libérer en deux billets, l'un de 400ᶠ payable dans un mois; l'autre payable dans trois mois. — Calculer : 1° les nombres de mètres de drap et de toile; 2° le prix du mètre de chaque étoffe; 3° la valeur nominale du 2ᵉ billet, le taux de l'escompte de chaque billet étant 6 %.

(*B. S., Paris, aspirants, octobre* 1920.)

4291. — Une ville a racheté, le 1ᵉʳ janvier 1920, un réseau de tramways à la compagnie exploitante et s'engage à lui verser, à titre d'indemnité, 10 annuités successives de 20 000ᶠ chacune, payables au début de chaque année, la 1ʳᵉ étant payée le 1ᵉʳ janvier 1920.

Le même jour, elle cède l'exploitation de son réseau à un nouveau concessionnaire, qui s'engage à payer à la ville 10 autres annuités payables à la fin de chaque année, la 1ʳᵉ, le 31 décembre 1920.

Quel doit être le montant de cette dernière annuité pour que, au 31 décembre 1930, la ville ait réalisé un bénéfice de 15 820ᶠ, les calculs étant faits à intérêts composés au taux de 6 % ?

(*B. S., Toulouse, aspirants, octobre* 1920.)

4292. — La locomotive d'un train de charbon, allant de la mine à la gare, est construite de telle sorte que le foyer se charge automatiquement toutes les fois que les grandes et les petites roues se trouvent dans la même situation respective qu'au départ. Ces roues ont 2ᵐ,10 et 1ᵐ,47 de diamètre.

Un appareil compteur de tours marque 2 100 tours des grandes roues pour la durée du trajet. La vitesse moyenne du train est 25ᵏᵐ,200 à l'heure et on sait que la consommation en houille est 300ᵏᵍ par heure et par mètre carré de foyer. Le foyer mesure 2ᵐ²,40 de surface.

1° Sachant qu'il se produit une charge au départ, combien le distributeur laissera-t-il passer de kilogrammes de houille à chaque charge?

2° La chaudière cylindrique ayant 4ᵐ de long et devant toujours contenir au moins les $\frac{2}{3}$ de son volume d'eau, quel diamètre devra-t-on lui donner?

On sait qu'un kilogramme de houille peut vaporiser 8ᵏᵍ d'eau. On prendra $\pi = \frac{22}{7}$. (On admettra que la chaudière est pleine au départ.)

(*B. S., Lyon, aspirantes, octobre* 1920.)

4293. — Une prairie a la forme d'un trapèze ABCD dont la grande base AB mesure 264ᵐ et la hauteur 75ᵐ et dont les deux angles à la base valent respectivement : l'angle A, 45°; l'angle B, 60°.

2° Calculer la superficie de la propriété à 1 centiare près.

3° Par quel point P de la grande base faut-il mener une hauteur pour partager la prairie en deux surfaces équivalentes? Calculer la distance AP à 1 décimètre près.

(*B. S., Strasbourg, aspirants, octobre* 1920.)

Le Rédacteur-Gérant : HENRY VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie PAUL BRODARD.

23e Année. 15 Juillet 1921. N° 20.

L'Éducation Mathématique

Paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet inclusivement.

PRIX DU NUMÉRO : France et Colonies, 0 fr. 60. Étranger, 0 fr. 70.
ABONNEMENT ANNUEL : France et Colonies, 10 fr. Étranger, 12 fr.
Tous les abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, l'on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction : Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Abonnements : Librairie **Vuibert**, Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e.
Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais il est préférable d'envoyer des mandats.

SUR LES « VRAIES VALEURS »

1. Une expression telle que

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b}$$

a une valeur numérique qui peut se calculer sans difficulté, toutes les fois que l'on donne à a et à b des valeurs numériques quelconques, *mais différentes*. Dans le cas où l'on donnerait à a et à b des valeurs égales, les deux termes de la fraction considérée devenant nuls simultanément, la valeur numérique de cette fraction serait indéterminée.

En effet, la valeur numérique d'une fraction algébrique est le nombre dont le produit par la valeur numérique du dénominateur est égal à la valeur numérique du numérateur. Or, comme le produit de deux facteurs dont l'un est nul est égal à zéro, quel que soit l'autre (pourvu qu'il soit fini), le nombre dont le produit par zéro est zéro n'est pas déterminé.

Cependant on peut remarquer que, tant que a est différent de b, on a identiquement

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{a - b} = a^2 + ab + b^2,$$

de sorte que si b est très peu différent de a, la valeur de la fraction et celle de $a^2 + ab + b^2$ sont égales. Or, si b devient égal à a, l'expression entière, dont le calcul ne cesse pas d'être possible, devient égale à $3a^2$. Il est naturel, puisque les expressions fractionnaire et entière précédemment considérées étaient égales, tant que $a \neq b$, de prendre pour valeur de la fraction, lorsque $a = b$, la valeur de l'expression entière. C'est cette valeur que l'on appelle souvent la *vraie valeur* de la fraction pour $a = b$.

2. On pourrait donner beaucoup d'autres exemples. Un seul suffit pour bien préciser ce qu'on entend habituellement par « vraie valeur ». Nous voudrions montrer que si, dans la majorité des cas, on est conduit, par la considération des vraies valeurs à des solutions de certains problèmes dans les cas limites, il peut arriver aussi que ces solutions ne soient que des solutions très particulières. Pour éviter de faire des théories qui seraient trop abstraites, parce qu'elles seraient trop générales, nous allons étudier deux problèmes précis, qui donneront à nos lecteurs une idée nette de la façon dont il faut traiter des questions de ce genre.

3. **Problème.** — *Déterminer les coefficients p et q du polynome $P(x) \equiv x^3 + px + q$, de façon qu'il soit divisible par le produit*

$$(x - a)(x - b).$$

D'après un théorème connu, si $a \neq b$, les conditions nécessaires et suffisantes pour que $P(x)$ soit divisible par le produit $(x - a)(x - b)$ sont que ce polynome s'annule quand on y remplace x par a ou par b. Si l'on écrit

$$P(a) = a^3 + pa + q = 0,$$
$$P(b) = b^3 + pb + q = 0,$$

on en tire facilement la valeur de p en retranchant une équation de l'autre : on trouve

$$p = -\frac{a^3 - b^3}{a - b};$$

p étant exprimé en fonction de a et de b, on en déduit la valeur de q au moyen d'une des deux équations du système.

Dans le cas où $a = b$, on obtient pour « vraie valeur » de p, $p = -3a^2$, qui donne $q = 2a^3$.

Or, dans ce cas, le problème pouvait s'énoncer ainsi : *déterminer les coefficients p et q du polynome $x^3 + px + q$, de façon qu'il soit divisible par $(x - a)^2$*; les valeurs qu'on vient d'obtenir pour p et q fournissent bien la solution de ce problème particulier.

4. On aurait pu écrire autrement que le polynome $P(x)$ est divisible par $(x - a)(x - b)$ en écrivant qu'il est le produit de $(x - a)(x - b)$ par un binome du premier degré, dont le premier terme est évidemment x : on peut écrire ce binome $x - c$. Il faut donc trouver p, q et c de façon à satisfaire à l'identité

$$x^3 + px + q \equiv (x - a)(x - b)(x - c);$$

en développant le produit qui figure dans le second membre, on trouve

$$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc;$$

pour identifier, on écrit que les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres sont égaux, ce qui fournit le système

$$a + b + c = 0,$$
$$ab + bc + ca = p,$$
$$abc = -q,$$

qui donne

$$c = -(a + b),$$
$$p = ab + c(a + b) = ab - (a + b)^2 = -(a^2 + ab + b^2),$$
$$q = -abc = ab(a + b);$$

si a et b deviennent égaux, on trouve

$$c = -2a, \qquad p = -3a^2, \qquad q = 2a^3.$$

Or, à aucun moment on n'a supposé dans le raisonnement ou dans le calcul que a fût différent de b : la solution trouvée est donc bien certainement la solution du problème dans le cas où $a = b$.

5. **Problème.** — *Déterminer les coefficients a et b du polynome $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$, de façon qu'il soit divisible par $x^2 + px + q$, p et q étant donnés.*

Le quotient du premier polynome par le second, si la division est possible, est certainement de la forme x^2+rx+s. Si l'on écrit que l'on a identiquement

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1\equiv(x^2+px+q)(x^2+rx+s),$$

on obtient, en égalant les coefficients des puissances de x dans les deux membres, le système d'équations

$$\begin{aligned} a&=p+r,\\ b&=q+pr+s,\\ a&=ps+qr,\\ 1&=qs. \end{aligned}\qquad(1)$$

La première équation donne $r=a-p$, la dernière $s=\frac{1}{q}$; ces valeurs, portées dans la troisième équation, donnent

$$a=\frac{p}{q}+(a-p)q,$$

d'où

$$a=\frac{p(1-q^2)}{q(1-q)}=\frac{p}{q}(1+q),$$

$$b=q+p\frac{p}{q}+\frac{1}{q}=\frac{p^2+q^2+1}{q};$$

nous trouvons ces expressions en divisant par $1-q$ les deux termes de la valeur de a, puis en calculant b avec l'expression de a ainsi simplifiée.

6. Si l'on fait $q=1$, on obtient comme vraie valeur de a : $a=2p$ et pour b, $b=p^2+2$. Dans ce cas il est facile de voir que l'on a $r=p$ et $s=1$, de sorte que le polynome demandé est

$$x^4+2px^3+(p^2+2)x^2+2px+1,$$

qui est le carré de x^2+px+1.

On serait donc conduit, par la considération des « vraies valeurs » à une solution unique et déterminée, ne contenant aucune constante arbitraire. Or, si l'on se reporte au système d'équations (1), on voit qu'il devient, dans le cas où $q=1$,

$$\begin{aligned} a&=p+r,\\ b&=1+pr+s,\\ a&=ps+r,\\ 1&=s; \end{aligned}$$

en tenant compte de la dernière équation, la première et la troisième se réduisent à une seule, $a=p+r$, et il ne reste pour déterminer a, b et r que deux équations

$$a=p+r,\qquad b=2+pr,$$

d'où l'on déduit

$$b=2+ap-p^2;$$

on en conclut que l'on a, *quel que soit* a,

$$x^4+ax^3+(2+ap-p^2)x^2+ax+1$$
$$\equiv(x^2+px+1)[x^2+(a-p)x+1].$$

Le problème admet donc une infinité de solutions, dépendant d'un paramètre arbitraire a : la solution obtenue en prenant $a=2p$ est une solution particulière et non la solution générale.

Cet exemple montre que la considération des « vraies valeurs » pour « lever l'indétermination » ne doit être employée que lorsqu'on a des raisons de considérer le problème proposé comme effectivement déterminé, dans le cas limite. On doit examiner si l'indétermination présentée par les formules est apparente ou effective.

Ch. BIOCHE

ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS

Concours de 1920.

Cours techniques secondaires : 1re année.

4264. — *Quand on divise un nombre par 175, on a 73 comme reste; si on le divise par 177, on a 11 comme reste, le quotient restant le même. Quel est le dividende et quel est le quotient? (La solution algébrique ne sera pas admise.)*

La différence entre les produits d'un même nombre par 175 et par 177 est le double de ce nombre.

D'autre part cette différence est égale à celle des restes, qui est $73-11=62$. Donc le quotient est 31.

Le nombre demandé est

$$31\times177+11=31\times175+73=5\,498.$$

(Auguste CHATELIER, école nationale d'Indret.)

Solution algébrique. — Désignons par x le nombre, par y le quotient, qui est le même pour les deux divisions. L'énoncé fournit immédiatement les équations

$$x=177y+11,$$
$$x=175y+73;$$

en égalant les valeurs de x, on trouve

$$2y=73-11=62.$$

Remarque. — Cette solution ne diffère de la solution arithmétique que par la notation.

[Bonnes solutions : Mlles G. Boulay; F. Negretzu; MM. F. Bailbé; W. Burniat; Bussière; J. Chabaud; R. Chasselut; M. Chatelier; G. Dargnaud; G. Démaret; J. Devisme; E. Epailly; P. Faucheux; Forceville; F. A. Gilly; A. Goëlo; P. Gonot; R. Guiot; R. Hénin; Le Minous-Trébouta; M. Lhoumeau; R. Loret; P. Louon; R. Marchant; G. N. à Bruxelles; Ch. Norgolet; G. Olivier; R. D. Pantz; L. G. Papon; J. Patat; E. Paté; A. Popu; Rabello; R. Reynard; F. Richard; A. Robba; M. Robineau; M. Roy; A. Salomon; J. Schilling; H. Sciaud; Ch. Sol; Stoeffler.]

4265. — *Le périmètre d'un terrain rectangulaire mesure 126^{m} et la longueur a 7^{m} de plus que la largeur. Au milieu du terrain, on creuse un bassin circulaire de $2^{m},50$ de rayon et de 6^{dm} de profondeur. Puis on répand la terre extraite sur la partie restante du terrain. Calculer à 1^{mm} près l'épaisseur moyenne de la couche de terre répandue, en admettant que la terre remuée augmente de $\frac{1}{5}$ du volume qu'elle avait. Évaluer en décalitres le volume du bassin.*

Si la longueur était diminuée de 7^{m}, le terrain serait carré, son périmètre serait $126-2\times7=112$.

Chacun des côtés aurait $\frac{1}{4}.112=28^{m}$ de longueur.

Les dimensions du rectangle sont donc 28^{m} et 35^{m}. Sa surface est $28\times35=980^{m2}$.

Le volume de terre extrait du bassin est

$$\pi\times\overline{2,5}^2\times0,6=11^{m3},7810=1\,178^{dal},1,$$

(calcul fait en prenant $\pi=3,1416$). La surface du bassin est $\pi\times\overline{2,5}^2=19^{m2},635$. Il reste, pour épandre les terres, une surface de $980-19,635=960,365$.

Le foisonnement de la terre augmente le volume de 2 dixièmes,

le volume devient donc $14^{m3},1372$; divisé par une surface de $960^{m2},365$, il donne une hauteur égale à

$$14,1372 : 960,365 = 0^{m},014 \text{ par défaut} = 14^{mm},$$
$$= 0^{m},015 \text{ par excès} = 15^{mm}.$$

(La dernière valeur étant la plus approchée.)

(E. PATÉ.)

[Bonnes solutions : Mlles G. Boulay; F. Negretzu; MM. F. Bailbé; O. Bastin; J. Cartouzou; J. Chabaud; L. Chapolon; A. Chatelier; M. Chatelier; G. Dargnaud; J. Devisme; E. Epailly; Forceville; F. A. Gilly; A. Goëlo; L. Guidel; R. Hénin; R. Henry; Le Minous-Trébouta; L. Lhoumeau; R. Loret; P. Louon; R. Marchant; A. Maréchal; J. Mazeau; J. Navel; Ch. Norgelet; G. Olivier; L. G. Papon; Ch. Parès; J. Patat; R. Pomeyrol; A. Popu; Rabelle; Robba; M. Robineau; M. Roy; Salomon; M. Salomon; J. Saelinck; Stoeffler; J. T., école d'agriculture du Caire.]

4266. — *Construire un parallélogramme de telle manière que deux sommets opposés soient en deux points donnés* A *et* B *et que les deux autres soient sur une circonférence donnée* (O).

Soient A et B les sommets donnés, C et D les sommets qui sont sur le cercle (O).

Pour que la figure ACBD soit un parallélogramme, il faut et il suffit que le milieu de CD coïncide avec celui de AB. Le point I, milieu de CD, est donc connu. D'autre part, si I est le milieu de CD, la corde CD est perpendiculaire à I.

La solution du problème est donc fournie par la construction suivante : déterminer le milieu I de AB, et mener par I la perpendiculaire à OI. Si le point I est intérieur au cercle (O), cette corde le coupera en deux points, symétriques par rapport à I, qui seront les sommets C et D cherchés.

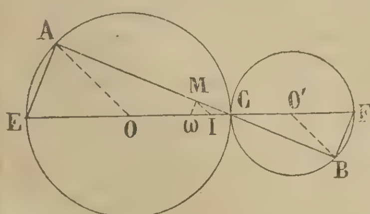
Condition de possibilité : il faut que I, milieu de AB, soit intérieur au cercle O.

(G. OLIVIER, P. T. T.)

[Bonnes solutions : Mlle F. Négretzu; de MM. A. F.; F. Bailbé; W. Burniot; J. Chabaud; L. Chapelon; M. Chatelier; J. Devisme; L. Exbrayat; P. Faucheux; G. Fouché; G. N., à Bruxelles; P. Gonot; A. Grall; R. Guiot; R. Hénin; Henry René; P. Lebrun; R. Legrand; Le Minous-Trébouta; M. Lhoumeau; P. Louon; R. Marchant; J. Mazeau; R.-D. Pantz; E. Passebois; E. Paté; J. Périn; A. Robba; J. Schilling; R. Vallé; J. Voyer; R. Weinzaepfel.]

Cours techniques secondaires : 2e année.

4267. — *On donne deux cercles tangents en* C, *une sécante* ACB. *Trouver le lieu de* M *milieu de* AB *quand* ACB *pivote autour de* C.



Soient E et F les points diamétralement opposés à C. A et B sont respectivement les projections de E et de F sur la corde ACB.

Le milieu M de AB est donc la projection du milieu ω de EF.

Il en résulte que le point M décrit le cercle (I) qui a ωC pour diamètre. Quand A parcourt le cercle (O) entier, M parcourt le cercle (I).

(E. PASSEBOIS, à Saint-Jean de Serres.)

Autre solution. — Le point C est centre de similitude (intérieur) des deux circonférences : les rayons OA et O'B sont donc parallèles.

Joignons M au milieu I de la ligne des centres, MI est parallèle à OA, et le triangle MIC est semblable à AOC. Il est donc isocèle; MI = IC, le point M décrit le cercle dont I est le centre et IC le rayon.

[Bonnes solutions : MM. A. F.; G. Bastin; W. Burniot; J. Chabaud; M. Chambost; L. Chapelon; M. Chatelier; G. Clément; M. Courboulay; G. Démaret; J. Devismo; L. Exbrayat; G. Février; G. Fouché; Gabay; P. Gonot; A. Grall; R. Guiot; R. Henry; G. Houalet; G. Laspougeas; P. Lebrun; R. Legrand; Le Minous-Trébouta; M. Choumeau; P. Louon; R. Marchant; Y. Maurice; J. Mazeau; G. Olivier; L.-G. Papon; E. Paté; J. Périn; A. Popu; F. Richard; R. Reynard; M. Roy; Salomon; H. Sciaud; H. Sebban; Ch. Sol; R. Vallé; J. Voyer; R. Weinzaepfel.]

4268. — *Résoudre*

$$x + y + z = 0,$$
$$\frac{a^2x}{a-d} + \frac{a^2y}{a-d} + \frac{b^2z}{b-d} = 0,$$
$$\frac{ax}{a-d} + \frac{ay}{a-d} + \frac{bz}{b-d} = 0.$$

A la première inspection, on remarque que dans les trois équations on peut prendre pour inconnue $x+y$, car elles s'écrivent

$$(x+y) + z = 0,$$
$$\frac{a^2}{a-d}(x+y) + \frac{b^2z}{b-d} = 0,$$
$$\frac{a}{a-d}(x+y) + \frac{bz}{b-d} = 0,$$

et, comme $x + y = -z$, les deux dernières deviennent

$$z\left(\frac{a^2}{a-d} - \frac{b^2}{b-d}\right) = 0,$$
$$z\left(\frac{a}{a-d} - \frac{b}{b-d}\right) = 0,$$

ou

$$z\frac{(a-b)}{(a-d)(b-d)}[ab - (a+b)d] = 0,$$
$$z\frac{(a-b)d}{(a-d)(b-d)} = 0.$$

Si $(a-b)d$ et $(a-b)[ab-(a+b)d]$ sont deux quantités différentes de zéro, le système n'a pas d'autre solution que $z = 0$, $x + y = 0$. Il est donc *indéterminé*, l'une des inconnues x et y pouvant être choisie arbitrairement.

Si ces deux quantités sont nulles, z peut être pris arbitrairement, ainsi que l'une des inconnues x et y, l'autre n'est assujettie qu'à vérifier la condition $x + y + z = 0$.

Les deux coefficients sont nuls :

1° si $a = b$, quel que soit d;

2° si $d = 0$, et si l'un des deux nombres a et b est nul, quel que soit l'autre. Mais dans ce cas les coefficients sont indéterminés.

Le système proposé a donc toujours une infinité de solutions : une des inconnues (x ou y) est arbitraire dans le premier cas, deux inconnues (x et z ou bien y et z) sont arbitraires dans le second.

(D. F., à Saint-Pons, Hérault.)

N. B. — Plusieurs abonnés ont trouvé des cas d'impossibilité : il n'en pouvait pas exister, car le système admet la solution $x = y = z = 0$.

[Bonnes solutions : Mlle F. Negretzu; MM. J. Chabaud; J. Devisme; P. Faucheux; P. Louon; R. Marchant; G. Olivier; R. Reynard; A. Robba.
Assez bonnes solutions : MM. J. Mazeau; Gabay.]

Section administrative : 1re année.

4269. — *Soient, dans le plan de la feuille*, OA, OB, OC *trois droites telles que l'on ait*

$$\widehat{COA} = \widehat{AOB} = 60°.$$

On abaisse d'un point quelconque P, *situé dans l'angle* AOB *les*

perpendiculaires PQ, PR, PS *respectivement sur* OA, OB, OC. *Montrer que l'on a, quel que soit* P,

$$PQ + PR = PS.$$

Menons par P la parallèle à OC; elle forme, par hypothèse, avec OA et OB, un triangle équilatéral BOA.

La distance PS, qui est celle des deux parallèles OC et BA, est égale à OH, hauteur du triangle équilatéral.

Menons par A la parallèle AD à OB, le prolongement de RP la coupe en L; les angles OAB, BAD, DAx sont égaux à 60°, AB est bissectrice de l'angle OAD, P est équidistant de AD et de AO. Il en résulte que

$$RP + PQ = RP + PL = RL.$$

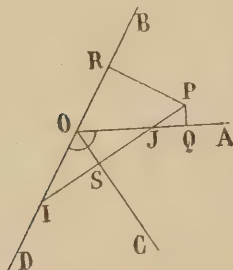
RL est égal à la hauteur AK, et AK = OH.

Donc on a bien $\qquad RP + PL = PS.$

Remarque I. — L'énoncé de cette question peut recevoir deux formes assez intéressantes que quelques-uns de nos abonnés ont signalées.

1° Si l'on prolonge BO au delà de O, et PS au delà de S, ces droites qui se rencontrent, forment un triangle isocèle IOJ, dont l'angle en O est 120°; le point S est le milieu de IJ : on voit donc que si l'on prend un point P sur le prolongement de la base, *la somme des distances* de P aux deux côtés égaux est égale à la distance au milieu S de la base.

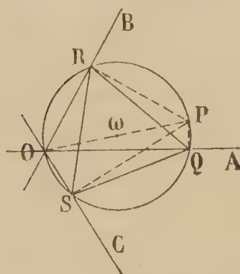
(Jean MAZEAU, à Montluçon.)



2° Si l'on prolonge PQ des deux côtés, jusqu'à la rencontre de OC et de OB en E et F, on forme un triangle isocèle dont l'angle en O est 120°. P est un point de la base : on voit que *la différence des distances* de P aux côtés égaux du triangle est égale à la distance au milieu Q de la base.

(E. PATÉ.)

Remarque II. — Quelques abonnés ont montré que ce théorème est une conséquence du théorème de Ptolémée. Cette démonstration est excellente en soi, toutefois on doit préférer une démonstration qui fait découler la propriété de théoremes du 1er livre.



Les points Q, R et S appartiennent au cercle (ω) qui a OP pour diamètre.

Ils forment un triangle équilatéral sur ce cercle, car les cordes RS, SQ, QR sont vues de O sous des angles de 60° ou de 120°.

En appliquant le théorème de Ptolémée au quadrilatère PRSQ, dont RQ et PS sont des diagonales, on trouve

$$RQ \times PS = RS \times PQ + RP \times QS,$$

or

$$RQ = RS = QS;$$

il reste, en divisant par ce facteur,

$$PS = PQ + QS.$$

(G. FÉVRIER, école primaire supérieure de Rambouillet.)

[Bonnes solutions : Mlle F. Négretzu; MM. A. F.; H. Aubert; O. Bastin; J. Cartouzou; J. Chabaud; M. Chambost; L. Chapelon; R. Chasselut; Cl. Clément; M. Courboulay; P. Créange; G. Démaret; J. Devisme; E. Epailly; L. Exbrayat; P. Faucheux; G. Février, G. Fouché; Gabay; G. N., à Bruxelles; P. Gonot; A. Grall; E. Guicheney; R. Guiot; G. Houalet; J. T.; G. Laspougeas; Le Minous-Trébouta; P. Lebrun; R. Legrand; P. Louon; R. Marchant; Y. Maurice; J. Navel; Ch. Norgelet; G. Olivier; L.-G. Papon; Ch. Parès; E. Passebois; J. Patat; J. Périn; R. Reynard; F. Richard; A. Robba; M. Robineau; A. Rosette; H. Sciaud; H. Sebban; R. Weinzaepfel.]

4270. — *Lieu géométrique des points tels que la somme de leurs distances à deux plans non parallèles P et Q est constante.*

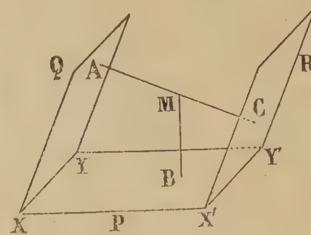


FIG. 1.

Soit M un point tel que la somme des distances aux plans P et Q soit égale à la longueur donnée l,

$$MA + MB = l.$$

Prolongeons AM de la longueur MC = MB. On aura

$$AC = l.$$

Donc C appartient à un plan R, parallèle au plan Q, et situé à une distance de ce plan égale à l.

Pour que la somme des distances d'un point M aux plans P et Q soit égale à l, il faut et il suffit, *s'il est entre les plans* Q et R, qu'il soit équidistant des plans P et R, c'est-à-dire qu'il appartienne à un plan bissecteur du dièdre (P, R). En effet, si M est entre les plans Q et R, une perpendiculaire à R et Q, menée par M les coupe en A et C, *séparés* par M : il en résulte que AM + MC = l; pour que AM + MB = l, il faut et il suffit que MB = MC.

FIG. 2.

La figure 2 est celle qu'on obtient en coupant les plans Q et P par un plan perpendiculaire à leur intersection. On peut mener deux plans R_1 et R_2 parallèles à Q et à une distance l. Leurs traces sur le plan du tableau sont les droites R_1 et R_2.

Les points *situés entre* Q et R_1, équidistants de R_1 et de P sont dans l'un ou l'autre des plans bissecteurs du dièdre (P, R_1); ces plans coupent le plan du tableau suivant les lignes 1 et 4.

Les points situés entre R_2 et Q, équidistants de P et de R_2 sont dans les plans bissecteurs dont les traces sont les droites 2 et 3.

Le lieu complet est composé de quatre parties de plan, formant un prisme droit illimité, dont la base est le rectangle EFGH.

Si le point M est pris dans le prolongement d'une des faces de ce prisme, au delà des arêtes, ce n'est plus la somme des distances qui est égale à l, mais leur différence.

Remarque. — Tous nos abonnés ont résolu cette question en la ramenant à une question de géométrie plane. Pour cela, ils ont mené par M un plan T perpendiculaire à l'intersection des plans P et Q, et ils ont remarqué que les distances MA et MB, qui sont dans le plan T sont les distances de M aux droites suivant lesquelles le plan T est coupé par P et Q.

[Bonnes solutions : Mlle F. Négretzu; MM. A. F.; J. Cartouzou; J. Chabaud; J. Devisme; E. Epailly; Gabay; G. N. à Bruxelles; R. Guiot; R. Hénin; Le Minous-Trébouta; P. Louon; R. Marchant; J. Mazeau; J. Périn; R. Reynard; F. Richard.]



ARITHMÉTIQUE

4194. — *Une colonne d'infanterie s'avance le long d'une route à la vitesse de 4^{km} en 50 minutes; le chef de l'avant-garde envoie à 8^h30 un bicycliste porter un pli au chef du gros de la colonne, qui marche à $5^{km},300$ en arrière de lui. Le bicycliste marche à raison de 15^{km} à l'heure à l'aller et de 12^{km} au retour. Il remet son pli au destinataire, qui le retient immobile pendant 5 minutes. A quelle heure sera-t-il de retour près du chef de l'avant-garde, sachant que la colonne s'est arrêtée de 8^h50 à 9 heures?*

(*B. S., Toulouse, aspirants, mars* 1920.)

Quand le cycliste se porte au-devant de la colonne, à la vitesse de 15^{km} à l'heure, soit de 250^m à la minute, la colonne parcourant 80 mètres par minute, la distance qui sépare le cycliste du gros diminue de $250 + 80 = 330^m$ par minute; cette distance étant de $5\,300^m$ à 8^h30 est réduite à zéro en $\frac{530}{33}$ minutes, ce qui fait $16^m\,4^s$, environ. Le cycliste remet le pli à $8^h46^m4^s$; il repart à $8^h51^m4^s$.

Entre 8^h30 et $8^h46^m4^s$, l'avant-garde a pris sur le cycliste une avance de $5^{km},300$, car la distance qui sépare le cycliste de l'avant-garde, à $8^h46^m4^s$ est égale à l'intervalle constant qui existe entre l'avant-garde et le gros.

Puisque le cycliste ne rejoint l'avant-garde qu'après la halte horaire, le moment où cette halte a lieu n'importe pas; cette halte fait perdre à l'avant-garde 800^m d'avance. On peut supposer qu'elle se fait entre $8^h46^m4^s$ et $8^h56^m4^s$.

L'avant-garde avait $5\,300^m$ d'avance, le cycliste, qui ne s'est arrêté que 5 minutes, en a d'abord, en 5 minutes, regagné 1 000; au moment où l'avant-garde se remet en marche, la distance qui les sépare n'est plus que $5\,300 - 1\,000 = 4\,300$. Elle diminue ensuite de $200 - 80 = 120^m$ par minute, et deviendra nulle au bout de $4\,300 : 120 = 35^m50^s$, soit à $8^h56^m4^s + 35^m50^s = 9^h31^m54^s$.

(RENÉ LEMARCHAND, à Rouen.)

N.B. — Il a été donné très peu de solutions exactes; la combinaison de ces arrêts et de ces mouvements en sens contraires présentait certaines difficultés.

Quelques correspondants ont donné une solution graphique. L'idée est excellente; la méthode graphique s'applique particulièrement bien à ce genre de questions.

[Bonnes solutions : Mlles G. Boulay; G. David; MM. Bruneteau; M Castelain; R. Chasselut; R. Collomb; C. Crópeau; G. Démaret; J. Devisme; F. Gilly; A. Goëlo; Goicoechea; L.-J., à L'Isle; L. Kerleroux; P. Louon; F. Maitre; R. Marchant; H. Micard; Ch. Norgelet; G. Olivier; L.-G. Papon; E. Paté; G. Pichon; E. Pinlong; Philizot; F.-R., à Ajaccio; M. Siraud; L. Soulier; P. Tessier; G. Vaillant; G. Vimbert.

Assez bonnes solutions : MM. G. Bitaino; A. Bordes; J. Bugnard; B. Charles; G. Clément; M. Courboulay; J. Forceville; H. Forait; R. Guiot; R. Ladret; M. Lhoumeau; A. Martin; Y. Maurice; Ménéchal; R. Morel; C. Pagès; E. Sage.]

VARIÉTÉ

Sur le style mathématique (*fin*).

Après le vocabulaire, un des éléments du style, c'est la disposition : nous entendons par là deux choses, l'arrangement des idées, c'est-à-dire la disposition de l'ensemble, et l'arrangement des phrases et des mots, c'est-à-dire la disposition des détails.

Le plan a une grande influence sur le style : s'il est bien fait, si les idées se suivent logiquement, les phrases se formeront naturellement. On pourrait dire, en paraphrasant deux vers de Boileau que ce qui est bien conçu s'énonce clairement, que les mots pour le dire arrivent aisément.

Quand on recherche une démonstration, les idées ne se présentent en général pas dans l'ordre logique où elles pourront s'enchaîner; elles surgissent on ne sait comment et on ne sait d'où. Il n'y a pas de méthode pour apprendre à avoir des idées: c'est une faculté naturelle, que l'étude développe, que l'exercice fortifie, mais que ni l'une ni l'autre ne peuvent créer. Nous supposons que l'on a trouvé toutes les idées qui, mises dans l'ordre de déduction logique, formeront une démonstration menant des hypothèses aux conclusions. Il ne reste plus, quand on sent que la démonstration est faite, qu'à l'écrire. Ici l'on rencontre certaines difficultés. Quelques-uns s'attachent à exposer les idées dans l'ordre où elles se sont présentées : ils se croient obligés de faire repasser le lecteur par le chemin qu'ils ont suivi, sans observer que ce chemin est parfois détourné, et n'a conduit au but qu'après des tâtonnements; d'autres, frappés de l'importance d'un certain point de la démonstration et désireux de le mettre en lumière, commencent par exposer ce point essentiel; ils s'aperçoivent ensuite que pour continuer il leur manque certaines choses secondaires, qu'ils ont négligé d'étudier. Il faut alors s'arrêter, revenir en arrière : de là des phrases incidentes, des parenthèses, qui ralentissent le cours du raisonnement, l'alourdissent, détruisant en partie l'effet qu'on avait voulu produire.

Il faut préparer la marche en avant en se munissant de tout ce qui sera nécessaire; ce sont, pour ainsi dire, des travaux d'approche que l'on exécutera à loisir, sans indiquer ses intentions : quand on est en vue du but, après avoir écarté de la route tous les obstacles, on foncera dessus directement. Ce style mathématique, qui prépare son action comme un général prépare une attaque, en s'assurant un certain nombre de positions importantes, c'est-à-dire en démontrant tout ce dont il serait possible de douter, puis en faisant agir ses batteries au moment opportun, c'est celui de Pascal, c'est la logique irrésistible de ses *Provinciales*. Tous les critiques littéraires s'accordent à attribuer aux études géométriques de ce grand écrivain la qualité de son style.

Nous nous adressons maintenant à ceux qui ont à exposer un ensemble de résultats d'une certaine étendue, formant un chapitre ou un livre de géométrie. Deux méthodes peuvent être employées. La méthode ancienne a pour modèles les traités de Géométrie écrits selon Euclide : elle consiste à présenter les résultats successifs sous forme d'énoncés, qu'on appelle théorèmes, *qui précèdent les démonstrations*. Avant de nous conduire, l'auteur nous dit où il veut nous mener, il nous montre le but à atteindre, on s'engage ensuite sur la voie où il nous conduit.

L'ordre des théorèmes n'est assujetti qu'à une règle évidente : un théorème ne peut précéder un de ceux sur lesquels il s'appuie. Mais cela ne suffit pas pour déterminer l'ordre de succession : on sait qu'on peut présenter le début de la géométrie de l'espace dans des ordres assez différents. Le lien caché qui unit les théorèmes est difficile à saisir, surtout pour les débutants, et leur enchaînement semble quelque peu arbitraire

Cette apparence d'arbitraire est l'inconvénient du système : les avantages sont assez connus pour qu'il soit superflu d'insister : la stabilité et la rigueur ont toujours été regardées comme une excellente préparation de l'esprit aux disciplines mathématiques. Il est certain aussi que la mémoire y trouve un grand secours.

Une méthode récente consiste à développer une suite logique d'idées et de questions, que l'on résout l'une après l'autre, chaque question résolue en suggérant de nouvelles : la réponse à une question venant à la fin de chaque paragraphe est résumée, mise en formule; ainsi l'énoncé des théorèmes suit la démonstration.

Dans l'esprit de ses défenseurs, cette méthode aurait des propriétés éducatrices bien supérieures à l'ancienne : l'élève ne se bornerait pas à apprendre un cours, comme il apprendrait la Bible ou le Coran, comme une suite de vérités révélées, dans un ordre immuable et seul possible. Il se rendrait compte de la façon dont la science a été faite, des bifurcations qui se sont présentées aux chercheurs. Cela n'est pas douteux : cependant, malgré le talent des auteurs qui ont appliqué ces principes, il semble que le succès n'ait pas répondu à leur attente, et que, pour la masse des auditeurs, la méthode traditionnelle donne moins de déboires. Ce point est encore très discuté, les expériences ne sont pas concluantes.

Comment convient-il de rédiger un énoncé? D'une façon impersonnelle, en prenant pour sujets des verbes (qui seront à l'actif ou au passif), les objets ou concepts qui interviennent dans l'énoncé. Il est important de bien mettre en lumière, dans deux propositions différentes, les hypothèses et la conclusion. Rien ne s'oppose à ce qu'une des propositions soit subordonnée à l'autre.

Les géomètres anciens se servaient volontiers de la forme passive, en français ou en latin.

Ainsi l'énoncé du théorème de la puissance est donné en ces termes dans les éléments d'Euclide publiés en 1692 par Henri Coëts : *Si d'un point* A, *extérieur à un cercle sont menées deux droites, l'une tangente,* AF, *l'autre sécante* ABC, *le rectangle construit sous* (nous dirions avec) *la sécante entière et la partie* AC *comprise entre* A *et le cercle sera égal au carré de la tangente* AE.

On faisait usage du futur là où nous mettons le présent; on supposait que la propriété énoncée devait être l'objet d'une vérification à faire sur une figure qui restait à construire, une fois l'énoncé donné. A la place du passif, nous employons souvent le sujet impersonnel « on », en commençant l'énoncé par l'hypothèse : si d'un point A on mène à un cercle une sécante et une tangente, etc.

Il convient de n'employer aucune personne définie dans un énoncé, et par conséquent de ne pas débuter par : « si je mène à un cercle... » ou : « si nous menons à un cercle... » Il n'en est plus de même quand on passe à la démonstration : on fait à chaque instant soit des hypothèses, soit des constructions, des calculs, des opérations, dont il faut rendre compte. La forme impersonnelle par « on » est malheureusement très en faveur depuis quelques années : elle est brève, c'est certain, mais bien peu élégante.

Il semble que le style le plus naturel, de la part d'un élève qui rédige un devoir, c'est la première personne du singulier : je mène telle droite, je fais telle opération, je suppose ceci ou cela, je vois, etc.

Un maître qui fait un cours pourra employer la première personne du pluriel; elle associe pour ainsi dire les auditeurs à celui qui parle : cela donne un tour vivant: c'est la seule personne qui permette l'impératif, si alerte. Il est moins froid de dire : « Joignons A au point F, abaissons AH perpendiculaire sur Ox et considérons le rapport $\frac{AH}{AF}$ », que de dire : « le rapport des distances du point A au point F et à la droite Ox... » Cependant ce style impersonnel semble préférable si l'on écrit pour une publication quelconque, car l'auteur expose une suite de déductions et n'est plus censé agir et parler devant un auditoire.

C'est peut-être l'habitude de prendre des notes abrégées, la nécessité d'adopter les tournures les plus courtes qui a mis en faveur l'horrible tournure impersonnelle par « on ». Cependant on peut craindre que le mal soit plus grave; la langue française au cours du dernier siècle a perdu l'imparfait du subjonctif, elle est en train de perdre le passé défini (que les méridionaux seuls savent encore utiliser); il se peut qu'elle soit exposée à voir tomber la première personne du pluriel. Il est certain qu'à Paris l'habitude de dire : « Nous, on va à la campagne demain », au lieu de : « Nous irons demain à la campagne » est très répandue, si choquante que cette tournure puisse paraître.

Ceux qui interrogent souvent des élèves s'aperçoivent aussi qu'il est de plus en plus rare d'entendre la première personne du singulier ou du pluriel. « On » triomphe, « on a » dit tout, « on sait que » tient lieu de référence, toute opération est annoncée par « on va faire telle ou telle chose ».

SOLUTIONS D'EXERCICES

4131. — *Résoudre l'équation*

$$4^x + 4^{-x} = \frac{5}{2}.$$

Prenons comme inconnue la quantité $4^x = y$; l'équation proposée devient alors une équation du second degré en y :

$$y^2 + 1 = \frac{5}{2}y,$$

dont les racines sont 2 et $\frac{1}{2}$, inverses l'une de l'autre (comme on pouvait le prévoir, en observant que le produit des racines est $+1$). A ces deux racines, inverses l'une de l'autre, correspondent deux valeurs de l'inconnue x, égales et de signes contraires : c'est une propriété de l'équation qui résulte évidemment de ce qu'elle ne change pas si l'on remplace x par $-x$. Les valeurs de x sont $+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$, car $4^{\frac{1}{2}} = 2$ et $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

4132. — *Vérifier l'identité*

$$4[(x^2 - y^2)ab + (a^2 - b^2)xy]^2 + [(x^2 - y^2)(a^2 - b^2) - 4abxy]^2$$
$$= (x^2 + y^2)^2 \times (a^2 + b^2)^2.$$

En développant les carrés du premier membre, on voit que les doubles produits disparaissent : il reste

$$(x^2 - y^2)^2[(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2] + 4x^2y^2[(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2];$$

la quantité entre crochets est identique à $(a^2 + b^2)^2$, on a donc

$$[a^2 + b^2]^2[(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2],$$

ce qui, en vertu de la même identité, se réduit à

$$(x^2 + y^2)^2 \times (a^2 + b^2)^2.$$

4133. — *Décomposer en facteurs*

$$250(a - b)^3 + 2.$$

Mettons d'abord 2 en facteur, l'expression devient

$$2[5^3(a - b)^3 + 1].$$

Or, on sait que $x^3 + 1$ est décomposable en un produit de deux facteurs :

$$x^3 + 1 \equiv (x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Appliquons cette identité, en remplaçant x par $5(a - b)$, nous obtenons la décomposition algébrique demandée :

$$250(a - b)^3 + 2 = 2[5(a - b) + 1] \times [25(a - b)^2 - 5(a - b) + 1].$$

4162. — *Prouver que, quel que soit a entier, les fractions* $\frac{2a + 1}{3a + 1}$ *et* $\frac{2a + 1}{a(a + 1)}$ *sont irréductibles. Comment obtient-on toutes les fractions* $\frac{A}{B}$ *égales à la première? Combien y en a-t-il, si l'on suppose* $a = 6$, *dont les dénominateurs soient compris entre* $100a$ *et* $600a$? *Forme générale d'une des fractions cherchées.*

Un nombre qui divise $2a + 1$ et $3a + 1$ divise la différence, qui est a, mais a ne divise pas $2a + 1$. Donc $2a + 1$ et $3a + 1$ sont premiers entre eux.

Pour la seconde fraction, remarquons que $2a + 1 = a + (a + 1)$, le numérateur est la somme de deux nombres, dont le dénominateur est le produit. Or, tout nombre qui divise la somme et le produit de deux autres divise le carré de leur différence, en vertu de l'identité $(a - b)^2 \equiv (a + b)^2 - 4ab$. Un diviseur de $2a + 1$ et de $a(a + 1)$ diviserait le carré de la différence $(a + 1) - a$, qui est l'unité.

Les deux termes de la seconde fraction sont donc aussi premiers entre eux.

Toute fraction équivalente à la fraction irréductible $\frac{2a + 1}{3a + 1}$ a pour termes les produits du numérateur et du dénominateur par un même nombre entier. La forme générale de ces fractions est donc $\frac{n(2a + 1)}{n(3a + 1)}$. Pour que le dénominateur soit compris entre $100a$ et $600a$, il faut que n satisfasse à la double inégalité

$$100a < (3a + 1)n < 600a;$$

dans le cas où $a = 6$, cela donne les conditions

$$600 < 19n < 3\,600;$$

le quotient de 600 par 19, à l'unité près par défaut, est 31 : la plus petite valeur de n est donc 32. Le quotient de 3 600 par 19, à l'unité près par défaut, est 189; la plus grande valeur de n est 189. Cela fait en tout $189 - 31 = 158$ valeurs.

4163. — *Trouver trois nombres x, y et z, en progression géométrique, tels que : si l'on augmente le deuxième nombre de a, la progression devient arithmétique; si l'on augmente le troisième nombre de b, la progression redevient géométrique.*

En exprimant que le nombre moyen est moyenne géométrique ou arithmétique entre les deux autres, suivant la nature de la progression, on a trois équations, qui expriment les propriétés indiquées par l'énoncé :

$$y^2 = zx, \qquad (1)$$
$$2(y + a) = z + x, \qquad (2)$$
$$(y + a)^2 = x(z + b), \qquad (3)$$

formant un système à trois inconnues. On peut d'abord facilement éliminer z. En retranchant membre à membre l'équation (1) de (3), on a

$$a^2 + 2ay = bx; \qquad (4)$$

en retranchant l'équation (1) de (2), dont les deux termes ont été au préalable multipliés par x, on trouve

$$2x(y + a) - y^2 = x^2,$$

ce qui s'écrit

$$(x-y)^2 = 2ax; \qquad (5)$$

les équations (4) et (5) forment un système qui ne contient plus que deux inconnues x et y; on peut l'écrire

$$\begin{cases} (x-y)^2 = 2ax, \\ 2a(x-y) = a^2 + (2a-b)x; \end{cases}$$

on obtient l'équation résolvante en x en portant dans la première équation la valeur de $(x-y)$ tirée de la seconde. En posant $\frac{b}{a} = m$, cette équation se met sous la forme

$$(1-m)^2x^2 - a(1+m)x + \frac{a^2}{4} = 0;$$

la quantité sous le radical est

$$a^2(1+m)^2 - a^2(1-m)^2 = 4a^2m;$$

l'équation en x a donc des racines quand m est positif, c'est-à-dire quand a et b sont donnés de même signe. Les valeurs de l'inconnue x sont

$$\left.\begin{matrix} x' \\ x'' \end{matrix}\right\} = \frac{a(1+m) \pm 2a\sqrt{m}}{2(1-m)^2},$$

et l'on a ensuite, pour chacune des deux valeurs x' et x'',

$$y = \frac{1}{2}(mx - a), \qquad z = (m-1)x + a.$$

EXAMENS ET CONCOURS DE 1920 (*Suite.*)

EXAMENS ORAUX des ÉCOLES NATIONALES D'ARTS ET MÉTIERS, 1920 (*).

Géométrie (*fin*).

231. — Construire un cercle passant par un point donné et tangent a deux droites données.

232. — Deux trièdres sont égaux s'ils ont leurs faces respectivement égales et semblablement disposées.

233. — [**4294**(**)]. On considère un triangle équilatéral ABC et son cercle circonscrit. Mener à BC une parallèle EF qui rencontre le cercle circonscrit en des points D, G tels que

$$DE = EF = FG.$$

---

234. — Montrer que dans un triangle au plus grand côté est opposé le plus grand angle. Théorème analogue en géométrie dans l'espace.

235. — Construire un triangle connaissant le côté BC, l'angle A et la médiane issue de B.

236. — Construire deux longueurs connaissant leur différence et leur moyenne géométrique.

---

237. — On donne un cercle O et une corde AB. Soit C le milieu de l'un des arcs AB. Tracer la sécante CDE telle que la longueur DE comprise entre AB et le cercle ait une longueur donnée a.

238. — Construire une sphère passant par un cercle donné et par un point donné.

239. — Inverse d'un cercle.

240. — Étant donné un cercle O, une corde AB, un point D de cette corde, construire un cercle tangent à la corde AB au point D et au cercle O.

241. — Lieu des points de l'espace équidistants de deux droites données qui se coupent.

---

242. — Construire un triangle connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.

243. — [**4295**]. On considère un triangle ABC tel que BC est fixe et A constant. On trace le cercle passant par A et tangent en B à BC, le cercle passant par A et tangent en C à BC. Ces cercles se coupent en un second point M. Lieu du point M.

244. — Mener par une droite donnée un plan tangent à une sphère donnée.

---

245. — Construire la moyenne proportionnelle à deux longueurs données.

246. — On donne un cercle O, une corde BC, les tangentes AB, AC en B et C au cercle. Montrer que si l'on projette un point quelconque M du cercle en D, E, F sur BC, CA, AB, on a $\text{MD}^2 = \text{ME}.\text{MF}$.

247. — Calculer le rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre régulier.

---

248. — Figure inverse d'un cercle.

249. — On donne un cercle O et deux points A et B de ce cercle. Par A et B, on fait passer deux cercles O', O'' tangents à O en A et B et tangents entre eux en M. 1° Lieu du point M. 2° Lieu du point de rencontre des tangentes communes aux cercles O' et O''.

250. — Volume d'une pyramide pentagonale régulière dont l'arête latérale est égale à l'arête de base.

---

251. — Étant donnés les côtés a, b, c d'un triangle ABC, calculer le rayon R du cercle circonscrit.

252. — Démontrer que les diagonales d'un parallélépipède se coupent en leur milieu.

253. — Démontrer que si les quatre diagonales d'un parallélépipède sont égales, ce parallélépipède est rectangle.

---

254. — La différence des carrés de deux côtés d'un triangle est égale à deux fois le produit du troisième côté par la projection de la médiane correspondante sur ce côté.

255. — Soit un losange ABCD et un point O quelconque de la diagonale BD. Démontrer que l'on a

$$\text{OB}.\text{OD} = \overline{\text{AO}}^2 - \overline{\text{AD}}^2.$$

256. — On coupe un tétraèdre SABC par un plan A'B'C' parallèle à la base et qui rencontre les arêtes SA, SB, SC en A', B', C'. Soient A'', B'', C'' les milieux de BC, CA, AB. Démontrer que les droites A'A'', B'B'', C'C'' sont concourantes.

---

257. — Le carré du côté opposé à un angle obtus est égal à la somme des carrés des deux autres côtés augmentée du double produi de l'un de ces côtés par la projection de l'autre sur lui.

258. — Trièdres supplémentaires.

259. — [**4296**]. Soient AX, BY deux droites orthogonales et AB une perpendiculaire commune. Une droite MN, de longueur invariable, se déplace de façon que ses extrémités s'appuient sur AX et BY. Lieu du milieu de MN.

(*) Les questions posées à un même candidat sont comprises entre deux traits.

(**) Ce second numérotage ne porte que sur les questions dont nous avons l'intention de donner ici une solution. Ces questions seront résolues comme exercices; les abonnés ne devront pas en envoyer de solutions.

EXAMENS ET CONCOURS DE 1921 *(Suite.)*

ÉCOLES NATIONALES D'AGRICULTURE

Arithmétique.

4297. — Avec 1 575 pavés carrés, mesurant chacun $0^{m^2},0256$, on a recouvert une cour rectangulaire.

1° Déterminer les dimensions de cette cour sachant qu'elles sont proportionnelles à 7 et 9.

2° Quelles autres dimensions, comprises entre 10^{cm} et 50^{cm}, pourrait-on donner à des pavés carrés pour recouvrir la même cour et combien de pavés devrait-on employer?

Géométrie.

4298. — Sur un segment de droite AB on prend un point P et l'on décrit les demi-circonférences de diamètres AP, PB; on mène la tangente commune MN touchant la première en M, la seconde en N.

1° Les droites AM, BN se coupent en Q, montrer que PMQN est un rectangle.

2° Calculer MN et les distances des points M et N à AB.

3° Aire engendrée par la rotation autour de AB de la ligne formée par l'arc AM, le segment MN et l'arc NB.

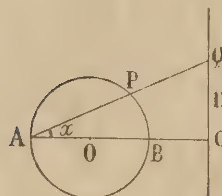
4° Volumes engendrés par le rectangle PMQN et le triangle curviligne MPN tournant autour de AB.

On donne les rayons a et b des demi-circonférences.

Mécanique.

Soit, dans un plan vertical, une circonférence de rayon r. Les deux extrémités d'une barre AB de longueur $r\sqrt{3}$ peuvent glisser sans frottement sur cette circonférence. La barre n'est pas homogène et son centre de gravité est le point G de AB tel que $\frac{AG}{AB}=\frac{1}{3}$.

Déterminer la position d'équilibre de la barre et les réactions du cercle.



Trigonométrie.

Soit un cercle de diamètre $AB = 2r$; sur le prolongement de AB on porte $BC = r$ et on mène en C la perpendiculaire CD à AC. — La sécante AP menée par A coupe le cercle en P et la droite en Q.

1° Calculer PQ en fonction de r et de l'angle $CAQ = x$.

2° Déterminer x pour que $PQ = 5r$.

3° Calculer PQ pour $x = 75°$.

Physique et chimie.

I. — Dire ce qu'on entend par pression en un point d'un fluide en équilibre, et établir le théorème relatif à la différence des pressions en deux points d'un fluide en équilibre.

II. — Définir la déclinaison et l'inclinaison magnétiques en u[illegible] donné.

III. — Préparation et propriétés physiques et chimiques de l'[illegible] chlorhydrique.

Sciences naturelles.

I. — Décrire sommairement les divers types d'appareils respi[illegible]toires chez les Vertébrés. Mécanisme de la respiration. — Échang[illegible] gazeux.

II. — Fruits : constitution, importance et rôle.

QUESTIONS PROPOSÉES

4299. — Un piéton a parcouru $6^{km},300$ en un nombre n de minutes, à la vitesse uniforme de p mètres par minute : la différence $n - p$ de ces deux nombres étant 45, trouver la vitesse du piéton.

4300. — Trouver les nombres de quatre chiffres qui ont la propriété d'être égaux à la somme des carrés des deux nombres formés par les deux chiffres de droite et par les deux chiffres de gauche :

$$\overline{abcd} = \overline{ab}^2 + \overline{cd}^2.$$

(Henri Liéger, à Paris.)

4301. — Une personne a souscrit aux trois emprunts de la Défense nationale : 5 % 1916, 4 % 1917 et 4 % 1918. — Pendant l'année 1919, elle a touché les sommes suivantes : 620f en février pour les coupons de rente 5 % 1916 et 4 % 1917 correspondant au 1er trimestre; 1 053f en juin pour les coupons de rente 5 % correspondant au 2e trimestre et les coupons de rente 4 % 1918 des deux premiers trimestres; 2 103f en décembre, pour les coupons de rente 4 % 1917 des trois derniers trimestres, les coupons de rente 5 % et 4 % 1918 des deux derniers trimestres.

On demande quel est l'avoir de cette personne en titres des trois emprunts. Cet avoir sera calculé en tenant compte des cours au 6 février 1920, qui étaient de 87f,55 pour le 5 %, de 71f,50 pour le 4 % 1917, de 71f,20 pour le 4 % 1918.

(*B. S., Lille, aspirantes, octobre* 1920.)

4302. — Résoudre les équations

$$\frac{x^6-1}{x-1}+\frac{3}{2}x^2(x+1)=0,$$

et

$$\frac{x^6-64}{x+2}+6x^2(x-2)=0.$$

4303. — Deux poulies O et O′, de rayons différents, sont réunies par une courroie sans fin dont les brins se croisent en I dans leur intervalle, en formant entre eux un angle de 60°. La première fait 100 tours pendant que la seconde en fait 160. La distance OO′ de leurs centres est $1^m,30$.

On demande de calculer :

1° la longueur totale de la courroie;

2° la surface comprise entre les deux poulies et les parties rectilignes de la courroie.

Prendre

$$\pi = 3,1416, \qquad \sqrt{3} = 1,732.$$

(*B. S., Montpellier, aspirants, octobre* 1920.)

4304. — Dans un angle $BAC = 60°$, on inscrit deux cercles tangents entre eux extérieurement au point D. Le plus petit a pour centre O et pour rayon R; le plus grand a pour centre O′ et ces deux cercles sont tangents au côté AB respectivement aux points P et P′.

Prouver que le rayon $O'P' = 3R$; puis calculer, à un centimètre carré près, l'aire de la figure comprise entre la tangente commune PP′, l'arc PD de la circonférence O et l'arc P′D de la circonférence O′, pour le cas où $R = 0^m,31$.

(*B. S., Paris, aspirants, octobre* 1920.)

4305. — On donne deux circonférences extérieures l'une à l'autre, (O) et (O′); la première, de plus grand rayon que la seconde, est rencontrée en A par la ligne des centres, non prolongée.

Démontrer que la somme des longueurs des tangentes menées par un point de la région du plan comprise entre les cercles et les tangentes communes extérieures est moindre que l'une de ces tangentes et plus grande que la tangente au cercle (O′) menée de A.

(V. Thébault, à Ernée.)

4306. — On donne un cercle fixe (O), dont AB est un diamètre, le [illegible]ntre d'un cercle variable (O′) parcourt AB, son rayon est OO′, [illegible]ouver :

[illegible] le lieu des points de contact M et M′ des tangentes communes [illegible] [illegible]ercles (O) et (O′) avec le cercle (O′);

[illegible] lieu du point de rencontre du rayon OM avec l'axe radical des ce[illegible] (O) et (O′).

(Henri Recoing.)

Le Rédacteur-Gérant : Henry VUIBERT.

[illegible]mmiers. — Imprimerie Paul BRODARD.

23e Année. 1er Juillet 1921. N° 19.

L'Éducation Mathématique

JOURNAL PUBLIÉ PAR

André DURAND
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
PROFESSEUR AGRÉGÉ AU LYCÉE SAINT-LOUIS

&

H. VUIBERT
RÉDACTEUR DU
Journal de Mathématiques élémentaires.

Entre esprits égaux et toutes choses pareilles, celui qui a de la Géométrie l'emporte et acquiert une vigueur toute nouvelle.

PASCAL.

L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE paraît le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er Octobre au 15 Juillet inclusivement.

	France et Colonies	Étranger
PRIX DU NUMÉRO.	0 fr. 60	0 fr. 70
ABONNEMENT ANNUEL. . .	10 fr. »	12 fr. »

Tous les abonnements partant du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction. — *Adresser tout ce qui concerne la rédaction à « L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE, Boulevard Saint-Germain, 63, Paris, 5e ».*

Abonnements. — *Les abonnements peuvent se payer en timbres-poste. Il est cependant préférable d'envoyer des mandats.*

Les solutions des questions proposées dans un numéro daté du 1er doivent parvenir à la Rédaction au plus tard le 5 du mois suivant; les solutions des questions proposées dans un numéro daté du 15 doivent parvenir le 20 du mois suivant, au plus tard.

PARIS
LIBRAIRIE VUIBERT
63, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

Coulommiers. — Imp. Paul BRODARD.

